本书由总装备部装备科技译著出版基金资助出版

DSmT 理论及其在信息融合中的应用

（文集）

Advances and Applications of DsmT for Information Fusion

(collected works)

［美］Florentin Smarandache　［法］Jean Dezert
黄心汉　李新德　译

国防工业出版社
·北京·

著作权合同登记　图字:军－2010－117 号

图书在版编目(CIP)数据

DSmT 理论及其在信息融合中的应用/(美)司马仁达奇(Smarandache,F.),(法)德泽特(Dezert,J.)著;黄心汉,李新德译.—北京:国防工业出版社,2011.6
ISBN 978-7-118-07304-1

Ⅰ.①D...　Ⅱ.①司...②德...③黄...④李...　Ⅲ.①推理控制—应用—信息融合　Ⅳ.①G202②TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 077210 号

※

国防工業出版社 出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路 23 号　邮政编码 100048)
国防工业出版社印刷厂印刷
新华书店经售

*

开本 710×960　1/16　印张 23¾　字数 443 千字
2011 年 6 月第 1 版第 1 次印刷　印数 1—3000 册　定价 66.00 元

国防书店:(010)68428422　　发行邮购:(010)68414474
发行传真:(010)68411535　　发行业务:(010)68472764

Preface to the Chinese Edition

During the second half of the 20th Century, several new and interesting mathematical theories aside the Theory of Probabilities have emerged in parallel with the development of computer science and technology in order to combine many types of information (fuzzy, neutrosophic, uncertain, imprecise, paradoxist, incomplete, paraconsistent, etc.) provided by different sources (human experts or artificial intelligent expert systems, sensor measurements, neural networks, economics predictions, etc.). One such theory, that permits the combination of uncertain, imprecise, and paradoxist information, has been introduced and developed since 2001 by Dr. Jean Dezert from ONERA (The French Aerospace Lab, France) and Prof. Florentin Smarandache (University of New Mexico, USA). This new theory has been called Dezert-Smarandache Theory of Plausible and Paradoxist Reasoning for Data Fusion (DSmT) and has become a mainstream theory in information fusion and it is used more and more in different fields of applications where uncertain and conflicting information processing is required for decision-making support (medicine, defense, security and surveillance, robotics, pollution prevention, etc.) as shown through the publications available in the literature and Ph. D. dissertations.

Many international conferences including the use of paradoxism in science started since 2003:

- The first one, called: "Applications of Plausible, Paradoxical and Neutrosophic Reasoning for Information Fusion", 8-11 July 2003, at Radisson Hotel, Cairns, Queensland, Australia.
- The second one: "Applications and Advances of Plausible and Paradoxical Reasoning for Data Fusion", June 28-July 1, 2004, in Stockholm, Sweden.

On 5 November 2004, Paradoxism, used in the fusion of conflicting information, was invited to and sponsored by NASA Langley Research Center, in Hampton, Virginia, USA; see the lectures:

http://www.nianet.org/ecslectureseries/smarandache_110504.php
http://www.nianet.org/ecslectureseries/dezert_110504.php.
Between 16-27 May 2005, Paradoxism, again used in the fusion of conflicting information, was presented at and sponsored by NATO Advanced Study Institute, Albena, Bulgaria:
http://www.asibulgaria2005.com.

We were also sponsored by Marcus Evans Inc. to present tutorials on DSmT to Spain - 2005, and Belgium - 2007.

Since 2003 until today we participated each year to the International Conferences sponsored by the International Society of Information Fusion (www.isif.org) dedicated to the Information Fusion, with papers, special sessions, and tutorials on DSmT (paradoxism used in science), organized respectively in Australia - 2003, Sweden - 2004, USA (Philadelphia - 2005, Seattle - 2009), Italy - 2006, Canada - 2007, Germany - 2008, Scotland - 2010.

Other International Conferences or Seminars on DSmT in: France (Brest, ENSIETA - 2010; Paris, COGIS - 2009 & 2006); Romania (University of Craiova & Sibiu - 2009); USA (Air Force, Dayton, Ohio - 2009; Air Force, Rome, NY - 2009; Griffiss Institute - 2009); China (Universities of Nanjing, Wuhan, Beijing, Xi'an and Hangzhou - 2009); U. K. (University of Lancaster - 2009); Indonesia (Malang & Salatiga - 2006); Slovenia (Maribor - 2005).

Some published papers and presentations at various international conferences and seminars over the world, plus three books are freely downloadable from our web site at:

http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/DSmT.htm.

We want to thank again all the coauthors of this volume and all our colleagues who have manifested through their publications their strong interests in developing, improving and using DSmT in their own field of applications. We thank also researchers and students who have made interesting criticisms or have submitted to us new exciting and challenging questions which have motivated us to pur-

sue our research in information fusion.

We deeply thank our translators and friends, Prof. Xinhan Huang (Huazhong Univ. of Science and Technology, Wuhan, China) and Prof. Xinde Li (School of Automation, Southeast Univ., Nanjing, China) and their students: Ph. D. students Peng Li and Shangqin Mao, and master students Xiaoke Chen, Cheng Wang, Chao Wu, Ye Tian, Zengli Yang, Xuejian Wu, Luyang Wang, Jiaming Sun, and Xiaobin Jin who did work on this Chinese translation of the English edition of our manuscript, and we hope we will cooperate with them for the next DSmT volumes too.

Jean Dezert wants to express his deep gratefulness to Prof. Xinhan Huang, Xinde Li, and Xiao-Rong Li (Univ. of New Orleans, USA) for giving him the great opportunity to introduce and present for the first time DSmT in China through a series of very well-attended seminars during spring 2009 which has yielded to fruitful scientific discussions and collaborations.

This first volume presents the basis of DSmT for information fusion and it has been completed by the Volume 2 in 2006, and the Volume 3 in 2009 (in English) and available on our web site. We recommend the readers to download and read these volumes which contain the most recent advances in information fusion with applications (including new efficient rule of combination based on proportional conflict redistribution, new conditioning rules, MatLab™ codes, etc.). We also encourage all readers interested in this research field to contact us (at jdezert@gmail.com and smarand@unm.edu) if they have any questions, criticisms or comments on DSmT, or if they want to share ideas with us or bring their contribution in a next Volume.

Jean Dezert & Florentin Smarandache

Orléans, France & Gallup, USA.
September 7th, 2010

中译版序

20 世纪下半叶，为了组合由不同信息源（人类专家或人工智能专家系统，传感器测量，神经网络，经济预测等）提供的许多不同类型的信息（模糊，中智，不确定，不精确，自相矛盾，不完善，不一致等），在计算机科学技术发展的同时，与概率理论相关的一些新的和有趣的数学理论逐步形成。其中的一个理论是由法国航空航天实验室（The French Aerospace Lab，France）的 Jean Dezert 博士和美国新墨西哥大学（University of New Mexico，USA）的 Florentin Smarandache 教授自 2001 年提出和发展的组合不确定、不精确和自相矛盾信息的推理理论。这个新的理论被称为 Dezert-Smarandache 理论，该理论将似是而非和自相矛盾推理方法用于数据融合，并已在许多不同领域得到应用成为了信息融合的主流理论。在这些应用中，要求对那些不确定和相互冲突的信息进行处理（医药、国防、安全和监视、机器人、污染防治等）来实现决策支持，这些内容都可以在本书包含的相关文献和博士（学位）论文中看到。

从 2003 年开始，自相矛盾推理的使用就在许多国际会议上出现：

第一次会议是 2003 年 7 月 8 日至 11 日在澳大利亚昆士兰召开的“似是而非、自相矛盾和中智推理在信息融合中的应用”国际会议。

第二次会议是 2004 年 6 月 28 日至 7 月 1 日在瑞典斯德哥尔摩召开的“似是而非、自相矛盾和中智推理在数据融合中的应用”国际会议。

2004 年 11 月 5 日我们应邀出席了位于美国维吉尼亚汉普顿的 NASA 兰利研究中心（NASA Langley Research Center）主办的学术研讨会，作了题为“用于冲突信息融合的似是而非和自相矛盾推理”的报告。报告讲稿可在下列网站查阅：

http://www.nianet.org/ecslectureseries/smarandache_110504.php

http://www.nianet.org/ecslectureseries/dezert_110504.php

2005 年 5 月 16 日至 27 日我们出席了位于保加利亚阿尔贝纳的北大西洋公约组织高级研究所（NATO Advanced Study Institute）主办的学术研讨会，作了题为“再次用于冲突信息融合的似是而非和自相矛盾推理”的报告。报告讲稿可在下列网站查阅：

http://www.asibulgaria2005.com

我们还得到马库斯一埃文斯有限公司赞助，于 2005 年和 2007 年分别在西班

牙和比利时介绍了 DSmT 理论。

2003 年至今，我们每年都参加由国际信息融合学会（www.isif.org）主办的国际会议，以论文、专题报告和研讨会形式报告 DSmT（似是而非理论在自然科学中的应用）。它们分别是：2003 年在澳大利亚，2004 年在瑞典，2005 年和 2009 年分别在美国费城和西雅图，2006 年在意大利，2007 年在加拿大，2008 年在德国，2010 年在苏格兰。

其他有关 DSmT 的国际会议或研讨会有：法国（布雷斯特，ENSIETA-2010；巴黎，COGIS-2009 和 2006）；罗马尼亚（克拉约瓦和斯比大学-2009）；美国（美国空军，俄亥俄州代顿-2009；美国空军，纽约州罗马-2009；格里菲思学院-2009）；中国（南京、武汉、北京、西安和杭州的几所大学-2009）；英国（兰开斯特大学-2009）；印度尼西亚（玛琅和萨琅提加-2006）；斯洛文尼亚（马里博尔-2005）。

一些在全世界的各种国际会议和学术研讨会上发表的相关论文和介绍，以及我们的三本书都可以在我们的下列网站上免费下载：

http://www.gallup.unm.edu/～smarandache/DSmT.htm

我们再次感谢本书的所有作者和所有那些通过发表论文证明在自己的研究领域对发展、改进和采用 DSmT 有着强烈兴趣的同事们。

我们深深感谢本书的翻译者华中科技大学黄心汉教授和东南大学自动化学院李新德教授，以及参与了部分翻译工作的两位教授的学生们，他们是：博士生李鹏、毛尚勤；硕士生程小科、王成、吴超、田野、杨曾力、吴雪建、王露阳、孙家明和金晓斌等。我们也希望 DSmT 后面几卷继续与他们进行合作。

Jean Dezert 在此要向黄心汉、李新德和李晓榕（美国新奥尔良大学）3 位教授表达深切的感激之情，他们在 2009 年春天邀请我来中国，使我有机会在有很多人参加的系列讲座上首次介绍和讲解 DSmT 理论，并进行了富有成效的学术交流与合作。

本书介绍 DSmT 用于信息融合的基础，另有两卷分别于 2006 年和 2009 年完成（英文版），并已挂在我们的网站上，欢迎读者下载和阅读，这两卷的内容包含了信息融合应用的最新进展（包括新的基于比例冲突重新分配的组合规则、新的条件作用准则、MatLab™编码等）。如果你们对 DSmT 理论有任何疑问、批评和评论，或希望将想法与我们共享，再或希望将论文编入我们的下一卷中，欢迎所有对该领域有兴趣的读者与我们联系（jdezert@gmail.com 、smarand@unm.edu）。

吉恩·德泽特　　　　弗罗仁汀·司马仁达齐

于法国奥尔良和美国盖洛普

2010 年 9 月 7 日

译者前言

2004 年当我们初次看到有关文章中出现 DSmT 时还以为是作者的笔误(将 DST 误写成 DSmT),因为由 Glenn Shafer 在 1976 年提出的 Dempster-Shafer Theory(DST)经典证据理论已为我们熟知。随着对 DSmT 的深入了解,才发现它是由法国航空航天实验室(The French Aerospace Lab, France)的 Jean Dezert 博士和美国新墨西哥大学(University of New Mexico, USA)的 Florentin Smarandache 教授在 2001 年提出的将似是而非和自相矛盾推理方法用于数据融合的一种新的理论,这个新的理论被称为 Dezert-Smarandache Theory(DSmT)。该理论正如作者在本书第 1 章的引言中指出的"DSmT 可以看作是经典的 DST 的扩展,但是它们又存在着重要的差异。比如,DSmT 可以处理由信度函数表示的任意类型独立信息源间的信息融合问题,但它的重点是处理不确定、高度冲突和不精确的证据源的融合问题。DSmT 能够不受 DST 框架的限制,处理复杂的静态或动态融合问题,特别是当信息源间的冲突非常大时,或者是所考虑问题的框架中命题之间的界限模糊、不确定、不精确、很难细分时,DSmT 便发挥了它的优势。"

这个发现使我们兴奋不已,因为我们当时正在寻求一种信息融合的新的方法和途径,希望能解决移动机器人的同时定位和地图创建(SLAM)问题。我们很快与 Jean Dezert 博士取得了联系,并将上述想法与他进行了交流,得到了他的支持与鼓励。Jean Dezert 博士表示 DSmT 当时还没有在机器人领域应用的先例,希望我们率先将 DSmT 应用到机器人领域,为丰富和发展 DSmT 理论做出贡献。在经过一段时间的理论与实验研究准备的基础上,我们在 2006 年向国家自然科学基金委提出"基于 DSmT 的多源不完善信息广义融合研究"的项目申请,并得到了国家自然科学基金的资助(项目编号:60675028),这更加增强了我们的信心。

通过近几年的潜心研究,我们在基于 DSmT 的多源不完善信息广义融合及其在移动机器人地图创建研究中取得了显著的进展和成果,并在 2008 年再次得到国家自然科学基金的资助(项目名称"基于二元模糊语言标签的 DSmT 不确定性推理与机器感知研究",项目编号:60804063)。自 2006 年以来我们在国内外期刊和国际会议上发表了相关论文 30 多篇(大部分论文被 SCI 和 EI 收录),并参与了由 Jean Dezert 博士和 Florentin Smarandache 教授主编的"Advances and Applications of DSmT for Information Fusion"一书后两卷部分章节的编写(2006 出版的

第二卷第14章；2009出版的第三卷第8章)。

2009年5月我们有幸邀请Jean Dezert博士访问东南大学和华中科技大学，进行了学术交流和研讨，Jean Dezert博士为两校相关院系师生作了题为“Introduction to DSmT for Information Fusion”的专题报告，并细致地回答了师生的提问。Jean Dezert的访问与学术报告活动为师生们提供了一次与国际知名学者进行面对面交流的机会，使大家深受鼓舞、受益匪浅，增进了对学科前沿的认识和理解。

由于DSmT是近年才出现的新的理论和方法，国内学者了解的人还不是很多，因此我们打算将Jean Dezert博士和Florentin Smarandache教授主编的“Advances and Applications of DSmT for Information Fusion”译成中文，以飨中国的广大读者，该项计划也列入了我们的国家自然科学基金项目中。翻译计划得到了Jean Dezert博士和Florentin Smarandache教授无保留的支持和鼓励，并专门为中译版撰写了前言，在此谨向他们表示诚挚的感谢。本书的翻译计划还得到总装备部装备科技译著出版基金的资助，得到国家自然科学基金和国防工业出版社的大力支持和帮助，在申报译著出版基金及本书的出版过程中得到国防工业出版社电子信息编辑室主任陈洁编审、中南大学蔡自兴教授、中科院合肥智能所葛运建研究员的支持和帮助。在此谨向他们表示衷心的感谢。

本书翻译工作由黄心汉和李新德完成，其中第一部分(DSmT的进展)由李新德翻译，第二部分(DSmT的应用)由黄心汉翻译，全书由黄心汉统稿。李鹏、毛尚勤、程小科、王成、吴超、田野、杨曾力、吴雪建、王露阳、孙家明、金晓斌等参加了部分章节的初译，在此谨向他们表示衷心感谢。囿于译者学识水平，译文错漏在所难免，我们诚挚欢迎读者批评指正。

导 言

本书旨在介绍信息融合领域中新出现的一个分支。在信息融合过程中，可能会出现信息源提供的信息不确定或者高度冲突的问题，而这个新的分支就是为了解决此问题而产生的。这个被称为 DSmT（Dezert-Smarandache Theory）的理论为我们提供了许多新的有用的组合规则。本书对 DSmT 的发展历程，即从提出到最新的研究进展，给出了详细的介绍。本书第一部分介绍 DSmT 的理论研究现状，第二部分介绍这个新理论的应用。我们希望这本关于 DSmT 的处女作，能够激发起那些工作在数据融合与人工智能领域的学者和工程技术人员的兴趣。很多简单而又很有意义的例子贯穿全书。作为一个新出现的理论，DSmT 很可能非但不会消亡，反而会在几年内飞速发展。我们只是想通过本书对在信息融合处理中出现的问题给出一个新的观点，从而为它的发展开辟新的道路。

在此，我们要感谢 Laurence Hubert-Moy 教授、Anne-Laure Jousselme 博士、Shubha Kadambe 博士、Pavlina Konstantinova 博士、Albena Tchamova 博士、Hongyan Sun 博士、Samuel Corgne 博士、Frederic Dambreville 博士、Milan Daniel 博士、Denis de Brucq 教授、Mohamad Farooq 教授、Mohammad Khoshnevisan 博士、Patrick Maupin 博士、Gregoire Mercier 博士以及 Tzvetan Semerdjiev 教授。对于他们对这一版的贡献与支持，我们表示衷心的感谢。我们也鼓励那些对于信息融合领域以及 DSmT 感兴趣的读者积极投稿，我们将对有价值的稿件安排在几年后的第二版出版。本领域的研究非常有前途，而且目前非常有活力。欢迎广大读者来函来稿，批评指正。

我们还要感谢我们的同事，在过去的三年里，他们积极鼓励我们编著此书并且提出了很多宝贵意见。我们还要特别感谢 Albena Tchamova 博士和 Milan Daniel 博士对本书的仔细审阅，以及 Frederic Dambreville 博士、Anne-Laure Jousselme 博士、Branko Ristic 博士和 Philippe Smets 教授对于本书第 12 章提出的建议和修改意见，还有 Roy Streit 博士鼓励我们对 TP2 问题进行更深入的探讨。此外，我们还要感谢 Krassimir Atanassov 教授、Bassel Solaiman 和 Pierre Valin，他们对于本书给予了认真的审阅。

国际信息融合协会（ISIF）批准我们在本书第 2、3、7、13 章和 15 章中引用一些最近召开的信息融合大会的内容，对此我们同样表示深深的感谢。

Jean Dezert 对于 ONERA 中信息建模和处理部表示深深的感激，它们对于 Dezert 的研究给予了鼓励以及经济支持。Jean Dezert 同时也要感谢他的同事和朋友 Christian Musso 博士对于 DSmT 的讨论，以及感谢 Frederic Cassaing (ONERA/DOTA/CC) 博士、Christophe Peyret (ONERA/DSNA) 博士和 Jean-Philippe Ovarlez (ONERA/DEMR/TSI) 博士为此提供的 LATEX 打字装置及排版工作。此外，他还要感谢法国鲁昂大学 PSI 实验室的 Patrick Vannoorenberghe 博士，保加利亚科学院 CLPP 实验室的 Tzvetan Semerdjiev 教授，巴黎多芬大学的 Jean-Pierre Aubin 教授和 Patrick Saint-Pierre 教授，法国雷恩大学 COSTEL 实验室的 Laurence Hubert-Moy 教授，法国 Arcueil 的 CTA 实验室的 Frederic Dambreville 博士，以及曾在墨尔本大学工作而现在供职于悉尼科技大学的 Subhash Challa 教授，感谢他们在过去的几年中邀请他在 DSmT 理论研讨会作报告。

Florentin Smarandache 很感谢新墨西哥大学多次赞助他参加关于数据融合或模糊与中智逻辑的会议，通过会议他结识了很多学者，如在加州大学伯克利分校认识的 Lofti Zadeh 教授，他是一个对 DSmT 理论非常感兴趣的人。又如在瑞典，UNM 也积极地鼓励他进行该项研究。

我们想感谢所有的人。

序

科学技术的进步总是源于思维的变迁。在 1910 年，爱因斯坦为了使笛卡儿动力学的绝对时空概念与麦克斯韦的电动力学方程相协调，提出了真空中光的绝对速度。对于惯性系中的观察者来说，这种困难的解决无疑是把时间和空间看作同等的地位，这就诞生了狭义相对论。当他努力地将引力场也包括在他的理论中时，由于能量（或质量）使得时间和空间发生弯曲，通过联系局部惯性系，于是产生了广义相对论。通常情况下，新的理论的产生总是来源于对旧理论中约束条件的放宽，而这些旧的理论原本被认为是永恒不变的。现在，我们已经了解到了笛卡儿动力学（缓慢移动的目标）、狭义相对论（快速移动的目标）以及广义相对论（宇宙与强引力场）的适用领域。然而，广义相对论在一定情况下又能够简化为狭义相对论，而后者在日常生活中又可以进一步转化为笛卡儿动力学。从笛卡儿动力学到广义相对论的建立，这期间所付出的努力与所面临的困难是可想而知的。

在 Shafer 于 1976 年出版的经典名作中，他就进行了思维的变换。他对已经存在的贝叶斯自动推理的形式进行了改进，提出了一种新的被称为 DS 证据推理的理论。他的理论不像贝叶斯理论那样，对一个完全未知信息源的描述看成具有 1/2 的可能性和 1/2 的不可能性。此外，当含有多个相互排斥的元素，并且信息源只能对某些元素的概率进行肯定的描述时，那么其余的命题按等概率方式进行分配，这就是贝叶斯理论。而若应用此理论，我们必须一开始就要知道该集合（鉴别框）的所有 N 个命题，以及它们发生的相对频率。作为贝叶斯理论的替代产物，允许将未知性赋给所有其余不能再分集合的并集，这样便产生了一个新的推理理论——DST。

很明显，当我们处理 2^N 个元素的情形时，即 N 个焦元的所有子集（在并集操作之下），问题会变得更加复杂。当 Dempster 的正交和规则被用于不一致信息的组合（融合）过程时，我们见证了 DST 的诞生。信息的不一致与冲突程度显著地影响了正交和规则的归一化过程，使得 DST 应用到极端情况而出现警告信号，即信息的冲突性不应太强。因此，当多个高度冲突的信息利用 DST 进行融合时，就会产生自相矛盾，从而需要其他的方法来解决这个问题。暂且来谈一下相对论，比如，当我们利用狭义相对论来解释某些问题时会产生自相矛盾，而事实上它却是一个需要应用广义相对论才能解决的问题。所以，这时候要解决 DST 中的自相矛盾

问题（本书涉及到的都举为反例），就需要变换思维了，即放宽对鉴别框中焦元的约束限制，而这正是 DSmT 产生的基础。

本书的第一部分指出，DSmT 是通过对鉴别框的扩展提出的，即允许原来 DST（或贝叶斯理论）假定的命题之间事实上具有交集的精确定义。这里同时也指出了 DSmT 的应用条件：开始时就不可能估计我们即将要解决的问题所需的粒度，或者不能解释（由于概念的模糊而不能精确地细化它），或者当问题进展下去最终会产生一个比原始假设更好的粒度。这样就可以继续推理下去，而不是回过头来对命题进行重新扩展，并重新进行推理论证。

然而，新的理论比 DST 更复杂，因为它必须要推理出更多的情况（随着 N 的增加遵循 Dedekind 序列），这包括 N 个原始元素的所有子集（在并集和交集操作下）。不过这仍然比一个定义得非常完美的 DST（如果可能的话）所需的要少，因为后者要推理出 2^{2^N-1} 种情况。经典的 DSm 组合规则确保了系统具有良好的交换性和结合性，这种属性使得它和应用正交和规则的 DST 一样具有很大吸引力。这里的经典 DSm 规则非常简单，它相当于自由 DSm 模型，而且由于它没有涉及到冲突情形下的归一化过程，就不会表现出像 DST 在高度冲突情况下所产生的问题。然而，由于处理动态约束问题（已知某些元素不会在某一个特定的时间发生）是 DSmT 的一个应用领域，这里又提出了一种用于处理排斥性约束的混合组合规则（已知一些元素确实具有相互排斥性）。我们可以找到很多这样的具有时变信息的事例。本书的第一部分提供了很多有意义的例子，用以介绍自由 DSm 模型与基于排斥性约束和（或）非排斥性约束的混合 DSm 模型；同时，也给出了 DST 不能解决而通过 DSmT 能够解决的范例。

本书的第二部分介绍了 DSmT 在数据/信息融合中的应用，包括 TP2 问题、目标行为趋势分析问题、多目标跟踪的广义数据融合问题、Blackman 的数据融合问题、基于中智框架的态势分析问题、植被图像检测问题等。第二部分与第一部分相比，少了部分理论性，多了部分应用性。这本书的双重性质使得它很容易激发科学家或工程技术人员的兴趣。最后，非常感谢作者给了我这个审阅这本好书的机会。

Pierre Valin 教授、博士

Dept. de Physique

加拿大魁北克蒙特利尔大学

2004 年 5 月

本书介绍了由 Jean Dezert 和 Florentin Smarandache 提出的一种新的关于似是而非理论的提出、发展和应用情况，即 DSmT 理论。该理论提出了一种处理来自独立信息源的不确定、高度冲突的以及不精确数据的信息组合方法。它可以被认为是经典的 DST 证据推理的广义化，克服了 DST 的固有局限性，认同去除中间

假设命题的原理。为了克服 DST 的不足，DSmT 提出了描述、分析与组合有用信息的新的形式，它允许鉴别框中命题间存在相互矛盾。它充分考虑所研究问题的完整约束，以及问题的本质属性和粒度，适用于处理信息融合的各类模型。该理论的应用与实际的结果非常相似，完全符合人类的推理过程，同时也改善了 DST 的性能。

Krassimir Atanassov 教授、博士
索菲亚保加利亚科学院生物医学工程研究中心
保加利亚索菲亚
2004 年 5 月

科技的进步往往来源于成就、思想和经验的积累。新的思想和方法有时会遭受质疑，甚至于被拒绝，因为它违背了那些已经存在的我们认为正确的思想。而人类不会轻易地接受这种思想的变革，简而言之，这就是人类的发展史。

信息处理领域同样不例外。当我准备这篇绪言时，我清楚地记起当模糊集理论被提出时，那是一种怎样的情形。在 20 世纪 70 年代，有人说模糊逻辑是科学的鸦片。而现在我们可以看到情形发生了多大的变化，模糊集理论已经被广泛地接受并且得到了很好的应用。

信息融合科学正在颠覆我们原有的思想。事实上，这个领域向我们提出了非常重要的问题：什么是信息，什么是真正有用的信息，怎样进行信息融合，等等。在我个人看来，这个领域将科学推向了一个新的高度。在本书中，由 Florentin Smarandache 和 Jean Dezert 提出的 DSmT 就是处理信息融合的一种方法。该方法旨在构建处理特定情形下不确定或高度冲突的信息融合方法。DSmT 应该被看作是 DST 或贝叶斯理论的延伸。从技术的角度来讲，本书清楚地提出了最基本的问题，即组成鉴别框的各个命题的粒度。这本书并非只局限于理论的角度，而且介绍了很多应用实例，因此很值得一读。

在此，我非常感谢作者们原创性的贡献，并且希望这个非常有前途的领域继续发展下去。

Bassel Solaiman 教授、博士
ENST Bretagne
法国布雷斯特
2004 年 5 月

目　录

第一部分　DSmT 的进展

第二部分　DSmT 的应用

第一部分

DSmT 的 进 展

第 1 章　DSmT 介 绍

Jean Dezert
ONERA
29 Av. de la Division Leclerc
92320 Châtillon,France

Florentin Smarandache
Department of Mathematics
University of New Mexico
Gallup,NM 8730,U. S. A

摘要:本章介绍 DSmT 的总体思想和创立过程,它是由本文作者新近提出的处理似是而非和自相矛盾问题的推理理论,特别探讨了具有潜在高冲突、不确定以及不精确的独立证据源的静态或动态融合问题。本章介绍和证明 DSmT 的基本框架及其与 Glenn Shafer 在 1976 年提出的 Dempster—Shafer Theory (DST)证据理论的关系;介绍 DSm 组合规则和提供一些简单的说明性例子,并在处理简单融合问题时与其他一些著作给出的主要组合规则进行比较。关于 DSmT 目前的进展及应用情况将在本书的后续章节详细介绍。

1.1　引言

作者在近年来[9,10,36]提出的似是而非和自相矛盾推理,即 DSmT,可以看作是经典的 DST[33] 的扩展,但是它们又存在着重要的差异。比如,DSmT 可以处理由信度函数表示的任意类型独立信息源间的信息融合问题,但它的重点是处理不确定、高度冲突和不精确的证据源的融合问题。DSmT 能够不受 DST 框架的限制,处理复杂的静态或动态融合问题,特别是当信息源间的冲突非常大时,或者是所考虑问题的框架(一般情况下用 Θ 表示)由于 Θ 中命题[10] 之间的界限模糊、不确定、不精确而很难细分时,DSmT 便发挥了它的优势。

DSmT 的建立是基于 Dedekind 格子模型 D^{Θ},后来作者也称其为框架 Θ 的超幂集空间。在 DSmT 的框架中,Θ 被认为只是一个包含 n 个完备命题(假设是封闭的)$\{\theta_1,\cdots,\theta_n\}$的集合,而不涉及到其他的约束(相互排斥或者非存在性约束),这符合基于经典 DSm 规则的自由 DSm 模型。事实上这种完备性的假设(封闭的)不是最基本的,这是因为理论上常常可以封闭任何开放的空间,例如,通过假定一

个 Θ_{open}，然后还有一个额外的命题/假设 θ_0（虽然没有被精确确定）来代表 Θ_{open} 中所缺少的命题，将它们放在一起就构成了一个新的封闭框架 $\Theta = \{\theta_0\} \cup \Theta_{open} = \{\theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_n\}$。这种思想已经被 Yager、Dubois、Prade 和 Testemale 在文献[45，13，30]中提到并作了论证，但它与 Smets[42] 的传递信度模型 Transferable Belief Model（TBM）不同。自由 DSm 模型运用得是否恰当取决于与所考虑问题的相关命题 θ_i 的本质属性，这一点已经通过处理很难精确描述和细分的模糊/连续命题（例如相对的概念：矮/高、痛苦/高兴、热/冷、颜色（由于它具有连续的光谱）等）得到了证实，以至于没有细化命题的集合 Θ 包含在一个新的具有更多完备细化命题的集合 Θ_{ref} 是可行的。在这种情况下，作者就称 Θ 为问题的鉴别框架。

当一个完全细化命题的集合 Θ（有时可能只是部分命题细化）存在时，就可以将 Θ_{ref} 作为研究对象，这时称其为该问题的鉴别框（或者局部意义上的鉴别框），因为 Θ_{ref} 的部分命题是相互排斥的，从而它们能够被鉴别（或者部分被鉴别）。完全细化的鉴别框是指所有命题 $\theta_i \in \Theta$ 之间相互排斥，这对应于 DST 的 Shafer 模型。当然，DST（模型）也可以通过对自由 DSm 模型添加命题间的排斥性约束来获得，显然所有处理相互排斥命题的数据融合问题都必须依赖这个模型，这是因为它的假设对问题的本质进行了真实描述。事实上，任何关于约束的模型（包括 Shafer 模型）都可以称为混合 DSm 模型。DSmT 提供了一种广义的混合 DSm 组合规则来处理相互排斥与非存在性约束等各种类型的混合模型，而且它不仅仅局限于最常见的约束模型——Shafer 模型（参见第 4 章关于混合 DSm 规则的介绍与示例）。在作者介绍 DSmT 之前，很有必要先来简单了解一下 DST，这样才能更好地发现这两个理论在处理证据组合时的区别。

1.2　DST 简介

在这一部分，作者将对 DST 进行简单介绍，若想了解更多关于证据的数学理论知识，请参考 Glenn Shafer 的具有里程碑式意义的著作[33]。DST 的进展也可以通过文献[34，48，49]进一步了解。

1.2.1　Shafer 模型与信度函数

假设 $\Theta = \{\theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_n\}$ 作为所考虑融合问题的鉴别框，它含有 n 个完备且相互排斥的命题 θ_i，上述假设对应于 Shafer 模型。这种模型假定所考虑问题的各个命题的细分是完全可能的（存在的或者可行的），在这种情况下，确保各个命题是相互排斥的并且能够完全表述所考虑的问题，以至于 θ_i 可以被精确地定义。

Θ 的所有子集的集合表示为 2^Θ，称为幂集，它的势是 $2^{|\Theta|}$。由于 2^Θ 在并集、交集和补集下是封闭的，所以它定义了一个布尔代数。

例如，若 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}$，那么 $2^\Theta=\{\varnothing,\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_1\cup\theta_2,\theta_1\cup\theta_3,\theta_2\cup\theta_3,\theta_1\cup\theta_2,\cup\theta_3\}$。

在 Shafer 模型下，基本信度赋值（bba）是从 2^Θ 到[0,1]的一个映射，记作 $m(\cdot):2^\Theta\to[0,1]$，它与证据源本身(或称证据体)是有关的，具体定义如下[33]：

$$m(\varnothing)=0 \text{ 且 } \quad \sum_{A\in 2^\Theta} m(A)=1 \tag{1.1}$$

Glenn Shafer 定义 $A\subseteq\Theta$ 的信度函数和似真函数如下：

$$\mathrm{Bel}(A)=\sum_{B\in 2^\Theta,B\subseteq A} m(B) \tag{1.2}$$

$$\mathrm{Pl}(A)=\sum_{B\in 2^\Theta,B\cap A\neq\varnothing} m(B)=1-\mathrm{Bel}(\overline{A}) \tag{1.3}$$

这里 $\overline{A}$ 代表命题 A 的补集。

信度函数 $m(\cdot)$与 $\mathrm{Bel}(\cdot)$、$\mathrm{Pl}(\cdot)$都是一一对应的关系[33]。作者称具有正基本信度赋值的命题集 $A\in 2^\Theta$ 为证据源的核，记作 $\kappa(m)$。

1.2.2 Dempster 组合规则

设 $\mathrm{Bel}_1(\cdot)$与 $\mathrm{Bel}_2(\cdot)$是由具有相同鉴别框 Θ 的两个独立(先验等可靠的)证据源 S_1 和 S_2 提供的信度函数，其基本信度赋值分别为 $m_1(\cdot)$和 $m_2(\cdot)$，组合后的信度函数记为 $\mathrm{Bel}(\cdot)=\mathrm{Bel}_1(\cdot)\oplus\mathrm{Bel}_2(\cdot)$，它是通过 Dempster 的组合规则[33]组合 $m_1(\cdot)$和 $m_2(\cdot)$得到的，具体表示如下：

$$\begin{cases} m(\varnothing)=0 \\ m(A)=\dfrac{\sum\limits_{\substack{X,Y\in 2^\Theta\\ X\cap Y=A}} m_1(X)m_2(Y)}{1-\sum\limits_{\substack{X,Y\in 2^\Theta\\ X\cap Y=\varnothing}} m_1(X)m_2(Y)} \quad (\forall(A\neq\varnothing)\in 2^\Theta) \end{cases} \tag{1.4}$$

当且仅当上式中的分母不为零时，$m(\cdot)$才可表示为基本信度赋值。证据源 S_1 和 S_2 之间的冲突度(即冲突因子)可表示如下：

$$k_{12}\triangleq\sum_{\substack{X,Y\in 2^\Theta\\ X\cap Y=\varnothing}} m_1(X)m_2(Y) \tag{1.5}$$

在式(1.4)中归一化因子 $1-k_{12}$ 的作用就在于它可以减弱两个信息源信息的冲突性，这与交算子的作用相一致。当 $k_{12}=1$ 时，那么组合的基本信度赋值 $m(\cdot)$(bba)就不存在了，此时就相当于证据源 S_1 和 S_2 完全冲突。若命题 $A\subset\Theta$，当 $\mathrm{Bel}_1(A)=1$，$\mathrm{Bel}_2(\overline{A})=1$ 时，就会出现上述情况。组合后基本信度赋值(bba)的核等于组合前基本信度赋值的交集，即 $\kappa(m)=\kappa(m_1)\cap\kappa(m_2)$。由于存在归一

化因子 $1-k_{12}$，Dempster 形式上只是相当于随机假设下的随机交集，这对应于合取一致原理[13]。Dempster 组合规则可以直接扩展为 N 个独立等可靠信息源间的组合，它受到广泛关注的一个重要原因就是它具有交换性和结合性[33]。在文献[5]中可以找到近年来一些关于 Dempster 组合规则和贝叶斯组合规则的争论。

1.2.3 Dempster 组合规则的替代产物

DST 能够得到信息融合群体的广泛关注，主要是因为它在处理不确定信息方面存在一个非常好的数学模型，并且它还将贝叶斯理论作为它的一个特殊情况[33]。虽然如此，但它也存在一些缺点与局限性[27]，Zadeh[50—53]、Dubois 与 Prade[12]曾对此展开讨论，Voorbraak[43]也对此作了补充。这些不足主要表现在 Dempster 组合规则缺少完整的理论证明，更主要的是无法利用这个规则处理冲突非常高的情况（也就是 k_{12} 趋向于 1 的情况）。事实上，当鉴别命题为无穷时，存在下面的情况，即 Dempster 组合规则只能对少数命题赋值（其他关于无穷鉴别命题的反例将在第 5 章讨论），或者不管何时一个证据源将它的信度赋值完全给了一个命题或者否命题[29]，它的“ignorance”区间将完全消失。而且，随着集合势的增加，其集命题将会获得不成比例的信度赋值[43]。这些缺点在过去的 20 年中经过了激烈的争辩与讨论。

- 通过几种手段来解释（最好是证明）Dempster 组合规则的应用情况，以及当冲突很高时，如何来组合信息源。这些手段主要是基于从命题逻辑域到形式命题逻辑域[31,32,28]等概率函数域的扩展，或者基于提示模型（Hint Model）和概率争论体系[1—2,14—20]。关于 DST 解释的讨论请参见文献[38,40,42]，以及本书第 12 章（通过一些简单而又有趣的事例[28]对贝叶斯推理、DS 推理与 DSm 推理进行分析比较）。
- 提出新的组合规则。DSmT 就属于这种情况，因为它是在 DST 的基础上建立的，并且提出了新的组合规则。作者将在后续几节中具体介绍这些规则。

为了克服 Dempster 组合规则的局限性，前人已经提出了一些有趣且有用的组合规则。这一节列举了几种主要的规则，目前（这些）提出的大多数组合规则已经被统一在 Lefevre、Colot 和 Vanoorenberghe 提出的广义框架下[25]。这些组合规则的提出，尽管遭到 Haenni 的强烈反对[19]，但是 Lefevre 却给出了正确的证明[26]，明确指出 Shafer 模型下的组合规则能够演化出无穷多个组合规则，这主要依赖于冲突因子 k_{12} 的转换形式。关于 Dempster 组合规则的证明，在随后的 20 世纪 90 年代由 Philippe Smets[37,24,41,42]根据 TBM 模型给出了 DST 的非概率解释（参见文献[3,4]相关讨论）。其中，TBM 模型与 Cheng 和 Kashyap 先前的著作[6]存在很大的联系。

下面是文献中提到一些基于两个独立证据源的最常用的组合规则①，它们都是在 DST 框架下对 Dempster 组合规则的改进来克服 DST 的局限性。除非特别说明，这里的证据源都是等可靠的。

- 析取规则[11,13,39]：这个规则是由 Dubois 和 Prade 在 1986 年提出的，满足交换律和结合律。这里引入一个下标∪，在第 9 章有更详细的介绍。对于 $\forall A \in 2^\Theta$，组合后的信度赋值 $m_\cup(\cdot)$ 可表示为如下形式：

$$\begin{cases} m_\cup(\varnothing) = 0 \\ m_\cup(A) = \sum\limits_{\substack{X,Y \in 2^\Theta \\ X \cap Y = A}} m_1(X) m_2(Y) \quad (\forall (A \neq \varnothing) \in 2^\Theta) \end{cases} \tag{1.6}$$

$m_\cup$ 所给出的信度函数的核等于 $\mathrm{Bel}_1(\cdot)$ 与 $\mathrm{Bel}_2(\cdot)$ 核的并集。这个规则反映了析取一致原理，它表明了当得知这两个证据源 S_1 与 S_2 其中之一是错误，而又不确定哪个是错误的时候，优先选择这个规则。

- Murphy 组合规则[27]：这里引入了一个下标 M，来表示这个满足交换律但不满足结合律的规则[46,13]。它是基本信度赋值 m_1 和 m_2 凸组合的一种特殊情况。事实上，它与基本信度赋值 m_1 和 m_2 相关的信度函数间的简单算术平均运算相一致。所以对于 $\forall A \in 2^\Theta$，组合后的信度函数 $\mathrm{Bel}_\mathrm{M}(\cdot)$ 可表示为

$$\mathrm{Bel}_\mathrm{M}(A) = \frac{1}{2}[\mathrm{Bel}_1(A) + \mathrm{Bel}_2(A)] \tag{1.7}$$

- Smets 组合规则[41,42]：此规则满足交换律与结合律，它实际上是 Dempster 组合规则的非归一化形式。它允许对空集 $\varnothing$ 赋予正的信度赋值，并且取消了 Dempster 规则中的分母项 $1-k_{12}$。Smets 关于两个独立（等可靠）证据源的组合规则（这里用下标 S 表示）可表示如下：

$$\begin{cases} m_\mathrm{S}(\varnothing) = k_{12} = \sum\limits_{\substack{X,Y \in 2^\Theta \\ X \cap Y = \varnothing}} m_1(X) m_2(Y) \\ m_\mathrm{S}(A) = \sum\limits_{\substack{X,Y \in 2^\Theta \\ X \cap Y = A}} m_1(X) m_2(Y) \quad (\forall (A \neq \varnothing) \in 2^\Theta) \end{cases} \tag{1.8}$$

- Yager 组合规则[45,46,47]：Yager 指出当信息源存在冲突时，组合结果并不可靠，所以就应将 k_{12} 完全作为一个折扣量加到未知项上。这个组合规则满足交换律但不满足结合律，可以通过下标 Y 表示成如下形式②：

---

① 本文并没有介绍 MinC 规则，在第 10 章有对它更详细的介绍。

② 式中 Θ 代表鉴别框中的完全未知项 $\theta_1 \cup \theta_2 \cup \cdots \cup \theta_n$，详见文献[33]。

$$
\begin{cases}
m_Y(\varnothing) = 0 \\
m_Y(A) = \sum\limits_{\substack{X,Y \in 2^\Theta \\ X \cap Y = A}} m_1(X) m_2(Y) \quad (\forall A \in 2^\Theta, A \neq \varnothing, A \neq \Theta) \\
m_Y(\Theta) = m_1(\Theta) m_2(\Theta) + \sum\limits_{\substack{X,Y \in 2^\Theta \\ X \cap Y = \varnothing}} m_1(X) m_2(Y) \quad (A = \Theta)
\end{cases}
\tag{1.9}
$$

- Dubois-Prade 组合规则[13]：这个规则指出，当两个证据源不存在冲突时，它们都是可靠的；但当存在冲突时，只有一个是可靠的。所以对于某一个观测值，当一个人观测到它在集合 X 中，而另一个人观测到它在 Y 中时，若 $X \cap Y \neq \varnothing$，真值便存在于 $X \cap Y$ 中。反之，当 $X \cap Y = \varnothing$ 时，真值便存在于 $X \cup Y$ 中。Dubois 和 Prade 混合组合规则满足交换律但是不满足结合律，它在组合结果的精确度和可靠性之间进行了合理的平衡，可以通过下标 DP 表示成如下形式①：

$$
\begin{cases}
m_{DP}(\varnothing) = 0 \\
m_{DP}(A) = \sum\limits_{\substack{X,Y \in 2^\Theta \\ X \cap Y = A \\ X \cap Y \neq \varnothing}} m_1(X) m_2(Y) + \sum\limits_{\substack{X,Y \in 2^\Theta \\ X \cup Y = A \\ X \cap Y = \varnothing}} m_1(X) m_2(Y) \quad (\forall A \in 2^\Theta, A \neq \varnothing)
\end{cases}
\tag{1.10}
$$

符合合取一致原理的组合规则统一形式

本节介绍由 Lefevre、Colot 和 Vanoorenberghe 在文献[25]中提出的统一框架，它将符合合取一致原理且已经存在的组合规则（或即将提出的组合规则），统统以相同的组合机制嵌入这个框架中。下面介绍统一组合规则工作的两个步骤。

- 第一步：计算基于合取一致原理的总的冲突因子，即

$$
k_{12} \triangleq \sum_{\substack{X,Y \in 2^\Theta \\ X \cap Y = \varnothing}} m_1(X) m_2(Y) \tag{1.11}
$$

- 第二步：根据给定系数 $w_m(A) \in [0,1]$ $\left(\text{其中} \sum\limits_{A \subseteq \Theta} w_m(A) = 1\right)$，对冲突因子在 $(A \neq \varnothing) \subseteq \Theta$ 上进行再分配（凸组合），具体形式如下：

$$
\begin{cases}
m(\varnothing) = w_m(\varnothing) k_{12} \\
m(A) = \left[\sum\limits_{\substack{X,Y \in 2^\Theta \\ X \cap Y = A}} m_1(X) m_2(Y)\right] + w_m(A) k_{12} \quad (\forall (A \neq \varnothing) \in 2^\Theta)
\end{cases}
\tag{1.12}
$$

通过对系数 $w_m(\cdot)$ 选择不同的值就能得到不同的组合规则。事实上，这个重要的通用组合形式还表明可能存在无穷多种组合规则。人们已经证明了其中的一

① 这里对文献[13]第 257 页中的公式(56)的打印错误进行修正。

些规则，对于其他的一些规则，人们主要针对它们是否具有保持交换性和结合性的能力进行争论。在文献[25]中很容易找到这些现存规则的组合过程，它们都是基于 Shafer 模型并且符合合取一致原理的，如下例所示：

- Dempster 组合规则(1.4)能够通过对式(1.12)进行如下的选择而获得，对于$\forall A\neq\varnothing$，有

$$w_m(\varnothing)=0 \quad 且 \quad w_m(A)=\frac{1}{1-k_{12}}\sum_{\substack{X,Y\in 2^\Theta\\ X\cap Y=A}} m_1(X)m_2(Y) \tag{1.13}$$

- Yager 组合规则(1.9)可以通过如下方式获得：

$$w_m(\Theta)=1 \quad 且 \quad w_m(A\neq\Theta)=0 \tag{1.14}$$

- Smets 组合规则(1.8)可以通过如下方式获得：

$$w_m(\varnothing)=1 \quad 且 \quad w_m(A\neq\varnothing)=0 \tag{1.15}$$

- Dubois-Prade 组合规则(1.10)可以通过如下方式获得：

$$\forall A\subseteq\mathscr{P}, w_m(A)=\frac{1}{1-k_{12}}\sum_{\substack{A_1,A_2\mid A_1\cup A_2=A\\ A_1\cap A_2=\varnothing}} m^+ \tag{1.16}$$

式中：$m^*\triangleq m_1(A_1)m_2(A_2)$，相当于赋予 $A_1\cup A_2$ 的部分冲突因子；$\mathscr{P}$是幂集 2^Θ 的所有子集，冲突因子在其上重新分配。$\mathscr{P}$的定义如下[25]：

$$\mathscr{P}\triangleq\{A\in 2^\Theta \mid \exists A_1\in\kappa(m_1), \exists A_2\in\kappa(m_2),$$
$$A_1\cup A_2=A \text{ and } A_1\cap A_2=\varnothing\} \tag{1.17}$$

在 Dubois-Prade 组合规则中，权重因子系数 $w_m(A)$的计算不仅取决于相关的命题，还和引起部分冲突的信度质量函数有关，因而，引起冲突的信度质量函数允许计算那些必须要赋给 $\mathscr{P}$[25]子集的冲突信度质量部分。当 $\mathscr{P}=\{\Theta\}$时，Yager 组合规则和 Dubois-Prade 组合规则具有相同的形式。

1.2.4 证据源的折扣理论

在文献中提到的大部分组合规则都是基于证据源具有等可靠性这一假设。如果已知证据源不是等可靠的，并且其可靠性是明确给出的(或者可能的情况下[42,25]至少能够被完全估计出)，那么根据 Shafer 在文献[33]的第 11 章中提出的方法，对每一个不可靠的证据源依照其可靠性因子进行比例折扣是可行的。下面提出了两种常用的证据源折扣方法。

- 经典的折扣方法[33,13,42,25]。

假设一个证据源的可靠性/信度①因子 $\alpha\in[0,1]$是已知的，那么通过对不可靠

---

① 这里我们习惯用术语信度而不是可靠度来表示，因为可靠度的概念和实验的重复性有很大的联系，这些实验具有随机的结果，它们在一些信息融合的应用中(参见文献[33]第 23 页由 Shafer 给出的例子 1.6“天狼星上的生活”)并不总是合理的。

信息源的基本信度赋值 bba$m(\cdot)$进行折扣，就可以获得一个新的(折扣过的)bba$m'(\cdot)$，形式为

$$\begin{cases} m'(A) = \alpha \cdot m(A), \forall A \in 2^{\Theta}, A \neq \Theta \\ m'(\Theta) = (1-\alpha) + \alpha \cdot m(\Theta) \end{cases} \tag{1.18}$$

$\alpha=1$ 意味着证据源具有完全的可靠性，而 $\alpha=0$ 则相当于完全质疑证据源的可靠性。

- 信息源凸组合的折扣方法[13]。

这种折扣方法是基于信息源的凸组合，并且假设其相对可靠性是已知的。这里考虑两个独立非可靠性的证据源，它们的可靠度分别是 α_1 和 α_2，并且 $\alpha_1,\alpha_2 \in [0,1]$，那么折扣后的组合结果具有如下形式，即对于 $\forall A \in 2^{\Theta}$，有

$$\mathrm{Bel}(A) = \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}\mathrm{Bel}_1(A) + \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\mathrm{Bel}_2(A) \tag{1.19}$$

当信息源是高度冲突并且已经被充分折扣时，Shafer 在文献[33]第 253 页指出：n 个等可靠的证据源按照 Dempster 组合规则组合，和具有 n 个相同的可靠因子 $\alpha_i=1/n$ 的信息源的凸组合非常相似。关于折扣方法更进一步的介绍参见文献[13]。

这里作者要特别指出的是，不能将这种折扣方法当成是处理那些由于非直观的或错误的结果所引起的融合问题(已经产生)的一种特殊工具，它应该是处理事先已经明确得知其信息源质量的方法。本书以后所讨论的信息源，除非明确地指出，都假设其是先验等可靠的。虽然对于不可靠信息源的融合问题在实际应用中非常重要，但是本书不予以讨论，因为其折扣方法的选择是由系统设计者决定的(它也与实际问题及信息源的类型密切相关)。处理不可靠信息源融合的基本原理等同于用命题集的新基本信度赋值，因此本书很少涉及。

1.3 DSmT 的理论基础

1.3.1 自由和混合 DSm 模型概念

DSmT 的发展主要是为了克服 DST 内在的局限性，这主要表现在以下三个方面：对于 Shafer 模型(鉴别框 Θ 定义为由有限个相互排斥并且完备的假设 $\theta_i(i=1,\cdots,n)$组成)的赞同；对于去除中间命题原理(任何属于幂集 Θ 的命题的补集仍然包含在幂集 Θ 中)的赞同；对于将 Dempster 组合规则(包含归一化)作为独立证据源的组合框架的赞同。作者认为应该去掉 DST 的这三个条件，并且提出新的证据源组合规则的数学方法是可行的。

DSmT 的基本理论就是驳斥去除中间原理和 Shafer 模型，因为对于大部分的

信息融合问题，命题之间本质上是含糊不清、不精确的，所以在实际应用中根本不可能对其精确描述，对于相互排斥的命题 θ_i 并不能正确地识别和精确划分。在要讨论的问题中包括很多用自然语言描述的模糊、连续和相对的概念，它们并没有绝对的定义，如高/矮、高兴/痛苦，冷/热等诸如此类的似是而非和自相矛盾的概念。在作者介绍 DSmT 之前，先来介绍一下自由 DSm 模型，记为 $\mathcal{M}^f(\Theta)$，此模型将 Θ 看作是一个只包含 n 个完备命题 $\theta_i(i=1,\cdots,n)$ 的框架，命题彼此间可能存在交叉。这个模型被称为自由的原因就是在这些命题上并没有其他的假设约束条件，但根据本章前面所介绍的封闭性原理，其弱的完备性约束也总是令人满意的。在自由 DSm 模型中，不存在其他约束，且其自由 DSm 组合规则具有交换性和结合性（相当于定义在自由 Dedekind 格子模型基础上的合取一致原理——参见下一小节）。

基于所考虑融合问题中命题的内在本质，可能会出现自由模型不能处理的情况，这是因为鉴别框 Θ 的某些子集可能含有真正排斥的命题，或者在一个特定的时刻（特别是当处理动态融合问题时，其框架 Θ 随着可用信息的变化是时变的）某些命题不存在。作者将这些完全约束添加到自由 DSm 模型 $\mathcal{M}^f(\Theta)$ 中，以便更好地逼近现实情况，这样就构造了一种混合 DSm 模型 $\mathcal{M}(\Theta)$，利用该模型进行组合才有效。对于用 $\mathcal{M}^0(\Theta)$ 表示的 Shafer 模型，相当于包含所有可能排斥约束的一种特殊的混合 DSm 模型。DST 是随着解决 $\mathcal{M}^0(\Theta)$ 这种模型而逐步发展起来的，而 DSmT 是在解决任意类型的混合模型（包括 Shafer 模型和自由 DSm 模型）的过程中不断完善的，它能够在精确有效地融合不确定、不精确和潜在的高冲突证据源的同时，保持其可能的动态性能。因此，DSmT 的建立，不同于那些已经存在的处理不确定、不精确和高度冲突性的理论方法。为了全面地考虑问题，DSmT 提出了一种在广义框架内处理信息融合问题的新的有效方法。关于混合 DSm 模型和其组合规则的详细介绍，请参见本书第 4 章。

DSmT 也驳斥这样一种观点，即证据源对同一鉴别框 Θ 的命题给予绝对解释的信度赋值。证据源间的冲突不只是由于证据源可能存在不可靠性，还可能是由框架 Θ 的不同和相对的解释引起的，例如对于一个人来说是好的事情，对于另外一个人来说则可能不好。证据源的信度分配不可避免地会出现某些主观性，如若不然，就意味着所有的证据源都具有客观普遍的解释，而这在现实中是几乎不可能发生的，除非它们的基本信度赋值是基于客观的概率函数。对于后面一种情况，概率论能对信息进行有效地处理，而 DST 和 DSmT 则意义不大。如果跳出对于概率论背景的争论，而转向 bba 的构建，可以说，在大多数情况下，融合框架下命题的信度都是由证据源自身的知识和经验决定的，而与概率空间的绝对真值毫无关系。

对于所考虑的某些融合问题，根据不同信息源产生的证据，并不能获取对其框架 Θ 中命题的完全一致的解释，DSmT 同样可以处理。DSmT 虽然不是来源于概率论，在某种意义下，却可以看成贝叶斯理论和 DST 的扩展。令 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2\}$ 作为

由两个命题组成的最简单的框架结构，则有如下结论。

- 概率理论在相互排斥和完备假设的条件下，其基本概率赋值(bpa)$m(\cdot)\in[0,1]$所满足的条件如下：

$$m(\theta_1)+m(\theta_2)=1$$

- DST 在相互排斥和完备的假设条件下，其基本信度赋值 $m(\cdot)\in[0,1]$所满足的条件如下：

$$m(\theta_1)+m(\theta_2)+m(\theta_1\cup\theta_2)=1$$

- DSmT 仅在完备的假设的条件下(也就是自由 DSm 模型)，其广义基本信度赋值 $m(\cdot)\in[0,1]$所满足的条件如下：

$$m(\theta_1)+m(\theta_2)+m(\theta_1\cup\theta_2)+m(\theta_1\cap\theta_2)=1$$

1.3.2 超幂集 D^Θ 的概念

超幂集的概念(详细的事例和介绍请参见第 2 章和第 3 章)是 DSmT 基础之一。令 $\Theta=\{\theta_1,\cdots,\theta_n\}$是一个包含 n 个完备命题①的有限集合(也称为框架)。Dedekind 格子模型，在 DSmT 的框架下也称为超幂集 D^Θ，它定义为由 Θ 中命题，以及通过$\cup$和$\cap$的运算②组成的所有的复合命题的集合，形式如下：

(1) $\varnothing,\theta_1\cdots,\theta_n\in D^\Theta$。

(2) 如果 $A,B\in D^\Theta$，那么 $A\cap B\in D^\Theta$，$A\cup B\in D^\Theta$。

(3) 除了(1)和(2)中包含的命题，再没有其他命题属于 D^Θ。

D^Θ 的对偶集(通过交换表达式中的$\cup$和$\cap$来得到)是它自身。D^Θ 的命题也存在自对偶(和它自身对偶)的情况，例如下面的例子，当 $n=3$ 时的 α_8 就是这种情况。当 Θ 的势等于 n 时，即$|\Theta|=n$，D^Θ 的势为 2^{2^n} 的大多数。超幂集 D^Θ 的产生和著名的列举单调布尔函数集合的 Dedekind 问题[8,7]密切相关，其产生过程将在第 2 章中进行介绍。由于对于任意有限集合 Θ，$|D^\Theta|\geqslant|2^\Theta|$，所以作者称 D^Θ 为集合 Θ 的超幂集。

第一个超幂集 D^Θ 的例子如下。

- 对于退化的情况($n=0$)，$\Theta=\{\}$，则 $D^\Theta=\{\alpha_0\triangleq\varnothing\}$且$|D^\Theta|=1$。
- 当 $\Theta=\{\theta_1\}$时，则 $D^\Theta=\{\alpha_0\triangleq\varnothing,\alpha_1\triangleq\theta_1\}$且$|D^\Theta|=2$。
- 当 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2\}$时，则 $D^\Theta=\{\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_4\}$且$|D^\Theta|=5$，其中
  $\alpha_0\triangleq\varnothing,\alpha_1\triangleq\theta_1\cap\theta_2,\alpha_2\triangleq\theta_1,\alpha_3\triangleq\theta_2$ 且 $\alpha_4\triangleq\theta_1\cup\theta_2$。
- 当 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}$时，则 $D^\Theta=\{\alpha_0,\alpha_1\cdots,\alpha_{18}\}$且$|D^\Theta|=19$，其中

---

① 这里并没有假设命题 θ_i 必须具有相互排斥性，除了 θ_i 的完备性，并没有其他的限制。

② 对 Θ 中命题通过$\cup$和$\cap$操作得到 D^Θ。

$\alpha_0 \triangleq \varnothing$

$\alpha_1 \triangleq \theta_1 \cap \theta_2 \cap \theta_3$

$\alpha_2 \triangleq \theta_1 \cap \theta_2$

$\alpha_3 \triangleq \theta_1 \cap \theta_3$

$\alpha_4 \triangleq \theta_2 \cap \theta_3$

$\alpha_5 \triangleq (\theta_1 \cup \theta_2) \cap \theta_3$

$\alpha_6 \triangleq (\theta_1 \cup \theta_3) \cap \theta_2$

$\alpha_7 \triangleq (\theta_2 \cup \theta_3) \cap \theta_1$

$\alpha_8 \triangleq (\theta_1 \cap \theta_2) \cup (\theta_1 \cap \theta_3) \cup (\theta_2 \cap \theta_3)$

$\alpha_9 \triangleq \theta_1$

$\alpha_{10} \triangleq \theta_2$

$\alpha_{11} \triangleq \theta_3$

$\alpha_{12} \triangleq (\theta_1 \cap \theta_2) \cup \theta_3$

$\alpha_{13} \triangleq (\theta_1 \cap \theta_3) \cup \theta_2$

$\alpha_{14} \triangleq (\theta_2 \cap \theta_3) \cup \theta_1$

$\alpha_{15} \triangleq \theta_1 \cup \theta_2$

$\alpha_{16} \triangleq \theta_1 \cup \theta_3$

$\alpha_{17} \triangleq \theta_2 \cup \theta_3$

$\alpha_{18} \triangleq \theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3$

在这里注意到任意命题 A(除了$\varnothing$和总的未知集 $I_t \triangleq \theta_1 \cup \theta_2 \cup \cdots \cup \theta_n$ 之外)的补集 $\overline{A}$ 都不在 DSmT 的超幂集空间中,这是因为 DSmT 对去除中间命题原理的驳斥。换句话说,就是 $\forall A \in D^\Theta$,且 $A \neq \varnothing$ 或者 $A \neq I_t$,则 $\overline{A} \notin D^\Theta$。因此,$(D^\Theta, \cap, \cup)$并不能定义一个布尔代数。当 $n \geqslant 1$ 时,超幂集 D^Θ 的势符合 Dedekind 数字序列,即 1,2,5,19,167,7580,7828353,…(详见第 2 章)。

框架 Θ 中的命题 $\theta_i(i=1,\cdots,n)$组成了表述融合问题所有特征的有限命题集合。其超幂集空间 D^Θ 组成了自由 DSm 模型 $\mathscr{M}^f(\Theta)$,允许(包含)具有连续和相对本质属性的模糊命题(因为绝对事实的不可达性,所以这种概念的绝对解释不能精确地细分)包含其中。

对于那些包含离散概念的特殊融合问题,命题 θ_i 之间具有真正的相互排斥性,在这种情况下,就应该将所有的排斥约束添加到原来的模型中,这样才能揭示融合问题的本质特征,从而更好地逼近现实情况。按照以上方法,就自然而然地使得超幂集 D^Θ 变成经典地幂集 2^Θ,这样就组成了最大约束的混合 DSm 模型,记为 $\mathscr{M}^0(\Theta)$,它符合 Shafer 模型。这里引入一个二维的例子来具体说明以上问题,令 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2\}$,则 $D^\Theta=\{\varnothing,\theta_1\cap\theta_2,\theta_1,\theta_2,\theta_1\cup\theta_2\}$,现在假设 θ_1 与 θ_2 相互排斥(即 Shafer 模型 $\mathscr{M}^0$),那么由于 $\theta_1\cap\theta_2 \overset{\mathscr{M}^0}{=} \varnothing$,可以得出

$$D^\Theta = \{\varnothing, \theta_1 \cap \theta_2 \overset{\mathscr{M}^0}{=} \varnothing, \theta_1, \theta_2, \theta_1 \cup \theta_2\} = \{\varnothing, \theta_1, \theta_2, \theta_1 \cup \theta_2\} \equiv 2^\Theta$$

除了基于自由 DSm 模型和基于 Shafer 模型的融合问题,还有一类非常广泛的混合融合问题,即在它的框架 Θ 中,既包括模糊连续的命题也包括离散的命题。在这种(混合的)问题中,必须考虑那些排斥约束以及可能的非存在性约束(特别是当处理动态[1]融合问题时)。对于这样的问题需要找到一种合适的混合 DSm 模型 $\mathscr{M}(\Theta)$来处理,即 $\mathscr{M}(\Theta)=\mathscr{M}^f(\Theta)$且 $\mathscr{M}(\Theta)\neq\mathscr{M}^0(\Theta)$,详细的例子请参见第 4 章。

---

① 例如当框架 Θ 是时变的时候。

1.3.3 广义信度函数

在一个广义的框架 Θ 下，定义一组映射 $m(\cdot):D^{\Theta}\to[0,1]$，它与证据源 S 本身是相关的，具体情况如下：

$$m(\varnothing)=0 \text{ 和 } \sum_{A\in D^{\Theta}} m(A)=1 \tag{1.20}$$

式中：质量 $m(A)$ 称为 A 的广义基本信度赋值/质量(gbba)。

广义信度函数和似真函数的定义方式与 DST 中函数的定义方式几乎相同，即

$$\mathrm{Bel}(A)=\sum_{\substack{B\subseteq A\\ B\in D^{\Theta}}} m(B) \tag{1.21}$$

$$\mathrm{Pl}(A)=\sum_{\substack{B\cap A\neq\varnothing\\ B\in D^{\Theta}}} m(B) \tag{1.22}$$

对于某些融合问题，当超幂集 D^{Θ} 转变为幂集 2^{Θ}，即 Shafer 模型发生作用时，上述定义和 DST 框架下信度函数的定义就非常一致了。作者仍然可以得到关系式 $\forall A\in D^{\Theta}$，$\mathrm{Bel}(A)\leqslant\mathrm{Pl}(A)$。这里当工作在自由 DSm 模型 $\mathscr{M}^f(\theta)$ 时，通常情况下总可以得到 $\mathrm{Pl}(A)=1\ \forall A\neq\varnothing\in D^{\Theta}$。

1.3.4 经典 DSm 组合规则

当用自由 DSm 模型 $\mathscr{M}^f(\Theta)$ 解决所讨论的融合问题时，两个独立证据源 S_1 和 S_2 的经典 DSm 组合规则 $m_{\mathscr{M}^f(\Theta)}\equiv m(\cdot)\triangleq[m_1\oplus m_2](\cdot)$ 符合证据源的合取一致原理，其中这两个证据源具有相同的鉴别框 Θ，它们的信度函数 $\mathrm{Bel}_1(\cdot)$ 与 $\mathrm{Bel}_2(\cdot)$ 是和它们的 gbba$m_1(\cdot)$ 与 $m_2(\cdot)$ 密切相关的，具体表示形式如下[9,10]：

$$\forall C\in D^{\Theta},m_{\mathscr{M}^f}(\Theta)(C)\equiv m(C)=\sum_{\substack{A,B\in D^{\Theta}\\ A\cap B=C}} m_1(A)m_2(B) \tag{1.23}$$

由于 D^{Θ} 在 $\cup$ 和 $\cap$ 的运算下是封闭的，所以这个新的组合规则能够保证 $m(\cdot)$ 是一个合适的广义信度赋值，即 $m(\cdot):D^{\Theta}\to[0,1]$。此规则满足交换律和结合律，并且常常用于处理包含模糊概念证据源的融合问题。此外，也很容易直接地推广到 $k>2$ 个证据源间的组合(具体见下一节 $S_1(\cdot)$ 表达式，或者详见第 4 章)。

经典的 DSm 组合规则在计算和存储方面是非常繁琐的，这是因为当 Θ 的势增加时，D^{Θ} 中的命题数目会变得非常多。然而这种说法只是在核(焦元的 gbba 的所有命题集合)$K_1(m_1)$ 和 $K_2(m_2)$ 与 D^{Θ} 的数目完全一致时才成立，也就是说，对于 $A\neq\varnothing\in D^{\Theta}$，都有 $m_1(A)>0$，$m_2(A)>0$。幸运的是，在大多数实际应用中，$K_1(m_1)$ 和 $K_2(m_2)$ 的个数一般比 $|D^{\Theta}|$ 要少。这是因为在通常情况下，证据源只是将其基本信度赋值分配给超幂集的一个子集，这使得经典 DSm 规则(1.23)的应用

非常方便。

DSm 规则事实上是很容易进行的。首先使 $K_1(m_1)$ 的每个焦元依次和 $K_2(m_2)$ 的各个焦元相乘，然后按图 1.1 所示进行集合间的代数运算，将等价命题的信度赋值累计在一起。

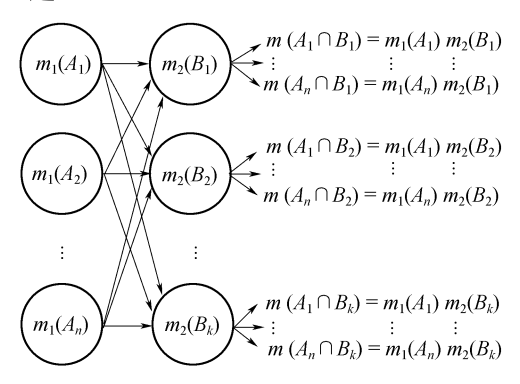


图 1.1　经典 DSm 规则在 $\mathscr{M}^f(\Theta)$ 上的描述

图 1.1 给出了 DSm 组合规则的网络体系结构。网络的第一层包含所有的焦元 $A_i(i=1,\cdots,n)$ 的广义基本信度赋值 $m_1(\cdot)$，第二层包含所有的焦元 $B_i(i=1,\cdots,n)$ 的广义基本信度赋值 $m_2(\cdot)$。第二层的每个节点与第一层的每个节点相连接，输出层（右边的部分）包含了所有可能交集 $A_i\cap B_j(i=1,\cdots,n;j=1,\cdots,n)$ 的基本信度赋值。经典 DSm 规则的最后一步（没有在图中表示出来）就是对输出层的合并，即将组合后具有相同焦元的信度赋值进行求和（例如若 $X=A_2\cap B_3=A_4\cap B_5$，则 $m(X)=m(A_2\cap B_3)+m(A_4\cap B_5)$）。如果存在第三个证据源提供了一个新的 gbba $m_3(\cdot)$，就应将输出层和与 $m_3(\cdot)$ 相联系的那一层进行组合，依此类推。由于经典的 DSm 组合规则满足交换律和结合律，因此可以任意设计 DSm 网络的层次顺序。

1.3.5　混合 DSm 组合规则

当处理某些需要考虑已知完全约束的融合问题时，自由 DSm 模型 $\mathscr{M}^f(\Theta)$ 就不能发挥作用，必须要找到一个合适的混合 DSm 模型 $\mathscr{M}(\Theta)\neq\mathscr{M}^f(\Theta)$。这样，这个基于混合 DSm 模型 $\mathscr{M}(\Theta)$ 的混合 DSm 组合规则，在处理 $k\geqslant 2$ 个独立信息源的融合问题时定义如下：对于所有的 $A\in D^\Theta$，有（详见第 4 章）

$$m_{M(\Theta)}(A)\equiv\varnothing(A)[S_1(A)+S_2(A)+S_3(A)] \tag{1.24}$$

式中：$\varnothing(A)$ 是集合 A 的特征非空函数，也就是说，如果 $A\notin\varnothing$，那么 $\varnothing(A)=1$，否则 $\varnothing(A)=0$，这里 $\varnothing\triangleq\{\varnothing_{\mathscr{M}},\varnothing\}$，$\varnothing_{\mathscr{M}}$，是指 D^Θ 中由于模型 $\mathscr{M}$ 中的约束条件而强制转化为空集的命题，而 $\varnothing$ 是指经典的/通用的空集；$S_1(A)(\equiv m_{\mathscr{M}^{f(\theta)}}(A))$、

$S_2(A)$、$S_3(A)$的定义为

$$S_1(A) \triangleq \sum_{\substack{X_1,X_2,\cdots,X_k \in D^\Theta \\ (X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_k)=A}} \prod_{i=1}^{k} m_i(X_i) \tag{1.25}$$

$$S_2(A) \triangleq \sum_{\substack{X_1,X_2,\cdots,X_k \in \varnothing \\ [u=A] \vee [(u \in \varnothing) \wedge (A=I_t)]}} \prod_{i=1}^{k} m_i(X_i) \tag{1.26}$$

$$S_3(A) \triangleq \sum_{\substack{X_1,X_2,\cdots,X_k \in D^\Theta \\ (X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_k)=A \\ (X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_k) \in \varnothing}} \prod_{i=1}^{k} m_i(X_i) \tag{1.27}$$

式中：$u \triangleq u(X_1) \cup u(X_2) \cup \cdots \cup u(X_k)$，其中 $u(X)$是组成 X 的所有命题θ_i 的并集，$I_t \triangleq \theta_1 \cup \theta_2 \cup \cdots \cup \theta_n$ 代表总的未知集。$S_1(A)$相当于基于自由 DSm 模型 $\mathscr{M}^f(\Theta)$的 k 个独立证据源的经典 DSm 组合规则；$S_2(A)$代表将所有的相对和绝对空集的信度质量传递给总的或相对的未知集；$S_3(A)$是将相对空集的信度质量之和传递给非空集。

混合 DSm 组合规则是经典 DSm 组合规则的广义化，却与 Dempster 规则并不等价。当处理具有精确的广义（或者最终经典的）基本信度函数的问题时，此规则可以用于任何模型（自由 DSm 模型，Shafer 模型或者任何其他的混合模型）。处理不精确的广义基本信度函数时，需要对此组合规则进行扩展，这在 DSmT 的介绍中并没有涉及，详见第 6 章。

1.3.6　鉴别框架的细分

本节对细分的概念进行解释，并介绍其在 DSmT 和 DST 上的应用结果。一个具有相互重叠的命题集合 $\Theta=\{\theta_i, i=1,\cdots,n\}$的细分是指，找到一个新的命题集合 $\Theta=\{\theta'_i, i=1,\cdots,n', n'>n\}$，其中的命题 θ'_i 必须是相互排斥的，那么有 $\bigcup_{i=1}^{n} \theta_i \equiv \bigcup_{i=1}^{n'} \theta'_i$ 成立。DST 是通过鉴别框（包含完备和相互排斥性命题的有限集合）的概念提出的，它假设所描述的融合问题的命题细分是存在的，并且是可达到的；而 DSmT 在开始时就没有作这样的假设。对于我们来说，细分过程的存在性假设是一个非常严格的约束，它完全限制了 DST 的应用领域，这是因为所讨论的大多数问题都是由自然语言描述的含糊的/连续的和相对的概念组成的框架，不可能描述得非常清晰。在 DSmT 中，这样非常严格约束的假设不是最基本的，显然是被放宽了。

这里用一个非常简单而又有意义的例子来说明这种情况，定义一个框架，令 $\Theta=\{\theta_1=\text{Small}, \theta_2=\text{Tall}\}$。然而矮（$\theta_1$）和高（$\theta_2$）的概念并不能完全的解释清楚，这是因为这些概念的参考点是任意选择的，两个独立证据源（人类专家）往往会对 θ_1 和 θ_2 给予不同的解释，只是因为它们常常没有相同的参考点。θ_1 和 θ_2 只是代表相对、模糊的概念，它们之间的过渡是连续的。

这里举一个数字实例，仍然考虑框架 $\Theta=\{\theta_1 \triangleq \text{Small}, \theta_2 \triangleq \text{Tall}\}$，令其代表人的高度，两个独立观察者提供的信度质量如下：

$$m_1(\theta_1)=0.4 \quad m_1(\theta_2)=0.5 \quad m_1(\theta_1 \cup \theta_2)=0.1$$
$$m_2(\theta_1)=0.6 \quad m_2(\theta_2)=0.2 \quad m_2(\theta_1 \cup \theta_2)=0.2$$

如果根据前面的说明认为 θ_1 和 θ_2 不能被精确地描述，那么经典 DSm 规则（这里用下标 DSmc 表示）在融合空间上的组合结果为：

$$m_{\text{DSmc}}(\varnothing)=0 \quad m_{\text{DSmc}}(\theta_1)=0.38 \quad m_{\text{DSmc}}(\theta_2)=0.22$$
$$m_{\text{DSmc}}(\theta_1 \cup \theta_2)=0.02 \quad m_{\text{DSmc}}(\theta_1 \cap \theta_2)=0.38$$

在 $m_1(\cdot)$和 $m_2(\cdot)$的信息与上述情况相同的情形下，再考虑另外一种情况。为了将前述的结果与通过 Dempster 组合规则得到的结果相比较，这里假设框架命题的细分是可行的（尽管这样毫无意义），则其细分的鉴别框为 $\Theta_{\text{ref}} \triangleq \{\theta'_1=\text{Small}', \theta'_2 \triangleq \text{Medium}, \theta'_3=\text{Tall}'\}$，其中 θ'_1、θ'_2 和 θ'_3 对应于一些理论上相互排斥的命题，形式为 $\theta_1=\theta'_1 \cup \theta'_2$、$\theta_2=\theta'_2 \cup \theta'_3$ 和 $\theta_1 \cap \theta_2=\theta'_2$，这里的 Small′与 Tall′对应于一个比原来的框架中更清晰的概念——矮和高。因为作者没有改变原有的可用信息（也即拥有的全部信息），那么初始的 bba $m_1(\cdot)$和 $m_2(\cdot)$表示成理论上细分幂集 $2^{\Theta_{\text{ref}}}$ 下的信度赋值为

$$m'_1(\theta'_1 \cup \theta'_2)=0.4 \quad m'_1(\theta'_2 \cup \theta'_3)=0.5 \quad m'_1(\theta'_1 \cup \theta'_2 \cup \theta'_3)=0.1$$
$$m'_2(\theta'_1 \cup \theta'_2)=0.6 \quad m'_2(\theta'_2 \cup \theta'_3)=0.2 \quad m'_2(\theta'_1 \cup \theta'_2 \cup \theta'_3)=0.2$$

因为 Θ_{ref} 是一个细分的框架，所以应用 DST 模型下的 Dempster 组合规则。因为冲突项 $\theta'_1 \cap \theta'_2$，$\theta'_1 \cap \theta'_3$，$\theta'_2 \cap \theta'_3$，$\theta'_1 \cap \theta'_2 \cap \theta'_3$ 没有正的信度质量，所以冲突因子减小为 $k_{12}=0$，因而在这个细分例子下，Dempster 规则的归一化因子为 1。那么，用下标 DS 表示 Dempster 组合规则，就得到了下面的结果：

$$m_{\text{DS}}(\varnothing)=0$$
$$\begin{aligned}m_{\text{DS}}(\theta'_2)&=m'_1(\theta'_1 \cup \theta'_2)m'_2(\theta'_2 \cup \theta'_3)+m'_2(\theta'_1 \cup \theta'_2)m'_1(\theta'_2 \cup \theta'_3)\\&=0.2 \cdot 0.4+0.5 \cdot 0.6=0.38\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}m_{\text{DS}}(\theta'_1 \cup \theta'_2)&=m'_1(\theta'_1 \cup \theta'_2)m'_2(\theta'_1 \cup \theta'_2)+m'_1(\theta'_1 \cup \theta'_2 \cup \theta'_3)\\&\quad m'_2(\theta'_1 \cup \theta'_2)+m'_2(\theta'_1 \cup \theta'_2 \cup \theta'_3)m'_1(\theta'_1 \cup \theta'_2)\\&=0.4 \cdot 0.6+0.1 \cdot 0.6+0.2 \cdot 0.4=0.38\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}m_{\text{DS}}(\theta'_2 \cup \theta'_3)&=m'_1(\theta'_2 \cup \theta'_3)m'_2(\theta'_2 \cup \theta'_3)+m'_1(\theta'_1 \cup \theta'_2 \cup \theta'_3)\\&\quad m'_2(\theta'_2 \cup \theta'_3)+m'_2(\theta'_1 \cup \theta'_2 \cup \theta'_3)m'_1(\theta'_2 \cup \theta'_3)\\&=0.2 \cdot 0.5+0.1 \cdot 0.2+0.2 \cdot 0.5=0.22\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}m_{\text{DS}}(\theta'_1 \cup \theta'_2 \cup \theta'_3)&=m'_1(\theta'_1 \cup \theta'_2 \cup \theta'_3)m'_2(\theta'_1 \cup \theta'_2 \cup \theta'_3)\\&=0.1 \cdot 0.2=0.02\end{aligned}$$

由于 $\theta'_2=\theta_1\cap\theta_2$，$\theta'_1\cup\theta'_2=\theta_1$，$\theta'_2\cup\theta'_3=\theta_2$ 且 $\theta'_1\cup\theta'_2\cup\theta'_3=\theta_1\cup\theta_2$，这里可以看到 Dempster 组合规则转化为经典的 DSm 组合规则，这就意味着当问题的输入相同时，DST 模型下的细分鉴别框 Θ 并没有帮助我们得到更好的结果。事实上，在 DST 模型的 Θ_{ref} 下工作和利用 DSmT 并没有什么不同，也只是增加了问题解答的复杂性。这里注意到混合 DSm 组合规则也可以应用到 Shafer 模型的 Θ_{ref} 框架下，但仍然得到与经典 DSm 组合规则相同的结果。

如果通过让证据源直接在 Θ_{ref} 上而不是 Θ 上修改其信度赋值（假设存在这种可能性）来改变问题的输入，使得 $m'_i(\theta'_1)>0$，$m'_i(\theta'_2)>0$，$m'_i(\theta'_3)>0(i=1,2)$，那么当应用 DSmT 时是混合 DSm 规则而不是 Dempster 规则。显而易见，由于混合 DSm 规则与 Dempster 规则不等价，得到的融合结果将会不一样，除非冲突因子是 0。

1.3.7 不同框架证据源的组合

对于某些融合问题，可能会出现这样的状况：证据源在不同的框架下（而且有时可能部分地交叉）提供它们的信度赋值。这里举一个简单的例子，令两个等可靠的证据源 β_1 与 β_2 将它们的信度赋值赋予两个不同的框架 Θ_1 和 Θ_2 下的命题，框架定义如下：

$$\Theta_1=\{P\triangleq\text{Plane},H\triangleq\text{Helicopter},M\triangleq\text{Missile}\}$$
$$\Theta_2=\{S\triangleq\text{Slow motion},F\triangleq\text{Fast motion}\}$$

换句话说，与 β_1 相关联的 $m_1(\cdot)$ 定义在 D_1^Θ 或 2_1^Θ（如果应用 Shafer 模型时）上，与 β_2 相关联的 $m_2(\cdot)$ 定义在 D_2^Θ 或 2_2^Θ 上。这里要解决的问题就是如何组合 $m_1(\cdot)$ 与 $m_2(\cdot)$。

处理该问题的基本方法是，在一个全局框架[①] $\Theta=\{\Theta_1,\Theta_2\}$ 下，利用 Smets 在文献[39]提出的基于特征最小化原则的去条件化方法，修正 $m_1(\cdot)$ 与 $m_2(\cdot)$ 的基本信度赋值。如果知道框架 Θ_1 和 Θ_2 下命题的兼容性，那么优先利用 Janez 在文献[21]提出的方法。一旦确定了框架 Θ 下的符合系统本质特征的合适模型 $\mathscr{M}(\Theta)$，以及定义在 D^Θ 下修正后的 bba$m_1{}^{\text{rev}}(\cdot)$ 与 $m_2{}^{\text{rev}}(\cdot)$，那么就可以通过混合 DSm 组合规则得到融合结果。

1.4 不同组合规则的比较

1.4.1 第一个例子

利用下面这个非常简单的用数字表示的例子来比较最常用的组合规则的结

① 当 Θ_1 和 Θ_2 部分得交叉时，可以对可能多余的命题进行压缩。

果。这些例子都是基于两个独立证据源(假设是先验等可靠的),并且它们的信度赋予了三维框架 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}$ 下的命题。在这个例子中,作者假设运用 Shafer 模型,因此信度赋值 $m_1(\cdot)$ 与 $m_2(\cdot)$ 不包括内部的冲突信息。$m_1(\cdot)$ 与 $m_2(\cdot)$ 的值选择如下:

$$m_1(\theta_1)=0.1 \quad m_1(\theta_2)=0.4 \quad m_1(\theta_3)=0.2 \quad m_1(\theta_1\cup\theta_2)=0.1$$ [1]

$$m_2(\theta_1)=0.5 \quad m_2(\theta_2)=0.1 \quad m_2(\theta_3)=0.3 \quad m_2(\theta_1\cup\theta_2)=0.1$$

这些信度质量常常用信度质量矩阵 $\boldsymbol{M}$ 表示,即

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}0.1 & 0.4 & 0.2 & 0.3\\ 0.5 & 0.1 & 0.3 & 0.1\end{bmatrix} \tag{1.28}$$

矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的行下标 i 代表第 i 个证据源,列下标 j 表示命题的选择。利用上述的方法可以列举所有的证据源焦元。在这个特定的例子中,下标 $j=1$ 代表 θ_1,$j=2$ 代表 θ_2,$j=3$ 代表 θ_3,$j=4$ 代表 $\theta_1\cup\theta_2$。

假设由于融合中心收到关于 θ_3 的额外特定信息,即确定 θ_3 是空集。举一个例子,假设 θ_1、θ_2 和 θ_3 对应于在一次刑事调查中的三个嫌疑犯(潜在的凶手),$m_1(\cdot)$ 和 $m_2(\cdot)$ 相当于两个独立目击者的口供,而 θ_3 在被抓捕时向侦察刑警提供了强有力的辩解之辞。这种情况就相当于建立一个包含给定约束 $\theta_3\overset{\mathcal{M}}{\equiv}\varnothing$ 的混合模型 $\mathcal{M}$(参见第 4 章关于混合模型的详细介绍)。

在上述情况下,通过 Smets、Yager、Dubois 和 Prade 以及混合组合规则,最终获得了如下的融合结果。首先,基于自由 DSm 模型,利用经典 DSm 规则(这里用下标 DSmc 表示)获得了如下结果:

$$m_{\mathrm{DSmc}}(\theta_1)=0.21 \quad m_{\mathrm{DSmc}}(\theta_2)=0.11$$

$$m_{\mathrm{DSmc}}(\theta_3)=0.06 \quad m_{\mathrm{DSmc}}(\theta_1\cup\theta_2)=0.03$$

$$m_{\mathrm{DSmc}}(\theta_1\cap\theta_2)=0.21 \quad m_{\mathrm{DSmc}}(\theta_1\cap\theta_3)=0.13 \quad m_{\mathrm{DSmc}}(\theta_2\cap\theta_3)=0.14$$

$$m_{\mathrm{DSmc}}(\theta_3\cap(\theta_1\cup\theta_2))=0.11$$

但是由于排斥性约束(通过 Shafer 模型的应用以及非存在性约束 $\theta_3\overset{\mathcal{M}}{\equiv}\varnothing$),事实上可以得到总的冲突质量为

$$k_{12}=0.06+0.21+0.13+0.14+0.11=0.65 \qquad \text{(冲突质量)}$$

- 若应用析取规则(1.6),可以得到

$$m_\cup(\varnothing)=0$$

$$m_\cup(\theta_1)=m_1(\theta_1)m_2(\theta_1)=0.1\cdot 0.5=0.05$$

$$m_\cup(\theta_2)=m_1(\theta_2)m_2(\theta_2)=0.4\cdot 0.1=0.04$$

① 原文有误,应修改为 $m_1(\theta_1\cup\theta_2)=0.3$。——译者注。

$$m_{\cup}(\theta_3) = m_1(\theta_3)m_2(\theta_3) = 0.2 \cdot 0.3 = 0.06$$

$$\begin{aligned} m_{\cup}(\theta_1 \cup \theta_2) = & [m_1(\theta_1 \cup \theta_2)m_2(\theta_1 \cup \theta_2)] + [m_1(\theta_1)m_2(\theta_2) + m_2(\theta_1)m_1(\theta_2)] \\ & + [m_1(\theta_1)m_2(\theta_1 \cup \theta_2) + m_2(\theta_1)m_1(\theta_1 \cup \theta_2)] \\ & + [m_1(\theta_2)m_2(\theta_1 \cup \theta_2) + m_2(\theta_2)m_1(\theta_1 \cup \theta_2)] \\ = & [0.3 \cdot 0.1] + [0.01 + 0.20] + [0.01 + 0.15] + [0.04 + 0.03] \\ = & 0.03 + 0.21 + 0.16 + 0.007 = 0.47 \end{aligned}$$

$$m_{\cup}(\theta_1 \cup \theta_3) = m_1(\theta_1)m_2(\theta_3) + m_2(\theta_1)m_1(\theta_3) = 0.03 + 0.10 = 0.13$$

$$m_{\cup}(\theta_2 \cup \theta_3) = m_1(\theta_2)m_2(\theta_3) + m_2(\theta_2)m_1(\theta_3) = 0.12 + 0.02 = 0.14$$

$$m_{\cup}(\theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_2) = m_1(\theta_3)m_2(\theta_1 \cup \theta_2) = 0.02 + 0.09 = 0.11$$

- 若应用混合 DSm 规则(1.24)(这里用下标 DSmh 表示)处理这两个证据源($k=2$),可以得到

$$m_{\mathrm{DSmh}}(\varnothing) = 0$$

$$m_{\mathrm{DSmh}}(\theta_1) = 0.21 + 0.13 = 0.34$$

$$m_{\mathrm{DSmh}}(\theta_2) = 0.11 + 0.14 = 0.25$$

$$\begin{aligned} m_{\mathrm{DSmh}}(\theta_1 \cup \theta_2) = & 0.03 + [0.2 \cdot 0.1 + 0.3 \cdot 0.3] \\ & + [0.1 \cdot 0.1 + 0.5 \cdot 0.4] + [0.2 \cdot 0.3] = 0.41 \end{aligned}$$

- 若应用 Smets 规则(1.8),可以得到

$$m_{\mathrm{S}}(\varnothing) = m(\varnothing) = 0.65 \qquad (\text{冲突质量})$$

$$m_{\mathrm{S}}(\theta_1) = 0.21$$

$$m_{\mathrm{S}}(\theta_2) = 0.11$$

$$m_{\mathrm{S}}(\theta_1 \cup \theta_2) = 0.03$$

- 若应用 Yager 规则(1.9),可以得到

$$m_{\mathrm{Y}}(\varnothing) = 0$$

$$m_{\mathrm{Y}}(\theta_1) = 0.21$$

$$m_{\mathrm{Y}}(\theta_2) = 0.11$$

$$m_{\mathrm{Y}}(\theta_1 \cup \theta_2) = 0.03 + k_{12} = 0.03 + 0.65 = 0.68$$

- 若应用 Dempster 规则(1.4)(这里用下标 DS 表示),可以得到

$$m_{\mathrm{DS}}(\varnothing) = 0$$

$$m_{\mathrm{DS}}(\theta_1) = 0.21/[1 - k_{12}] = 0.21/[1 - 0.65] = 0.21/0.35 = 0.600000$$

$$m_{\mathrm{DS}}(\theta_2) = 0.11/[1 - k_{12}] = 0.11/[1 - 0.65] = 0.11/0.35 = 0.314286$$

$$m_{\mathrm{DS}}(\theta_1 \cup \theta_2) = 0.03/[1 - k_{12}] = 0.03/[1 - 0.65] = 0.03/0.35 = 0.085714$$

- 若应用 Murphy 规则(1.7),也就是将信度质量平均,可以得到

$$m_{\mathrm{M}}(\varnothing) = (0 + 0)/2 = 0$$

$$m_M(\theta_1) = (0.1 + 0.5)/2 = 0.30$$
$$m_M(\theta_2) = (0.4 + 0.1)/2 = 0.25$$
$$m_M(\theta_3) = (0.2 + 0.3)/2 = 0.25$$
$$m_M(\theta_1 \cup \theta_2) = (0.3 + 0.1)/2 = 0.20$$

但是若发现 $\theta_3 = \varnothing$，那么将 $m_M(\theta_3) = 0.25$ 如何处理呢？也许可以将 $m_M(\theta_3)$ 如 Yager 规则分配 给 $m_M(\theta_1 \cup \theta_2)$，也可以将其根据 Smets 规则分配给 $m_M(\varnothing)$。Catherine Murphy 在她的论文中[27]并没有给出解决此问题的有效办法。

• 若应用 Dubois-Prade 规则，由于 $\theta_3 \overset{\mathcal{M}}{\equiv} \varnothing$，可以得到

$$m_{DP}(\varnothing) = 0 \qquad \text{（根据 Dubois-Prade 规则的定义）}$$

$$\begin{aligned}
m_{DP}(\theta_1) &= [m_1(\theta_1)m_2(\theta_1) + m_1(\theta_1)m_2(\theta_1 \cup \theta_2) + m_2(\theta_1)m_1(\theta_1 \cup \theta_2)] \\
&\quad + [m_1(\theta_1)m_2(\theta_3) + m_2(\theta_1)m_1(\theta_3)] \\
&= [0.1 \cdot 0.5 + 0.1 \cdot 0.1 + 0.5 \cdot 0.3] + [0.1 \cdot 0.3 + 0.5 \cdot 0.2] \\
&= 0.21 + 0.13 = 0.34 \\
m_{DP}(\theta_2) &= [0.4 \cdot 0.1 + 0.4 \cdot 0.1 + 0.1 \cdot 0.3] + [0.4 \cdot 0.3 + 0.1 \cdot 0.2] \\
&= 0.11 + 0.14 = 0.25 \\
m_{DP}(\theta_1 \cup \theta_2) &= [m_1(\theta_1 \cup \theta_2)m_2(\theta_1 \cup \theta_2)] + [m_1(\theta_1 \cup \theta_2)m_2(\theta_3) \\
&\quad + m_2(\theta_1 \cup \theta_2)m_1(\theta_3)] \\
&\quad + [m_1(\theta_1)m_2(\theta_2) + m_2(\theta_1)m_1(\theta_2)] \\
&= [0.3 \cdot 0.1] + [0.3 \cdot 0.3 + 0.1 \cdot 0.2] + [0.1 \cdot 0.1 + 0.5 \cdot 0.4] \\
&= [0.03] + [0.09 + 0.02] + [0.01 + 0.20] \\
&= 0.03 + 0.11 + 0.21 = 0.35
\end{aligned}$$

如果将上述所有命题的信度质量相加，可以得到 $0 + 0.34 + 0.25 + 0.35 = 0.94$，很明显小于 1。因而，当某一个命题或命题的并集是空集时（在处理动态融合问题时），Dubois-Prade 规则将不适用。信度质量矩阵 $\boldsymbol{M}$ 中空集命题列间的乘积将不存在，这个问题在DSmT 中是通过式(1.24) $\mathrm{sum}S_2(\cdot)$解决的，即它将上述乘积分配到总的或部分的未知集上。

在这个特定的例子中，利用混合 DSm 规则可以将空集命题列 θ_3 间的乘积 $m_1(\theta_3)m_2(\theta_3) = 0.2 \cdot 0.3 = 0.06$ 分配到 $m_{DSmh}(\theta_1 \cup \theta_2)$ 上，得到 $0.35 + 0.06 = 0.41$。

可以得出结论，DSmT 是对 DST、Yager、Smets、Dubois-Prade 理论的自然延伸。当不存在单个命题或者单命题间的并集是空集时，DSmT 与 Dubois-Prade 理论相一致，它们能得到相同的结果（因为在这种情况下，$\mathrm{sum}S_2(\cdot)$并没有在混合 DSm 组合规则中用到）；否则，Dubois-Prade 组合规则将不适用（因为得到的融合结果之和小于 1）于包括非存在性约束的动态融合问题。在这种情况下，Murphy

规则同样不适用，因为空集的信度质量并没有得到转移。如果是完全冲突，即冲突因子 $k_{12}=1$，此时 DST 不适用(利用 Dempster 组合规则得到了 0/0 的结果)，那么根据 Smets 规则得到了 $m_S(\varnothing)=1$，这就是在本章对其解释的原因，在第 5 章也没有必要对它进行进一步证明。在上述情况下，还可以得到 DSm 规则与 Yager、Dubois-Prade 规则相一致的结论。

一般的混合 DSm 组合规则可以在任何模型下工作，并能解决所有的静态或动态融合问题，它适用于任何冲突类型：$0\leqslant m(\text{conflict})\leqslant 1$。当冲突因子趋向于 0 时，所有的规则(Dempster、Yager、Smets、Murphy、Dubois-Prade、DSmT 规则)都趋向于相同的结果。这个事实非常重要，因为它说明了这些规则之间的联系。但是若冲突因子趋向于 1，这些规则间的差别就比较大了，若冲突真达到 1，某些规则(Dempster 规则)就不能发挥作用了。Murphy 规则是唯一的幂等规则(信度质量的平均值)。在 Smets 的情形(当 $m(\varnothing)>0$ 时)下，Dubois-Prade 规则无法得到应用。对于所有的命题间的交集是空集(Shafer 模型)并且冲突因子是 1 的情况下，Dempster 规则并没有给予定义。看下面的例子，对于鉴别框 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4\}$，其中所有命题 $\theta_i(i=1,2,3,4)$之间是相互排斥的：

$$m_1(\theta_1)=0.1 \quad m_1(\theta_2)=0 \quad m_1(\theta_3)=0.7 \quad m_1(\theta_4)=0$$

$$m_2(\theta_1)=0 \quad m_2(\theta_2)=0.6 \quad m_2(\theta_3)=0 \quad m_2(\theta_4)=0.4$$

此时的冲突因子是 1，若利用 Dempster 规则，则得到了 0/0 的结果，没有意义。

在这种情况下，利用 Yager 规则可以得到 $m_Y(\theta_1\cup\theta_2\cup\theta_3\cup\theta_4)=1$，并没有得到什么具体的信息；利用 Smets 规则得到 $m(\varnothing)=1$，这同样没有多大意义。利用 Murphy 规则，可以得到 $m_M(\theta_1)=0.15$，$m_M(\theta_2)=0.30$，$m_M(\theta_3)=0.35$，$m_M(\theta_4)=0.20$，这个信息非常具体；而利用混合 DSm 规则，可以得到如下信度赋值：

$$m_{\text{DSmh}}(\theta_1\cup\theta_2)=0.18, m_{\text{DSmh}}(\theta_1\cup\theta_4)=0.12,$$

$$m_{\text{DSmh}}(\theta_2\cup\theta_3)=0.42 \text{ 和 } m_{\text{DSmh}}(\theta_3\cup\theta_4)=0.28$$

它虽然不如 Murphy 规则得到的结果具体，但足以刻画组合后的证据源与部分未知集间的冲突特性。

在后一个例子中，根据析取规则得到

$$m_{\cup}(\theta_1\cup\theta_2)=m_1(\theta_1)m_2(\theta_2)+m_2(\theta_1)m_1(\theta_2)=0.18$$

同理，$m_{\cup}(\theta_1\cup\theta_4)=0.12$，$m\cup(\theta_2\cup\theta_3)=0.42$ 且 $m_{\cup}(\theta_3\cup\theta_4)=0.28$，所以当所有的交集为空集时，析取规则与混合 DSm 规则相一致。

1.4.2 第二个例子

这个例子是对将在第 5 章讨论的 Zadeh 例子进行延伸。令两个独立证据源的鉴别框架都为 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4\}$，并假设其符合 Shafer 模型，选择基本的信度赋值

如下：

$$m_1(\theta_1)=0.998\quad m_1(\theta_2)=0\quad m_1(\theta_3)=0.001\quad m_1(\theta_4)=0.001$$

$$m_2(\theta_1)=0\quad m_2(\theta_2)=0.998\quad m_2(\theta_3)=0\quad m_2(\theta_4)=0.02$$ [①]

在这个简单的数字实例中，Dempster 规则给出了反直觉的结果：

$$m_{DS}(\theta_4)$$

$$=\frac{0.001\cdot 0.002}{1-(0.998\cdot 0.998+0.998\cdot 0.002+0.998\cdot 0.001+0.998\cdot 0.001+0.001\cdot 0.002)}$$

$$=\frac{0.000002}{0.000002}=1$$

利用 Yager 规则得到

$$m_S(\theta_4)=0.000002, m_Y(\theta_1\cup\theta_2\cup\theta_3\cup\theta_4)=0.999998$$

利用 Smets 规则得到

$$m_S(\theta_4)=0.000002, m_S(\varnothing)=0.999998$$

利用 Murphy 规则得到

$$m_M(\theta_1)=0.499, m_M(\theta_2)=0.499, m_M(\theta_3)=0.0005, m_M(\theta_4)=0.0015$$

利用 Dubois-Prade 规则可以得到

$$m_{DP}(\theta_4)=0.000002, m_{DP}(\theta_1\cup\theta_2)=0.996004, m_{DP}(\theta_1\cup\theta_4)=0.001996$$

$$m_{DP}(\theta_2\cup\theta_3)=0.000998, m_{DP}(\theta_2\cup\theta_4)=0.000998, m_{DP}(\theta_3\cup\theta_4)=0.000002$$

此规则只能用于 Shafer 模型 $\mathscr{M}^0(\Theta)$中，即当命题间的所有交集都为空集时。对于其他的混合模型，Dubois-Prade 组合规则则不是处理该问题的可靠组合规则（参见第三个例子）。

利用经典的 DSm 组合规则可以得到

$$m_{DSmc}(\theta_4)=0.000002, m_{DSmc}(\theta_1\cap\theta_2)=0.996004,$$

$$m_{DSmc}(\theta_1\cap\theta_4)=0.001996, m_{DSmc}(\theta_2\cap\theta_3)=0.000998,$$

$$m_{DSmc}(\theta_2\cap\theta_4)=0.000998,$$

$$m_{DSmc}(\theta_3\cap\theta_4)=0.000002$$

由于这里的框架符合 Shafer 模型，所以若应用混合 DSm 规则，则得到与 Dubois-Prade 组合规则相同的结果。在命题间的所有交集都是空集的情况下，析取规则、Dubois-Prade 规则以及混合 DSm 规则是相一致的。

1.4.3　第三个例子

下面是一个在 Smets 情形（也就是 TBM）下的例子，$m(\varnothing)>0$，这时 Dubois—

① 原文 $m_2(\theta_4)=0.02$ 有误，应修改为 $m_2(\theta_4)=0.002$。——译者注。

Prade 组合规则不适用。下面考虑扩展的[①]信度赋值为

$$m_1(\varnothing)=0.2 \quad m_1(\theta_1)=0.4 \quad m_1(\theta_2)=0.4$$

$$m_2(\varnothing)=0.3 \quad m_2(\theta_1)=0.6 \quad m_2(\theta_2)=0.1$$

在这种情况下，若利用 Dubois-Prade 组合规则，则可以得到(假设所有命题的交集为空集)

$$m_{\mathrm{DP}}(\varnothing)=0 \qquad (\text{由定义给出})$$

$$\begin{aligned}m_{\mathrm{DP}}(\theta_1)&=m_1(\theta_1)m_2(\theta_1)+[m_1(\varnothing)m_2(\theta_1)+m_2(\varnothing)m_1(\theta_1)]\\&=0.24+[0.12+0.12]=0.48\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m_{\mathrm{DP}}(\theta_2)&=m_1(\theta_2)m_2(\theta_2)+[m_1(\varnothing)m_2(\theta_2)+m_2(\varnothing)m_1(\theta_2)]\\&=0.04+[0.02+0.12]=0.18\end{aligned}$$

$$m_{\mathrm{DP}}(\theta_1\cup\theta_2)=m_1(\theta_1)m_2(\theta_2)+m_2(\theta_1)m_1(\theta_2)=0.04+0.24=0.28$$

这些所有命题的信度质量之和为 $0.48+0.18+0.28=0.94<1$。那么信度质量 $m_1(\varnothing)m_2(\varnothing)=0.2\cdot 0.3=0.06$ 到底去哪儿了？当利用混合 DSm 组合规则时，可以得到

$$m_{\mathrm{DSmh}}(\varnothing)=0, m_{\mathrm{DSmh}}(\theta_1)=0.48, m_{\mathrm{DSmh}}(\theta_2)=0.18$$

且 $$\begin{aligned}m_{\mathrm{DSmh}}(\theta_1\cup\theta_2)&=[m_1(\theta_1)m_2(\theta_2)+m_2(\theta_1)m_1(\theta_2)]+[m_1(\varnothing)m_2(\varnothing)]\\&=[0.28]+[0.2\cdot 0.3]=0.34\end{aligned}$$

对它的所有命题的信度赋值相加可以得到 1。

在这个例子中，利用析取规则可以得到

$$\begin{aligned}m_{\cup}(\theta_1)&=m_1(\theta_1)m_2(\theta_1)+[m_1(\varnothing)m_2(\theta_1)+m_2(\varnothing)m_1(\theta_1)]\\&=0.24+[0.12+0.12]=0.48\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m_{\cup}(\theta_2)&=m_1(\theta_2)m_2(\theta_2)+[m_1(\varnothing)m_2(\theta_2)+m_2(\varnothing)m_1(\theta_2)]\\&=0.04+[0.02+0.12]=0.18\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m_{\cup}(\theta_1\cup\theta_2)&=m_1(\theta_1)m_2(\theta_2)+m_2(\theta_1)m_1(\theta_2)\\&=0.04+0.24=0.28\end{aligned}$$

$$m_{\cup}(\varnothing)=m_1(\varnothing)m_2(\varnothing)=0.06>0$$

该析取规则得到的 $m_{\cup}(\theta_1)$、$m_{\cup}(\theta_2)$ 与通过 Dubois-Prade 规则以及混合 DSm 规则得到的结果相同。它们之间的区别就在于：在混合 DSm 规则中，空集的信度质量 $m_1(\varnothing)m_2(\varnothing)=0.06$ 分配给了 $\theta_1\cup\theta_2$，而在 Dubois-Prade 规则以及析取规则中没有进行分配。

混合 DSm 规则和其他规则最主要的区别就在于它的融合空间是一个超幂集，

① 它意味着非归一化的信度质量在空集上赋予一定的值，这符合 Smets 的 TBM。

其中包括交集，而其他规则要想得到交集必须对命题进行细化。

1.4.4 第四个例子

下面是一个仍然不能应用 Dempster 规则的例子（这里的例子不同于 Zadeh 的例子）。令 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4\}$，并假设它符合 Shafer 模型，其基本信度赋值选取如下：

$$m_1(\theta_1)=0.99 \quad m_1(\theta_2)=0 \quad m_1(\theta_3\cup\theta_4)=0.01$$
$$m_2(\theta_1)=0 \quad m_2(\theta_2)=0.98 \quad m_2(\theta_3\cup\theta_4)=0.02$$

应用 Dempster 规则可以得到 $m_{\mathrm{DS}}(\theta_1)=m_{\mathrm{DS}}(\theta_2)=0$ 和

$$m_{\mathrm{DS}}(\theta_3\cup\theta_4)=\frac{0.01\cdot 0.02}{1-[0.99\cdot 0.98+0.99\cdot 0.02+0.98\cdot 0.01]}$$
$$=\frac{0.0002}{1-0.9998}=\frac{0.0002}{0.0002}=1$$

这个结果显然是不合理的。

通过混合 DSm 规则可以得到

$$m_{\mathrm{DSmh}}(\theta_1\cup\theta_2)=0.99\cdot 0.98=0.9702,m_{\mathrm{DSmh}}(\theta_1\cup\theta_3\cup\theta_4)=0.0198,$$
$$m_{\mathrm{DSmh}}(\theta_2\cup\theta_3\cup\theta_4)=0.0098,m_{\mathrm{DSmh}}(\theta_3\cup\theta_4)=0.0002$$

在这种情况下，通过 Dubois-Prade 规则也可以得到相同的结果。利用析取规则得到的信度赋值 $m_{\cup}(\cdot)$ 也同样等同于 $m_{\mathrm{DSmh}}(\cdot)$ 与 $m_{\mathrm{DP}}(\cdot)$。

利用 Yager 规则可以得到

$$m_{\mathrm{Y}}(\theta_3\cup\theta_4)=0.0002,m_{\mathrm{Y}}(\theta_1\cup\theta_2\cup\theta_3\cup\theta_4)=0.9998$$

而利用 Smets 规则可得到

$$m_{\mathrm{S}}(\theta_3\cup\theta_4)=0.0002,m_{\mathrm{S}}(\varnothing)=0.9998$$

上述两规则得到的结果都不如利用混合 DSm 规则得到的结果明确，这说明在应用 Yager 和 Smets 规则时存在信息的丢失。

1.4.5 第五个例子

假设将 Dubois-Prade 规则的融合空间由幂集 2^Θ 扩展到超幂集 D^Θ，则当存在以下情况时（因为 $S_2(\cdot)$ 这一项丢失了），Dubois-Prade 规则不适用：

（1）至少存在一个命题是空集，且其所在列的信度赋值均为非零。

（2）至少存在一个命题间的并集是空集，且其所在列的信度赋值均为非零。

（3）至少存在一个命题间的交集是空集，且其所在列的信度赋值均为非零。

下面是一个关于交集的例子（Dubois-Prade 规则扩展到超幂集）。令两个独立证据源的鉴别框架为 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2\}$，并有

$$m_1(\theta_1)=0.5 \quad m_1(\theta_2)=0.1 \quad m_1(\theta_1\cap\theta_2)=0.4$$
$$m_2(\theta_1)=0.1 \quad m_2(\theta_2)=0.6 \quad m_2(\theta_1\cap\theta_2)=0.3$$

则扩展后的 Dubois-Prade 规则在超幂集上的信度赋值为

$$m_{DP}(\varnothing)=0, m_{DP}(\theta_1)=0.05, m_{DP}(\theta_2)=0.06, m_{DP}(\theta_1\cap\theta_2)=0.04\cdot 0.3 + 0.5\cdot 0.6+0.5\cdot 0.3+0.1\cdot 0.4+0.1\cdot 0.3+0.6\cdot 0.4=0.89$$

现在假设 $\theta_1\cap\theta_2=\varnothing$，那么得到这种情况下的信度质量为

$$m'_{DP}(\varnothing)=0 \qquad \text{(由定义给出)}$$
$$m'_{DP}(\theta_1)=0.05+[m_1(\theta_1)m_2(\theta_1\cap\theta_2)+m_2(\theta_1)m_2(\theta_1\cap\theta_2)]$$
$$=0.05+[0.5\cdot 0.3+0.1\cdot 0.4]=0.24$$
$$m'_{DP}(\theta_2)=0.06+[m_1(\theta_2)m_2(\theta_1\cap\theta_2)+m_2(\theta_2)m_1(\theta_1\cap\theta_2)]$$
$$=0.06+[0.1\cdot 0.3+0.6\cdot 0.4]=0.33$$
$$m'_{DP}(\theta_1\cup\theta_2)=m_1(\theta_2)m_2(\theta_2)+m_2(\theta_1)m_1(\theta_2)$$
$$=0.5\cdot 0.6+0.1\cdot 0.1=0.31$$

信度质量之和为 $0.24+0.33+0.31=0.88<1$。这里信度质量乘积 $m_1(\theta_1\cap\theta_2)m_2(\theta_1\cap\theta_2)=0.4\cdot 0.3=0.12$ 丢失了。

在上述这种情形下应用经典 DSm 规则，可得到与 Dubois-Prade 规则相同的结果，也就是 $m_{DSmc}(\varnothing)=0$，$m_{DSmc}(\theta_1)=0.05$，$m_{DSmc}(\theta_2)=0.06$，$m_{DSmc}(\theta_1\cap\theta_2)=0.89$。如果现在引入完全约束 $\theta_1\cap\theta_2=\varnothing$，利用混合 DSm 规则可以得到

$$m_{DSmh}(\varnothing)=0 \qquad \text{(由定义给出)}$$
$$m_{DSmh}(\theta_1)=0.05+[m_1(\theta_1)m_2(\theta_1\cap\theta_2)+m_2(\theta_1)m_1(\theta_1\cap\theta_2)]$$
$$=0.05+[0.5\cdot 0.3+0.1\cdot 0.4]=0.24$$
$$m_{DSmh}(\theta_2)=0.06+[m_1(\theta_2)m_2(\theta_1\cap\theta_2)+m_2(\theta_2)m_1(\theta_1\cap\theta_2)]$$
$$=0.06+[0.1\cdot 0.3+0.6\cdot 0.4]=0.33$$
$$m_{DSmh}(\theta_1\cup\theta_2)=[m_1(\theta_2)m_2(\theta_2)+m_2(\theta_1)m_1(\theta_2)]+[\underbrace{m_1(\theta_1\cap\theta_2)m_2(\theta_1\cap\theta_2)}_{S_2\text{在混合DSm中与相等}}]$$
$$=[0.31]+[0.12]=0.43$$

那么通过混合 DSm 组合规则得到所有命题的信度质量之和为 $0.24+0.33+0.43=1$。

将析取规则的融合空间扩展到超幂集上，反映到此例中可以得到

$$m_{\cup}(\varnothing)=0$$
$$m_{\cup}(\theta_1)=[m_1(\theta_1)m_2(\theta_1)]+[m_1(\theta_1)m_2(\theta_1\cap\theta_2)+m_2(\theta_1)m_1(\theta_1\cap\theta_2)]$$
$$=0.05+[0.15+0.04]=0.24$$
$$m_{\cup}(\theta_2)=[m_1(\theta_2)m_2(\theta_2)]+[m_1(\theta_2)m_2(\theta_1\cap\theta_2)+m_2(\theta_2)m_1(\theta_1\cap\theta_2)]$$

$$= 0.06 + [0.15 + 0.04] = 0.33$$

$$m_{\cup}(\theta_1 \cup \theta_2) = [m_1(\theta_2)m_2(\theta_2) + m_2(\theta_1)m_1(\theta_2)] = 0.31$$

$$m_{\cup}(\theta_1 \cap \theta_2) = m_1(\theta_1 \cap \theta_2)m_2(\theta_1 \cap \theta_2) = 0.4 \cdot 0.3 = 0.12$$

若同样引入 $\theta_1 \cap \theta_2 = \varnothing$，则修正后的信度赋值 $m'_{\cup}(\cdot)$ 变为 $m'_{\cup}(\theta_1) = m_{\cup}(\theta_1)$，$m'_{\cup}(\theta_2) = m_{\cup}(\theta_2)$，$m'_{\cup}(\theta_1 \cup \theta_2) = m_{\cup}(\theta_1 \cup \theta_2)$，但是 $m'_{\cup}(\varnothing) \equiv m_{\cup}(\theta_1 \cap \theta_2) = 0.12 > 0$。

1.5 结论

DSmT 可以看作是一个通用、灵活、自下而上地处理不确定和冲突性信息的方法，它适用于各种静态或动态的融合问题，这里要组合的信息由不同的独立证据源提供有限集合的信度函数来建模。DSmT 的出现是基于这样的事实：证据源间的冲突不仅源于证据源本身的不可靠性（可以通过经典折扣理论处理这种问题），而且由于信息的有限性和经验的局部性，证据源对框架命题存在不同的解释；况且，很多包含模糊、连续概念的框架命题并不能被细分。基于以上情形，DSmT 给出了一个新的数学框架，如图 1.2 所示的通用方块图。

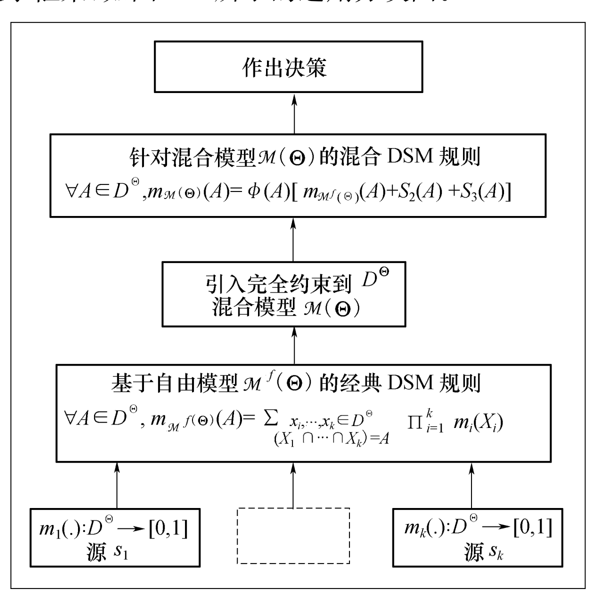


图 1.2　DSm 融合规则的方块图

下面是在 DSmT 框架下处理由独立信源引起的不确定与冲突信息的主要步骤，它是基于信度函数来表述的。

(1) 底层。DSmT 是从自由 DSm 模型 $\mathcal{M}^f(\Theta)$ 开始讨论的，该模型 $\mathcal{M}^f(\Theta)$ 是

与鉴别框架 Θ 以及超幂集（自由 Dedekind 格子模型）D^Θ 的概念密切相关的。在这一层上，DSmT 提供了一个工作在模型 $\mathscr{M}^f(\Theta)$ 上，且满足交换性与结合性的组合规则（满足合取一致原理）。

（2）高层（只是在必要时使用）。根据所考虑融合问题（它在自由模型 $\mathscr{M}^f(\Theta)$ 下定义了一个完全约束集，从而得到了一个特定的混合 DSm 模型 $\mathscr{M}(\Theta)$）的框架 Θ 中命题的本质特性（假定融合中心了解这一信息），DSmT 自动地利用通用的混合 DSm 规则工作在任何混合 DSm 模型下来完成组合过程，这些规则在第 4 章中将会有详细的介绍。仅当 Dedekind 格子空间 D^Θ 的某些命题为空集时考虑完全约束。

（3）作出决策。一旦通过第一步（或者必要的情况下通过第二步）获得了组合结果，就需要进行最后的决策。在过去的 30 年里对于 DST 框架下的决策问题，尽管没有一个真正通用一致可接受的解决办法，但是当组合后的信度函数 $m(\cdot)$ 得到之后而必须要作出决策时，则可以根据 Smets 的理论和推理使其工作在 Pignistic 层[42]而不是信任层。本书第 7 章将会介绍基于 DSmT 的广义 Pignistic 变换。

在第二步中对于一个具体的完全约束的介绍，相当于按下一个电梯按钮，将带我们进入一个具有更大复杂性的高层，在这里需要混合 DSm 规则来处理它们的不确定性及冲突性。如果想到达一个更高的层次，则需要考虑 DSmT 框架下的某些约束。若最终仅考虑所有的排斥性约束（假设已知给定问题的框架中的所有命题确实是相互排斥的），那么可以直接到达最高层（也就是 Shafer 模型，它是 Shafer 数学证据理论的基础），但仍然应用混合 DSm 规则而不是 Dempster 组合规则。（这是因为）DSmT 方法在建模和组合信息方面比基于 Shafer 模型（一个具有非常具体约束的混合 DSm 模型）的只适合处理静态的融合问题的传统方法①更通用。

DSmT 框架不仅能够很容易地处理排斥性约束的问题，而且对于非存在性约束以及混合约束的情况同样适用，所以 DSmT 在处理某些动态融合问题时非常有用，这在第 4 章中将会详细介绍。根据问题的本质属性，当直接工作在较低层次时利用混合 DSm 组合规则足以完美地完成信息的融合，就不必要工作在最高层了（像 DST 那样）。

这里有必要再次强调一下，通用的混合 DSm 规则并不等同于 Dempster 组合规则（也不等同于工作在最高层次包含合取一致性的所有改进形式，特别是当处理动态问题时），因为根据问题的本质属性，DSmT 能够工作在任何层次上来处理不确定性及冲突性的问题。即使工作在 Shafer 模型下，混合 DSm 规则与 Dempster 组合规则得到的结果也不尽相同，这在上节的例子中已有介绍，在第 4 章与第 5 章中将会对此进行解释。

---

① 除了 Smets[41]的 TBM 模型以及权衡/平均组合规则。

DSmT 由于基于 Dedekind 格子模型，所以不同于 DST。它能够工作在任何模型下（自由 DSm 模型以及将 Shafer 模型作为一种特殊情况的混合模型），这使得它的模型能够很好地和现实问题相一致。DSmT 的能力就在于它能够处理由将所有的离散概念以及含糊的/连续的/相对的概念融为一体的信度函数表述的任何融合问题。DSmT 能够以相同的理论方式处理静态和动态的融合问题，也就是将完全的约束考虑到固定的或者必要情况下时变的模型中去。组合独立证据源的通用混合 DSm 规则能够工作在任何可能的静态或动态模型中，而不需要一个归一化步骤，这和 Dempster 规则以及它的改进方式不同。现在混合 DSm 组合规则已经被扩展到处理不精确但可接受的信度赋值的问题上。在本书中，给出的利用 DSmT 处理融合问题的方法不仅在理论建立上，而且在它的应用及处理问题的结果上都是新的。

参考文献

[1] Berzati D. , Haenni R. , Kohlas J. , *Probabilistic Argumentation Sustems and Abduction*. Tech. Report 00-2. Institute of Informatics, University of Fribourg, 2000.

[2] Berzati D. , Haenni R. , Kohlas J. , *Probabilistic Argumentation Systems and Abduction*, C, Baral and M. Truszczynski (eds.), NMR2000, 8th International Workshop on Non-Monotonic Reasoning, Breckenridge, Colorado. 2000.

[3] Bloch I. , *Fondements des probabilités et des croyances : une discussion des travaux de Cox et Smets*, 15ième Colloque GRETSI, Juan-Les-Pins, France, Sept. 18-21, 1995, pp. 909-912.

[4] Bloch I. , *Incertitude, imprécision et additivité en fusion de données : point de vue historique*, Traite ment du Signal, Vol. 13, no. 4, pp. 267-288, 1996.

[5] Challa S. , Koks D. , *Bayesian and Dempster-Shafer fusion*, Sādhanā, Vol 29, Part 2, pp. 145-174, April 2004(http://www.ias.ac.in/sadhana/).

[6] Cheng Y. , Kashyap R. L. , *Study of the different methods for combining evidence*, SPIE Vol. 635 Applications of Artificial Intelligence III, pp. 384-393, 1986.

[7] Comtet L. , *Sperner Systems*, sec. 7. 2 in Advanced Combinatorics: The Art of Finite and Infinite Expansions, D. Reidel Publ. Co. , pp. 271-273, 1974.

[8] Dedekind R. *Über Zerlegungen von Zahlen durch ihre grössten gemeinsammen Teiler*, In Gesammelte Werke, Bd. 1. pp. 103-148, 1897.

[9] Dezert J. , *Foundations for a new theory of plausible and paradoxical reasoning*, Inform. & Secur. J. , Semerdjiev Ed. , Bulg. Acad. of Scl. , Vol. 9, 2002.

[10] Dezert J. , *Fondations pour une nouvelle théorie du raisonnement plausible et paradoxal*, ONERA Tech. Rep. RT 1/06769/DTIM, Jan. 2003.

[11] Dubois D. , Prade H. , *A Set-Theoretic View of Belief Functions*, International Journal of General Systems, pp. 193-226, Vol. 12, 1986.

[12] Dubois D. , Prade H. , *On the unicity of Dempster rule of combination*, International Journal of Intelligent Systems, Vol. 1, pp 133-142, 1986.

[13] Dubois D. , Prade H. , *Representation and combination of uncertainty with belief functions and possibility measures*, Computational Intelligence, 4. pp. 244-264, 1988.

[14] Haenni R. , *Propositional Argumentation Systems and Symbolic Evidence Theory*, Ph. D. Thesis. In stitut für Informatik, Universität Freiburg, 1996.

[15] Haenni R. , Kohlas J. , Lehmann N. , *Probabilistic Argumentation Systems*, Tech. Report 99-9. Institute of Informatics, University of Fribourg, 1999.

[16] Haenni R, Lehmann N, *Probabilistic. Argumentation Systems; a New Perspective on Dempster-Shafer Theory*, Tech. Report 01-30. Department of Informatics, University of Fribourg 2001.

[17] Haenni R. , Kohlas J. , Lehmann N. , *Probabilistic Argumentation Systems*, Handbook of Defeasi ble Reasoning and Uncertainty Management Systems, Volume 5: Algorithms for Uncertainty and Defeasible Reasoning, pp. 221-288, J. Kohlas, S. Moral(eds). Kluwer, Dordrecht. 2001.

[18] Haenni R. , Anrig B. , Kohlas J. , N. Lehmann N. , *A Survey on Probabilistic Argumentation*. EC-SQARU'01, 6th European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning under Uncertainty, Workshop: Adventures in Argumentation, pp. 19-25, Toulouse, France, 2001.

[19] Haenni R. , *Are alternatives to Dempster's rule of combination real alternatives? Comments on"About the belief funetion combination and the conflict management problem"*, Information Fusion Journal, Elsevier Publisher, Vol. 3, No. 3, pp. 237-239, 2002.

[20] Haenni R. , Lehmann N. . *Probabilistic Argumentation Systems: a New Perspective on Dempster-Shafer Theory*, International Journal of Intelligent Systems(Special Issue: the Dempster-Shafer Theory of Evidence). 18(1), 93-106, 2003.

[21] Janez F. , *Fusion de sources d'information définies sur des référentiels non exhaustifs différents*, Ph. D. Thesis, Nov. 13, 1996, Angers Univ. , France(also available as Onera Technical Note 1997-2).

[22] Kholas J. , Monney P. A. , A *mathematical theory of hints: An approach to Dempster-Shafer theory of evidence*, Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems, No. 425, Springer-Verlag, 1995.

[23] Kholas J. , *Mathematical foundations of evidence theory*, in G. Coletti, D. Dubols, and R. Scozzafava, editors, Mathematical models for handling partial knowledge in artificial intelligence, pp. 31-64, Plenum Press, 1995.

[24] Klawonn F. , Smets Ph. , *The dynamic of belief in the Transferable Belief Model and specialization-generalization matrices*, In D. Dubois, M. P. Wellman, B. D'Ambrosio, & P. Smets(Eds.), Uncertainty in Artificial Intelligence 92, pp. 130-137, Morgan Kaufman, San Mateo, CA, 1992.

[25] Lefevre E. , Colot O. , Vannoorenberghe P. *Belief functions combination and conflict management*, Information Fusion Journal, Elsevier Publisher, Vol. 3, No. 2, pp. 149-162. 2002.

[26] Lefevre E. , Colot O. , Vannoorenberghe P. , *Reply to the Comments of R. Haenni on the paper"Belief functions combination and conflict management"*, Information Fusion Journal, Elsevier Publisher, Vol. 4, pp. 63-65, 2003.

[27] Murphy C. K. , *Combining belief functions when evidence conflicts*, Decision Support Systems, Elsevier Publisher, Vol. 29, pp. 1-9, 2000.

[28] Pearl J. , *Probabilistic reasoning in Intelligent Systems: Networks of Plausible Inference*, Morgan Kaufmann Publishers, San Mateo. CA, 1988.

[29] Pearl J. , *Reasoning with belief functions: an analysis of compatibility*, International Journal of Approximate Reasoning, Vol. 4. pp. 363-389, 1990.

[30] Prade H. , Testemale C. , *Generalized database relational algebra for the treatment of incom plete/uncertain information and vague queries* Information Sciences. Vol 34. pp. 115-143. 1984.

[31] Ruspini E. H. , *The logical foundations of evidential reasoning*. Tech. note 408. SRI International. Menlo Park, CA. USA, 1986.

[32] Ruspini E. H. , *Epistemic logics, probability and the calculus of evidence*, in IJCAI-97 (Ed.), International Joint Conference on Artificial Intelligence, pp. 924-931, Morgan Kaufman, San Mateo, CA, 1987.

[33] Shafer G. , A *Mathematical Theory of Evidence*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1976.

[34] Shafer G. , *Perspectives on the Theory and Practice of Belief Functions*, International Journal of Approximate Reasoning. Vol. 4, pp. 323-362, 1990.

[35] Sloane N. J. A. , *The On-line Encyclopedia of Integer Sequences 2003* , (Sequence No. A014466), http://www. research. att. com/~njas/sequences/.

[36] Smarandache F. (Editor), *Proceedings of the First International Conference on Neutrosophics*, Univ. of New Nexico, Gallup Campus, NM, USA, 1-3 Dec. 2001, Xiquan, Phoenix, 2002.

[37] Smets Ph. , *The combination of evidence in the Transferable Belief Model*, IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. 12, No. 5, pp. 447-458, 1990.

[38] Smets Ph. , *Probability of provability and belief functions*, Logique et analyse, 133, pp177-195, 1991.

[39] Smets Ph. , *Belief functions: the disjunctive rule of combination and the generalized Bayesian theorem*, International Journal of Approximate reasoning, Vol. 9, pp. 1-35, 1993.

[40] Smets Ph. , *Probability of deductibility and belief functions*, in M. Clarke, R? Kruse, and S. Moral (Eds.), Symbolic and quantitative approaches to uncertainty, pp. 332-341, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[41] Smets Ph. , Kennes R. , *The transferable belief model*, Artif. Intel. , 66(2), pp. 191-234, 1994.

[42] Smets Ph. , *Data Fusion in the Transferable Belief Model*, Proceedings of the 3rd International Conference on Information Fusion, Fusion 2000, Paris, July 10-13, 2000, pp PS21-PS33.

[43] Voorbraak F. , *On the justification of Dempster's rule of combination*, Artificial Intelligence, 48, pp. 171-197, 1991. (see http://turing. wins. uva. nl/~fransv/#pub).

[44] Yager R. R. , *Hedging in the combination of evidence*, Journal of Information & Optimization Sciences, Analytic Publishing Co. , Vol. 4, No. 1, pp. 73-81, 1983.

[45] Yager R. R. , *Hedging in the combination of evidence*, Journal of Information and Optimization Science, Vol. 4, No. 1, pp. 73-81, 1983.

[46] Yager R. R. , *On the relationships of methods of aggregation of evidence in expert systems*, Cybernetics and Systems. Vol. 16, pp. 1-21, 1985.

[47] Yager R. R. , *On the Dempster-Shafer framwork and new combinatio rules* Information Sciences, Vol. 41, pp. 93-138, 1987.

[48] Yager R. R. , Fedrizzi M. , Kacprzyk J. (Editors), *Advances in the Dempster-Shafer theory of evidence*, John Wiley & Sons: New York, 1994, 608 pages (see http://www. panix. com/~yager/HP/pubs. html).

[49] Wierzchoń S. T. , Klopotek M. A. , *Euidential reasoning. An interpretative investigation*, Wydawnictwo Akademii Podlaskiej Publisher, PL ISSN 0860-2719, 304 pages, Poland, January 2002 (see http://www.

ipipan. waw. pl/staff/m. klopotek/mak/book2a. htm).

[50] Zadeh L. , *On the validity of Dempster's rule of combination*, Memo M 79/24, Univ. of California, Berkeley, 1979.

[51] Zadeh L. , *Review of Mathematical theory of evidence, by Glenn Shafer*, AI Magazine, Vol. 5, No. 3, pp. 81-83, 1984.

[52] Zadeh L. , *A simple view of the Dempster-Shafer theory of evidence and its implications for the rule of combination*, Berkeley Cognitive Science Report No. 33, University of California, Berkeley, CA, 1985.

[53] Zadeh L. , *A simple view of the Dempster-Shafer theory of evidence and its implication for the rule of combination*, AI Magazine 7, No. 2, pp. 85-90, 1986.

第 2 章　超幂集的产生

Jean Dezert	Florentin Smarandache
ONERA	Department of Mathematics
29 Av. de la Division Leclerc	University of New Mexico
92320 Châtillon,France	Gallup,NM 8730,U. S. A

摘要：DSmT 是基于 Dedekind 格子模型的概念发展而来的，该模型在 DSmT 框架下也称为超幂集，可以在其上定义广义的基本信度赋值。本章介绍超幂集的结构，给出几个超幂集的例子并讨论它们是如何从单调布尔函数集产生的。根据问题的复杂性，本章只关注工作在超幂集而不是细分鉴别框的命题。

2.1　引言

Dedekind 格子模型的概念是 DSmT 的基础之一，在作者的文献中称其为超幂集，下一节将会对其进行定义。首先令 $\Theta=\{\theta_1,\cdots,\theta_n\}$ 是一个包含 n 个命题的集合，命题之间并不能被精确定义与分离，因此把框架 Θ 细分成一个新的更大的且包含相互排斥基本命题的集合 Θ_{ref} 是不可行的，这就有必要建立自由 DSm 模型。在处理某些融合问题时（主要针对具有含糊不清或者连续概念的问题），可以证明自由 DSm 模型的细分框架根本无法得到，然而可利用 Dedekind 格子模型根据 DSm 组合规则来解决这些问题。根据 DSmT 的方法，框架的细分并不是正确处理证据源间组合的首要条件，一般情况下，基本上可以抛弃 Shafer 模型。尽管在某些情况下 Shafer 模型被证明是正确的并得到广泛的应用，但是在处理高度冲突证据源间的融合时，混合 DSm 规则是一个新的更好的选择。作者提出的理论事实上是踏着前辈（如 Yager[23]、Dubois 和 Prade[7]）的足迹来进行的，通过建立一个新的数学框架巧妙地解决 Dempster 规则面对高度冲突情形时所产生的问题。攻克此问题的主要推理直接来源于底层，即自由 DSm 模型的产生是基于这样的事实：在现实世界的应用中，观测结果/概念总是不明确且模糊的。Goodman、Mahler 和 Nguyen 等人在文献[9]中第 43 页和第 44 页对观测结果的含糊不清性作了解释。

不仅如此，信息的含糊不清性也来源于知识的粒度，这会在 Pawlak 提出的不可识别性或粗糙性的文献[15]中提及。

2.2 超幂集 D^Θ 的定义

超幂集 D^Θ 定义为由 Θ 中命题通过 $\cup$ 和 $\cap$（Θ 中命题在 $\cup$ 和 $\cap$ 的运算下产生 D^Θ）算子的运算组成的所有复合命题的集合，形式如下：

（1）$\varnothing, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n \in D^\Theta$；

（2）如果 $A, B \in D^\Theta$，那么 $A \cap B \in D^\Theta$ 且 $A \cup B \in D^\Theta$；

（3）除了（1）和（2）中包含的命题，再没有其他命题属于 D^Θ。

D^Θ 的对偶集（通过交换表达式中的 $\cup$ 和 $\cap$ 来得到）是它自身。D^Θ 的命题也存在自对偶（和它自身对偶）的情况，例如在下一节给出的例子中，当 $n=3$ 时的 α_8 就是这种情况。当 $\text{Card}(\Theta)=|\Theta|=n$ 时，D^Θ 的势表示为 2^{2^n} 的大部分。超幂集的产生和著名的列举单调布尔函数集合的 Dedekind 问题[4,3]密切相关，后面将介绍 D^Θ 中命题的产生过程。

2.3 第一个超幂集的例子

- 在退化的情况（$n=0$）下，$\Theta=\{\}$，则 $D^\Theta=\{\alpha_0 \triangleq \varnothing\}$，$|D^\Theta|=1$。
- 当 $\Theta=\{\theta_1\}$ 时，则 $D^\Theta=\{\alpha_0 \triangleq \varnothing, \alpha_0 \triangleq \theta_1\}$，$|D^\Theta|=2$。
- 当 $\Theta=\{\theta_1, \theta_2\}$ 时，则 $D^\Theta=\{\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_4\}$，$|D^\Theta|=5$，其中

$$\alpha_0 \triangleq \varnothing, \alpha_1 \triangleq \theta_1 \cap \theta_2, \alpha_2 \triangleq \theta_1, \alpha_3 \triangleq \theta_2, \alpha_4 \triangleq \theta_1 \cup \theta_2$$

- 当 $\Theta=\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ 时，则 $D^\Theta=\{\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{18}\}$，$|D^\Theta|=19$（详细内容参见文献[5]），其中各个命题的具体形式（下一章将要介绍信息力度指数）见下表。

Elements of $D^\Theta=\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$	
$\alpha_0 \triangleq \varnothing$	
$\alpha_1 \triangleq \theta_1 \cap \theta_2 \cap \theta_3$	$\alpha_{10} \triangleq \theta_2$
$\alpha_2 \triangleq \theta_1 \cap \theta_2$	$\alpha_{11} \triangleq \theta_3$
$\alpha_3 \triangleq \theta_1 \cap \theta_3$	$\alpha_{12} \triangleq (\theta_1 \cap \theta_2) \cup \theta_3$
$\alpha_4 \triangleq \theta_2 \cap \theta_3$	$\alpha_{13} \triangleq (\theta_1 \cap \theta_3) \cup \theta_2$
$\alpha_5 \triangleq (\theta_1 \cup \theta_2) \cap \theta_3$	$\alpha_{14} \triangleq (\theta_2 \cap \theta_3) \cup \theta_1$
$\alpha_6 \triangleq (\theta_1 \cup \theta_3) \cap \theta_2$	$\alpha_{15} \triangleq \theta_1 \cup \theta_2$
$\alpha_7 \triangleq (\theta_2 \cup \theta_3) \cap \theta_1$	$\alpha_{16} \triangleq \theta_1 \cup \theta_3$
$\alpha_8 \triangleq (\theta_1 \cap \theta_2) \cup (\theta_1 \cap \theta_3) \cup (\theta_2 \cap \theta_3)$	$\alpha_{17} \triangleq \theta_2 \cup \theta_3$
$\alpha_9 \triangleq \theta_1$	$\alpha_{18} \triangleq \theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3$

注意到在自由 DSm 模型下，任何命题 A（除了 $\varnothing$ 和 Θ 之外）的补集 $\bar{A}$ 都不包括在超幂集中，这是由于该模型对于去除中间原理的驳斥。根据融合问题的本质属性，当明确知道给定框架 Θ 中命题的排斥性时，可以将某些明确的完全约束添加到自由 DSm 模型中，这样就得到了混合 DSm 模型，对于该模型第 4 章将对其进行详细介绍。当 $n \geqslant 1$ 时，$|D^\Theta|$ 满足下面的 Dedekind 序列①：1，2，5，19，167，7580，7828353，56130437228687557907787…[17]。这里我们也能够注意到超幂集中命题的数量远远少于一个细分命题框架 Θ_{ref} 的幂集中命题的数量，不过在这里仅当工作在 $2^{\Theta_{ref}}$ 上并且承认这种细分存在的时候，才有上面的结论，具体可参见 2.4.1 节。

2.4 D^Θ 的产生

2.4.1 存储量的需求与复杂性

在进一步讨论 D^Θ 的产生之前，估计当 $|\Theta| = n$ 时，存储中 D^Θ 命题所需的容量是非常重要的。由于 D^Θ 中的每一个命题都能以 $2^n - 1$ 个二进制字符串的形式存储，则存储 D^Θ 所需的容量在下表（由于空集的容量是 0，因此没有将其个数计算在内，而且这里考虑的最小长度是（8 位）字节）中的右边一列给出。

$\|\Theta\| = n$	size/elem.	# of elem.	Size of D^Θ
2	1B	4	4B
3	1B	18	18B
4	2B	166	0.32KB
5	4B	7579	30KB
6	8B	7828352	59MB
7	16B	$\approx 2.4 \cdot 10^{12}$	$3.6 \cdot 10^4$GB
8	32B	$\approx 5.6 \cdot 10^{22}$	$1.7 \cdot 10^{15}$GB

这个表格告诉我们，当 $|\Theta| > 6$ 时，计算机要存储 D^Θ 中所有的命题面临着极大困难。不过这种复杂性仍然比在同一初始框架 Θ 下应用 DST 时，其最终细分的（如果可实现的话）$2^{\Theta_{ref}}$ 所产生所有的布尔函数要小。下表对 $|D^\Theta|$ 与 $|2^{\Theta_{ref}}|$ 的大小作了比较。

---

① 事实上这个序列相当于 Dedekind 序列减 1，因为我们没有将最后退化的单调函数 $f_{2^{2^n}-1}(\cdot)$ 作为 D^Θ（参见 2.4 节）中的命题。

$\|\Theta\|=n$	$\|D^{\Theta}\|$	$\|2^{\Theta_{\text{ref}}}\|=2^{2^n-1}$
2	5	$2^3=8$
3	19	$2^7=128$
4	167	$2^{15}=32768$
5	7580	$2^{31}=2147483648$

幸运的是,在大部分的融合应用中,只有 D^{Θ} 的一小部分子集具有非空的基本信度赋值,这是因为当问题的维数增加时,并不是所有的命题都能精确赋值。因此,不必要产生和存储 D^{Θ} 或 $2^{\Theta_{\text{ref}}}$ 中的所有命题,而只需考虑那些具有正信度赋值的命题。然而这里面临的真正技术难题是如何有效地处理超幂集中的所有命题,若工作在 $2^{\Theta_{\text{ref}}}$ 上时,困难将会更大。我们要通过更进一步的调查研究来寻找解决基本信度赋值为非退化时(也就是说,当对于所有的 $A\in D^{\Theta}$ 或 $A\in 2^{\Theta_{\text{ref}}}$,$m(A)>0$)高维问题可实施的工程方法。

2.4.2 单调布尔函数

一个简单的单调布尔函数 $f(\cdot)$是从 n 个二进制输入$(x_1,\cdots,x_n)\in\{0,1\}^n\triangleq\{0,1\}\times\cdots\times\{0,1\}$到单个二进制输出 $y=f(x_1,\cdots,x_n)\in\{0,1\}$的一个映射。由于存在 2^n 种可能的输入状态能够映射到输出 y 的 0 或 1 上,则可能存在的布尔函数集为 2^{2^n} 个,每一个函数都可以看作是由逻辑操作 $\wedge$(与)、$\vee$(或)和 $\neg$(非)形成的[3,21]。举一个简单的例子,仅考虑两个二进制输入变量的情况$(x_1,x_2)\in\{0,1\}\times\{0,1\}$,则所有由$(x_1,x_2)$产生的 $2^{2^2}=16$ 种可能的布尔函数集 $f_i(x_1,x_2)$总结见下表。

(x_1,x_2)	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
(0,0)	0	0	0	0	0	0	0	0
(0,1)	0	0	0	0	1	1	1	1
(1,0)	0	0	1	1	0	0	1	1
(1,1)	0	1	0	1	0	1	0	1
符号	False	$x_1\wedge x_2$	$x_1\wedge\bar{x}_2$	x_1	$\bar{x}_1\wedge x_2$	x_2	$x_1\underline{\vee}x_2$	$x_1\vee x_2$

(x_1,x_2)	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
(0,0)	1	1	1	1	1	1	1	1
(0,1)	0	0	0	0	1	1	1	1
(1,0)	0	0	1	1	0	0	1	1
(1,1)	0	1	0	1	0	1	0	1
符号	$x_1\overline{\vee}x_2$	$x_1\triangle x_2$	$\bar{x}_2$	$x_1\vee\bar{x}_2$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_1\vee x_2$	$x_1\overline{\wedge}x_2$	True

表中的符号为

$$\bar{x} \triangleq \neg x, x_1 \underline{\vee} x_2 \triangleq (x_1 \vee x_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)(\text{xor}),$$

$$x_1 \overline{\vee} x_2 \triangleq \neg(x_1 \vee x_2)(\text{nor}),$$

$$x_1 \triangle x_2 \triangleq (x_1 \wedge x_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2)(\text{xnor}),$$

$$x_1 \overline{\wedge} x_2 \triangleq \neg(x_1 \wedge x_2)(\text{nand})$$

用下面的符号 $\mathscr{F}_n(\wedge, \vee, \neg) = \{f_0(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_{2^{2^n}-1}(x_1, \cdots, x_n)\}$ 表示由 n 个二进制输入产生的所有可能的布尔函数集合。令 $\boldsymbol{x} \triangleq (x_1, \cdots, x_n)$ 和 $\boldsymbol{x}' \triangleq (x'_1, \cdots, x'_n)$ 为 $\{0,1\}^n$ 中的两个向量，当且仅当所有的 $1 \leqslant i \leqslant n$（$\leqslant$ 应用于各个分量），$x_i \leqslant x'_i$ 都成立，那么我们说 $\boldsymbol{x}$ 优先于 $\boldsymbol{x}'$，用符号表示为 $\boldsymbol{x} \preceq \boldsymbol{x}'$；当且仅当所有的 $1 \leqslant i \leqslant n$，$x_i < x'_i$ 都成立，那么我们说 $\boldsymbol{x}$ 严格优先于 $\boldsymbol{x}'$，用符号表示为 $\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{x}'$。

对于 $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \{0,1\}^n$，当且仅当 $\boldsymbol{x} \preceq \boldsymbol{x}'$，$f(\boldsymbol{x}) \preceq f(\boldsymbol{x}')$[19] 成立，则可以将此布尔函数定义为单调非减布尔函数（或者简写成单调布尔函数）。由于所有的单调布尔函数仅包含 ∧ 和 ∨ 算子（不包括 ¬ 算子）[21]，并且逻辑操作（∧，∨）和数字运算（+，·）以及集合运算（∪，∩）存在并行关系，那么由框架 Θ 中命题经过 ∪ 和 ∩ 的运算得到 D^Θ 中的所有命题是非常难的（即等价于在单位 n—立方体的顶点上得到单调布尔函数）。作者用 $M_n(\wedge, \vee)$ 表示由 n 个二进制输入产生的所有单调布尔函数，$M_n(\wedge, \vee)$ 是 $F_n(\wedge, \vee, \neg)$ 的一个子集。在前述的例子中，$f_1(x_1, x_2)$、$f_3(x_1, x_2)$、$f_5(x_1, x_2)$、$f_7(x_1, x_2)$ 属于单调布尔函数，但特殊的函数 $f_0(x_1, x_2)$ 与 $f_{2^{2^n}-1}(x_1, x_2)$ 也应被看作是单调函数。所有其他属于 $F_2(\wedge, \vee, \neg)$ 的函数都不属于 $M_2(\wedge, \vee)$，因为它们的表达式中含有 ¬ 算子，而且可以很容易地检验得到这些函数不满足单调性：$\boldsymbol{x} \preceq \boldsymbol{x}' \Rightarrow f(\boldsymbol{x}) \preceq f(\boldsymbol{x}')$。

Dedekind 问题[4] 决定了由 n 个二进制变量确定的布尔函数的个数。Dedekind[4] 计算出下列结果：$d(0)=2$，$d(1)=3$，$d(2)=6$，$d(3)=20$，$d(4)=168$。Church[1] 在 1940 年计算出 $d(5)=7581$。Ward[20] 在 1946 年计算出 $d(6)=7828354$。后来，Church[2] 又在 1965 年计算出 $d(7)=2414682040998$。这方面研究在 20 世纪 60 年代至 80 年代之间得到了重大进展，估算出了 $d(n)$ 的上下边界[10,12,14]。1991 年，Wiedemann[22] 计算出 $d(8)=56130437228687557907788$（通过 Cray—2 处理器计算 200 个小时得到），这个结果已经被 Fidytek 等在书中[8] 证实是正确的。直到现在，计算 $n>8$ 时的 $d(n)$ 对于数学家来说依然是一个极大的考验，尽管 Kisielewicz 和 Tombak（参见文献[11,18]中具体的证明过程）已经推出了如下 $d(n)$ 的精确公式：

$$d(n) = \sum_{k=1}^{2^{2^n}} \prod_{j=1}^{2^n-1} \prod_{i=0}^{j-1} \left\{1 - b_i^k [1 - b_j^k] \prod_{m=0}^{l(i)} [1 - b_m^i (1 - b_m^j)]\right\} \tag{2.1}$$

式中：$l(0)=0$，当 $i>0$ 时 $l(i)=[\log_2 i]$；$b_i^k \triangleq [k/2^i]-2[k/2^{i+1}]$，其中$[x]$表示保守取正函数（也就是小于等于 x 并且最接近它的整数）。这里面临的困难主要是，公式中包含巨大的项数，以及对存储容量与计算速度的需求。关于计算 Dedekind 问题的最新进展请参见文献[18,8,19]。

2.4.3 单调布尔函数(MBF)的产生

在讨论产生单调布尔函数的运算法则之前，先来深入探讨一下 2.4.2 节给出的例子。从前面的图表可以很容易地得到 MBF 集合（受限制的）为

$$\mathscr{M}_2^*(\wedge,\vee)=\{f_0(x_1,x_2)=\text{False}, f_1(x_1,x_2)$$
$$=x_1\wedge x_2, f_5(x_1,x_2)=x_2, f_7(x_1,x_2)=x_1\vee x_2\}$$

这种形式等价于在框架 $X=\{x_1,x_2\}$下，通过集合间的运算得到的超幂集 $D^X=\{\varnothing, x_1\cap x_2, x_1, x_2, x_1\cup x_2\}$。由于冗余概念 $f_{15}(x_1,x_2)$并没有包括在 DSmT 中，所以并没有将它作为 D^X 的一个命题，令 $\mathscr{M}_2^*(\wedge,\vee)\triangleq\mathscr{M}_2(\wedge,\vee)\backslash[f_{15}]$，而不是 $M_2(\wedge,\vee)$本身。

这里介绍一下 Smarandache 编码，它是通过列举由 n 个部分交叉命题 $x_i(i=1,\cdots,n)$组成的维恩图 X 的不同部分而形成的，其中不同部分的个数为 2^n-1。我们用一个符号表示那些仅属于某一个命题 x_i 的部分（用$<i>$表示仅属于 $x_i(i=1,\cdots,n)$的部分），用两个符号表示那些仅属于两个命题的部分（用$<ij>$表示仅属于 x_i 和 x_j 两个命题的部分，其中 $1\leqslant i<j\leqslant n$），用三个符号表示那些仅属于三个命题的部分（用$<ijk>$表示仅属于 x_i、x_j 和 x_k 三个命题的部分，其中 $1\leqslant i<j<k\leqslant n$），依此类推，直至用$<12\cdots n>$表示属于所有命题 x_i 的最后一部分。当 $1\leqslant n\leqslant 9$ 时，Smarandache 的编码工作是正常的，因为它是以 10 为单位的；而当 $n\geqslant 10$ 时，对于这种从 10 开始的数需要用两个（或更多的）符号来表示，所以可以将编码方式改为以 $n+1$ 为单位，即用一个标志代替两个（或更多的）符号，例如 $A=10, B=11, C=12$ 等。

- 当 $n=1$ 时，维恩图只有一个部分，编码成$<1>$。
- 当 $n=2$ 时，维恩图含有三个部分，编码成$<1>$，$<2>$，$<12>$。一般来说，$<ijk>$并不代表 $x_i\cap x_j\cap x_k$，而只是它的一部分，不过$<12\cdots n>$除外。
- 当 $n=3$ 时，维恩图含有 $2^3-1=7$ 个不同的部分，可以编码成$<1>$，$<2>$，$<3>$，$<12>$，$<13>$，$<23>$，$<123>$。其中，$<23>$表示仅属于 x_2 和 x_3 的部分，但是$<23>\neq x_2\cap x_3$，因为在三个命题 x_1、x_2 和 x_3 的维恩图中（参见第 3 章）$x_2\cap x_3=\{<23>,<123>\}$。
- 当 $n>3$ 时，所求编码可以很容易地推广下去，可以利用数字增序将 Smarandache 编码排列起来，也可以利用词典编辑的顺序或者任何其他的排序规则。

一种组织 Smarandache 编码来产生 D^X 的有用规则是 DSm 排序 $\boldsymbol{u}_n=[u_1,\cdots,$

$u_{2^n-1}]'$。它是一个基于从 $\boldsymbol{u}_1 \triangleq [<1>]$开始的递归结构。若已经计算出了 $\boldsymbol{u}_{n-1}$，那么当 $n>1$ 时，可以利用下面的递归运算构造出 $\boldsymbol{u}_n$：

- $\boldsymbol{u}_n$ 包含 $\boldsymbol{u}_{n-1}$ 中的所有命题；
- 然后，也将$<n>$包括在 $\boldsymbol{u}_n$ 中；
- 最后，在 $\boldsymbol{u}_{n-1}$ 中的每个命题后面添加一个命题$<n>$，形成一个新的集合 $\boldsymbol{u}'_{n-1}$，它也包括在 $\boldsymbol{u}_n$ 中。

这样就得到了 $\boldsymbol{u}_n$，它含有$(2^{n-1}-1)+1+(2^{n-1}-1)=2^n-1$ 个命题。

如下例所示，对于 $n=3$，可得到$\omega_3 \triangleq |<1><2><12><3><13><23><123>|'$，由于 $\boldsymbol{u}_n$ 中所有命题均互不交叉，可以将 D^X 中的每一个命题 d_i 写成是 $\boldsymbol{u}_n$ 中各个命题唯一的线性组合，即

$$\boldsymbol{d}_n = [d_1, \cdots, d_{2^n-1}]' = \boldsymbol{D}_n \boldsymbol{u}_n \tag{2.2}$$

因而 $\boldsymbol{u}_n$ 组成了 D^X 中各个命题的一组基，$\boldsymbol{D}_n$ 的每一行代表 D^X 中各个命题在基 $\boldsymbol{u}_n$ 下的一组系数。$\boldsymbol{D}_n$ 中的各个行也可以被看作是由增序的二进制数组成的。

例如，当 $\boldsymbol{n}=2$ 时，可以得到

$$\underbrace{\begin{bmatrix} d_1 = x_1 \cap x_2 \\ d_2 = x_2 \\ d_3 = x_1 \\ d_4 = x_1 \cup x_2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{d}_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{D}_2} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} <1> \\ <2> \\ <12> \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{u}_2} \tag{2.3}$$

其中在矩阵的乘法运算中，可以将$(+,\cdot)$当成$(\cup,\cap)$来运算，并且，$0\cdot<x>$等于$\varnothing$，$1\cdot<x>$等于$<x>$。

D^X 的产生过程等价于求解 $\boldsymbol{u}_n$ 与矩阵 $\boldsymbol{D}_n$，而后者可以很容易地通过下面的递归运算得到：

- 初始化，使 $\boldsymbol{D}_0^c = [0 \quad 1]'$，这相当于输入变量为 $n=0$ 时对应的布尔函数集。
- 矩阵 $\boldsymbol{D}_1^c$ 的建立是通过依次并排连接 $\boldsymbol{D}_0^c$ 的第 r_i 行与 $\boldsymbol{D}_0^c$ 的任意其他的行 r_j，但要求 $r_i \cup r_j = r_j$。这里相当于在 $r_1 \equiv 0$ 的前面(也就是左边)添加 0 或 1，而在 $r_2 \equiv 1$ 的前面仅添加 1。由于超幂集不包括冗余项，所以必须要去掉 $\boldsymbol{D}_1^c$ 的第一列与最后一行得到 $\boldsymbol{D}_1$，形式如下：

$$\boldsymbol{D}_1^c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{D}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 矩阵 $\boldsymbol{D}_2^c$ 的建立是通过依次并排连接 $\boldsymbol{D}_1^c$ 的第 r_i 行与 $\boldsymbol{D}_1^c$ 的任意其他的行 r_j，同理要求 $r_i \cup r_j = r_j$，然后去掉 $\boldsymbol{D}_2^c$ 的第一列与最后一行得到 $\boldsymbol{D}_2$，如式

(2.3)。

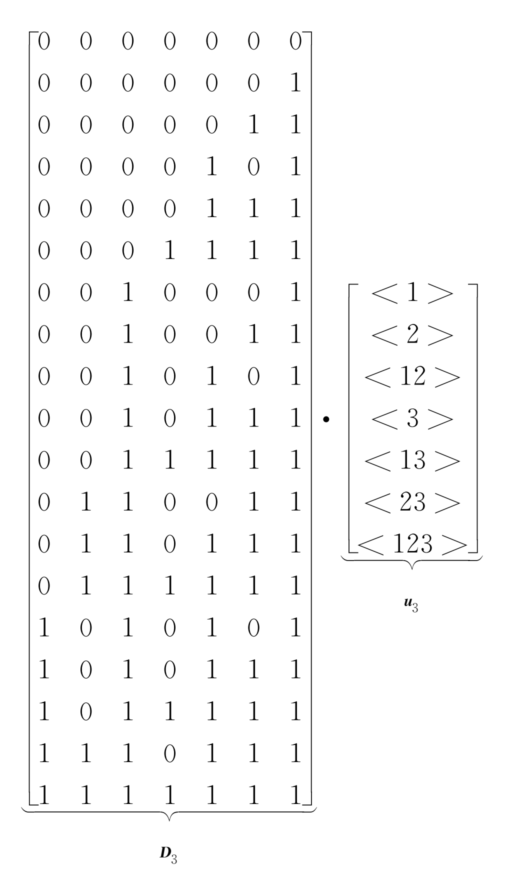
- 矩阵 $\boldsymbol{D}_3^c$ 的建立是通过依次并排连接 $\boldsymbol{D}_2^c$ 的第 r_i 行与 $\boldsymbol{D}_2^c$ 的任意其他的行 r_j，同理要求 $r_i \cup r_j = r_j$，然后去掉 $\boldsymbol{D}_3^c$ 的第一列与最后一行得到 $\boldsymbol{D}_3$，形式如下（这里 $\boldsymbol{D}'$表示矩阵 $\boldsymbol{D}$ 的转置）：

$$\boldsymbol{D}'_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- 同样，矩阵 $\boldsymbol{D}_n^c$ 的建立是通过依次并排连接 $\boldsymbol{D}_{n-1}^c$ 的第 r_i 行与 $\boldsymbol{D}_{n-1}^c$ 的任意其他的行 r_j，要求 $r_i \cup r_j = r_j$，然后去掉 $\boldsymbol{D}_n^c$ 的第一列与最后一行便得到了 $\boldsymbol{D}_n$。

当 $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$时，有如下的例子（注意到 D^Θ 中命题的索引遵循 MBF 的产生规则）：

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_0 \triangleq \varnothing \\ \alpha_1 \triangleq \theta_1 \cap \theta_2 \cap \theta_3 \\ \alpha_2 \triangleq \theta_2 \cap \theta_3 \\ \alpha_3 \triangleq \theta_1 \cap \theta_3 \\ \alpha_4 \triangleq (\theta_1 \cup \theta_2) \cap \theta_3 \\ \alpha_5 \triangleq \theta_3 \\ \alpha_6 \triangleq \theta_1 \cap \theta_2 \\ \alpha_7 \triangleq (\theta_1 \cup \theta_3) \cap \theta_2 \\ \alpha_8 \triangleq (\theta_2 \cup \theta_3) \cap \theta_1 \\ \alpha_9 \triangleq (\theta_1 \cap \theta_2) \cup (\theta_1 \cap \theta_3) \cup (\theta_2 \cap \theta_3) \\ \alpha_{10} \triangleq (\theta_1 \cap \theta_2) \cup \theta_3 \\ \alpha_{11} \triangleq \theta_2 \\ \alpha_{12} \triangleq (\theta_1 \cap \theta_3) \cup \theta_2 \\ \alpha_{13} \triangleq (\theta_2 \cup \theta_3) \\ \alpha_{14} \triangleq \theta_1 \\ \alpha_{15} \triangleq (\theta_2 \cap \theta_3) \cup \theta_1 \\ \alpha_{16} \triangleq (\theta_1 \cup \theta_3) \\ \alpha_{17} \triangleq (\theta_1 \cup \theta_2) \\ \alpha_{18} \triangleq (\theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{d}_2} =$$



$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&1&1&1&1\\ 0&0&1&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&0&1&1\\ 0&0&1&0&1&0&1\\ 0&0&1&0&1&1&1\\ 0&0&1&1&1&1&1\\ 0&1&1&0&0&1&1\\ 0&1&1&0&1&1&1\\ 0&1&1&1&1&1&1\\ 1&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&1&1\\ 1&0&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&0&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{D}_3} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} <1> \\ <2> \\ <12> \\ <3> \\ <13> \\ <23> \\ <123> \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{u}_3}$$

为方便起见，作者在附录中提供了产生 D^{Θ} 的 Matlab① 源代码。这个代码包括对 D^{Θ} 中各个命题进行鉴别，它相当于根据 Smarandache 编码得到的每个单调布尔函数。

2.5 结论

在本章中，作者介绍了在 DSmT 框架下的 Dedekind 格子模型 D^{Θ}（超幂集）的概念，在其上定义了基本的信度赋值，因此称之为自由 DSm 模型。作者证明了该模型必须从处理可能的含糊性概念的实际应用中出发，作为处理信息融合问题新的似是而非理论的发展起点（基础），同时证明了超幂集的复杂性要小于细分框架下幂集 $2^{\Theta_{ref}}$ 的复杂性。此外，作者还给出了超幂集的产生与计算单调布尔函数的 Dedekind 问题之间的联系。最后，作者介绍了产生 D^{Θ} 的理论过程，为进一步方便

① Matlab 是 MathWorks 公司的商标。

用户，附上了该过程的 Matlab 源代码。

参 考 文 献

[1] Church R.，*Numerical analysis of certain free distributive structures*. Duke Math. J.，Vol. 6，no. 3，pp. 732-734. 1940.

[2] Church R.，*Enumeration by rank of the elements of the free distributive lattice with seven generators*，Not. Amer. Math. Soc.，Vol. 12，p. 724，1965.

[3] Comtet L.，*Sperner Systems*，sec. 7. 2 in Advanced Combinatorics：The Art of Finite and Infinite Expansions，D. Reidel Publ. Co.，pp. 271-273. 1974.

[4] Dedekind R. *Über Zerlegungen von Zahlen durch ihre grössten gemeinsammen Teiler*，In Gesammelte Werke，Bd. 1. pp. 103-148，1897.

[5] Dezert J.，*Fondations pour une nouvelle théorie du raisonnement plausible et paradoxal*，ONERA Tech. Rep. RT 1/06769/DTIM，Jan. 2003.

[6] Dezert J.，Smarandache E.，*On the generation of hyper-power sets*，Proc. of Fusion 2003，Cairns，Australia，July 8-11，2003.

[7] Dubois D.，Prade H.，*Representation and combination of uncertainy with belief functions and possi bility measures*，Computational Intelligence，4，pp. 244-264，1988.

[8] Fidytek R.，Mostowski A. W.，Somla R.，Szepietowski A.，*Algorithms counting monotone Boolean functions*，Inform. Proc，Letters，Vol. 79，pp. 203-209，2001.

[9] Goodman I. R.，Mahler R. P. S.，Nguyen H. T.，*Mathematics of Data Fusion*，Kluwer Academic Press，Boston，1997.

[10] Hansel G.，*Sur le nombre des fonctions booléennes monotones de n variables*，C. R. Acad. Sci. Paris，Serie A-B，p. 262，1966.

[11] Kisielewicz A.，*A solution of Dedekind's problem on the number of isotone Boolean functions*，J. reine angew. math.，Vol. 386，pp. 139-144，1988.

[12] Kleitman D.，*On Dedekind's problem：The number of Boolean functions*，Proc. of the Amer. Math Society，Vol. 21，pp. 677-682，1969.

[13] Kleitman D.，Markowsky G.，*On Dedekind's problem：The number of isotone Boolean functions. II*，Trans. of the Amer. Math. Soc.，Vol. 213，1976.

[14] Korshunov A.，*On the number of Boolean functions*，Prob，kibernetiki. Vol. 38. pp. 5-108. 1981.

[15] Pawlak Z.，*Rough Sets：Theoretical Aspects of Reasoning about Data*，Kluwer Academic Publishers，Dortrecht，1991.

[16] Shapiro H. N. *On the counting problem for monotone Boolean funclions*，Comm. on pure and applied math.，Vol. XXIII，pp. 299-312，1970.

[17] Sloane N. J. A.，*The On-line Encyclopedia of Integer Sequences 2003*，(Sequence No. A014466)，http://www. research. att. com/~njas/sequences/.

[18] Tombak M.，Isotamm A.，Tamme T.，*On logical method for counting Dedekind numbers*，Lect. Notes on Comp. Sci.，2138，p. 424-427，Springer-Verlag，2001. www. cs. ut. ee/people/m _ tombak/publ. html.

[19] Triantaphyllou, E., Torvik V. I., *Inference of Monotone Boolean Functions*, Encyclopedia of Opti mization, (P. M. Pardalos and C. Floudas, Eds.), Kluwer Acad. Publi., Boston, Vol. 2, pp. 472-480., 2001.

[20] Ward M., *Note on the order of free distributive lattices*, Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 52, no. 5, p. 423, 1946.

[21] Weisstein E. W., *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*, CRC Press; 2nd edition, 3252 pages, Dec. 2002. http://mathworld.wolfram.com/.

[22] Wiedemann D., *A computation of the eighth Dedekind number*, Order, no. 8, pp. 5-6, 1991.

[23] Yager R. R., *On the Dempster-Shafer Framework and New Combination Rules*, Information Sciences, Vol. 41, pp. 93-137, 1987.

附录:产生超幂集的 Matlab 源代码

```
%*******************************
% Copyright(c)2003 J. Dezert and F. Smarandache
%
% Purpose:Generation of D^Theta for the DSmT for
% Theta={theta _ 1,.. ,Theta _n}. Due to the huge
% # of elements of D^Theta. only cases up to n<7
% are usually tractable on computers.
%*******************************
n=input('Enter _ cardinality _ for _ Theta _(0<n<6)_? ');
% Generation of the Smarandache codification
% Note:this should be implemented using
% character strings for n>9
u _ n=[1];
for nn=2:n
u _ n=[u _ n nn(u _ n*10+nn*ones(1,size(u _ n*10,2)))];
end
% Generation of D _n(isotone boolean functions)
D _ n1=[0;1];
for nn=1:n,D _ n=[];
    for i=1:size(D _ n1,1),Li=D _ n1(i,:);
        for j=1:size(D    n1,1)
         Lj=D _ n1(j,:);Li _ inter _ Lj=and(Li,Lj);
         Li _ union _ Lj=or(Li,Lj);
         if((Li _ inter _ Lj==Li)&(Li _ union _ Lj==Lj))
                D _ n=[D _ n;Li Lj];
         end
        end
    end
D _ nl=D _ n;
end
DD=D _ n;DD(:,1)=[];DD(size(DD,1),:)=[];D _ n=DD;
% Result display
disp(['|Theta|=n=',num2str(n)])
disp(['|D^Theta|=',num2str(size(D _ n,1))])
disp('Elem. _ of _ D^Theta _ are _ obtained _ by _ D _ n*u _ n')
disp(['with _ u _ n=[',num2str(u _ n),']'' _ and'])
D _ n=D _ n
```

第3章　超幂集的部分排序

Jean Dezert
ONERA
29 Av. de la Division Leclerc
92320 Châtillon, France

Florentin Smarandache
Department of Mathematics
University of New Mexico
Gallup, NM 8730, U. S. A

摘要：本章研究DSmT框架下超幂集元素的排序或者部分排序问题，证明排序问题对于获取一个好的且有趣的信度函数矩阵表达结构所具备的优势。

3.1　信度函数的矩阵运算介绍

正如Smets近来在文献[9]中所指出的那样，信度函数的计算往往非常麻烦，因为它的计算方程中含有太多的求和标志以及繁琐的下标。这些方程乍看上去很难阅读和理解，这就使一些潜在读者失去信心，使得他们不会再继续看下去。事实上，这只是表面现象。因为在DST中所遇到的关于信度函数与基本信度赋值$m(\cdot)$的大部分操作都只是简单的线性运算，所以很容易引入矩阵的概念，然后在其上进行基本的处理即可。这里重点介绍以下基本的信度赋值$m(\cdot)$与其信度函数$\mathrm{Bel}(\cdot)$之间关系的矩阵表示，在文献[6,7,9]中可以找到关于信度函数矩阵运算的更透彻详尽的介绍。在DST中，简化矩阵表示和运算的一个重要方面，就是幂集2^Θ元素次序的选择。事实上，可以任意选择2^Θ元素的顺序，用m表示大小为$2^n\times 1$的基本信度赋值向量，用Bel表示同样大小的信度函数向量，根据对于所有的$A\subseteq\Theta$都成立的集合方程式$\mathrm{Bel}(A)=\sum_{B\subseteq A}\boldsymbol{m}(B)$，可以很容易得到下面通用的矩阵方程：

$$\mathrm{Bel}=\mathrm{BM}\cdot\boldsymbol{m}\Leftrightarrow\boldsymbol{m}=\mathrm{BM}^{-1}\cdot\mathrm{Bel}\tag{3.1}$$

式中：BM的内部结构取决于2^Θ元素的列举顺序。这里最简单的形式是列举$0\sim 2^n-1$之间的所有整数来表示幂集中的所有元素，用n个二进制串（其中$n=|\Theta|$）表示整数，其最低位在最右边（LBR）。事实证明，这个编码顺序在矩阵运算中是最有效的，它能够极大地提高Matlab①或其他相似的编程语言[9]的运算效率。在框

① Matlab是MathWorks公司的商标。

架 Θ 下通过选择递增的基本二进制列举方式(也称为 bibe 顺序),可以获得计算矩阵 BM 的 n 维递归运算法则。对于 $|\Theta|=n$ 时的 BM 具体表示,是通过从 $\mathrm{BM}_0 \triangleq [1]$ 利用递归关系式[9]一直迭代到 $i+1=n$ 而得到如下关系式(其中 $\mathbf{0}_{i+1}$ 表示大小为 $(i+1)\times(i+1)$ 的零矩阵):

$$\mathrm{BM}_{i+1}=\begin{bmatrix}\mathrm{BM}_i & \mathbf{0}_{i+1}\\ \mathrm{BM}_i & \mathrm{BM}_i\end{bmatrix} \tag{3.2}$$

BM 是一个二进制幺模矩阵($\det(\mathrm{BM})=\pm 1$),且还是下三角阵以及关于反对角线的对称矩阵。

下面是一个关于框架 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}$ 的例子:

利用 bibe 顺序得到 $2^\Theta=\{\alpha_0,\cdots,\alpha_7\}$ 元素的下列次序:

$$\alpha_0\equiv 000\equiv\varnothing \qquad \alpha_1\equiv 001\equiv\theta_1$$

$$\alpha_4\equiv 100\equiv\theta_3 \qquad \alpha_5\equiv 101\equiv\theta_1\cup\theta_3$$

$$\alpha_2\equiv 010\equiv\theta_2 \qquad \alpha_3\equiv 011\equiv\theta_1\cup\theta_2$$

$$\alpha_6\equiv 110\equiv\theta_2\cup\theta_3 \qquad \alpha_7\equiv 111\equiv\theta_1\cup\theta_2\cup\theta_3\equiv\Theta$$

2^Θ 中的每个元素 α_i 都是由三位字符串组成的。根据上面的 bibe 顺序可以得到 $\boldsymbol{m}=[m(\alpha_0),\cdots,m(\alpha_7)]'$ 与 $\mathrm{Bel}=[\mathrm{Bel}(\alpha_0),\cdots,\mathrm{Bel}(\alpha_7)]'$ 的形式,则矩阵 BM_3 以及它的逆矩阵 $\mathrm{BM}_3{}^{-1}$ 的形式如下:

$$\mathrm{BM}_3=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0&0&0\\1&0&1&0&0&0&0&0\\1&1&1&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&1&0&0&0\\1&1&0&0&1&1&0&0\\1&0&1&0&1&0&1&0\\1&1&1&1&1&1&1&1\end{bmatrix},$$

$$\mathrm{BM}_3{}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0\\-1&1&0&0&0&0&0&0\\-1&0&1&0&0&0&0&0\\1&-1&-1&1&0&0&0&0\\-1&0&0&0&1&0&0&0\\1&-1&0&0&-1&1&0&0\\1&0&-1&0&-1&0&1&0\\-1&1&1&-1&1&-1&-1&1\end{bmatrix}$$

3.2 矩阵运算中超幂集元素的排序

就像在 DST 框架下工作一样，超幂集 D^Θ 元素的顺序也可任意选择。当 $n=|\Theta|$ 时，可以表示 Dedekind 数或 $d(n)\triangleq|D^\Theta|$，用 $\boldsymbol{m}$ 表示大小为 $d(n)\times 1$ 的广义基本信度赋值向量，用 Bel 表示同样大小的广义信度函数向量，根据对所有的 $A\subseteq D^\Theta$ 都成立的方程组 $\mathrm{Bel}(A)=\sum_{B\in D^\Theta,B\subseteq A}\boldsymbol{m}(B)$，可以得到下面通用的矩阵方程：

$$\mathrm{Bel}=\mathrm{BM}\cdot\boldsymbol{m}\Leftrightarrow\boldsymbol{m}=\mathrm{BM}^{-1}\cdot\mathrm{Bel}\tag{3.3}$$

这里注意到，式(3.3)与前面得到的关系式(3.1)有一定的相似性，不同之处仅在于向量 Bel 与 $\boldsymbol{m}$ 的大小、矩阵 BM 的维数以及它的组成部分。下面几节将讨论如何排列(或部分排序)超幂集 D^Θ 中的元素，才能使矩阵 BM 获得更好的结构，并且将简单介绍三种方法：第一种方法是基于前一章和文献[3]中介绍的产生单调布尔函数的方法，直接顺序列举出通过递归运算得到的超幂集 D^Θ 中的元素；第二种(部分地)排列方法是基于 3.2.2 节将要介绍的 DSm 势的概念；对于 D^Θ 元素部分排序的最后一种也是最有趣的一种方法是基于内在信息力度 $s(\cdot)$的概念，它与每个超幂集元素自身密切相关。

3.2.1 基于列举单调布尔函数的排序

第 2 章已经用几个例子阐述了产生 D^Θ 的单调布尔函数的递归运算规则，它是第一种排序方法的基础。令 $\Theta=\{\theta_1,\cdots,\theta_n\}$，它满足 DSm 模型，DSm 排序 $\boldsymbol{u}_n$ 是由 n 个部分交叉的元素 $\theta_i(i=1,\cdots,n)$组成的维恩图 Θ 的 Smarandache 编码，则 D^Θ 中的所有元素可通过简单的线性方程 $\boldsymbol{d}_n=\boldsymbol{D}_n\cdot\boldsymbol{u}_n$ 得到，其中 $\boldsymbol{d}_n\equiv[\alpha_0\equiv\varnothing,\alpha_1,\cdots,\alpha_{d(n)-1}]'$代表 D^Θ 元素的向量，$\boldsymbol{u}_n$ 表示合适的编码向量，$\boldsymbol{D}_n$ 是一个具体的二进制数矩阵。$\boldsymbol{d}_n$ 的最终结果是通过前述的矩阵乘法运算实现的，也就是用($\cup$, $\cap$)代替矩阵运算中的(+，·)，并且 $0\cdot x$ 等于$\varnothing$，$1\cdot x$ 等于 x。$\boldsymbol{D}_n$ 事实上是一个二进制数矩阵，它是通过递归运算(从 $\boldsymbol{D}_0^c=[0\quad 1]'$开始)计算单调(也就是不减的)布尔函数得出的。

- 矩阵 $\boldsymbol{D}_n^c$ 的建立是通过依次并排连接 $\boldsymbol{D}_{n-1}^c$ 的第 r_i 行与 $\boldsymbol{D}_{n-1}^c$ 的任意其他的行 r_j，但要求 $r_i\cup r_j=r_j$，然后去掉 $\boldsymbol{D}_n^c$ 的第一列与最后一行便得到了 $\boldsymbol{D}_n$。

用 $r^{\mathrm{iso}}(\alpha_i)$表示通过前述的列举/产生方法得到的列向量 $\boldsymbol{d}_n$ 中 α_i 的位置，这种方法给出了 D^Θ 元素的一个总的顺序，就像在 D^Θ 上定义了 α_i 领先于α_j 的概念，即 $\alpha_i\prec\alpha_j$，对于 $\forall\alpha_i,\alpha_j\in D^\Theta$，当且仅当 $r^{\mathrm{iso}}(\alpha_i)<r^{\mathrm{iso}}(\alpha_j)$存在时，上式成立。可惜的是，基于以上的顺序，式(3.3)中的 BM 并不具有非常好的结构，因此，必须要寻求排列超幂集元素更好的办法。

3.2.2 基于 DSm 势的排序

另一种排序方法是根据 D^Θ 元素的 DSm 势的递增顺序进行的(部分的)排列。

1. DSm 势的定义

用 $C_{\mathscr{M}}(A)$表示任意元素 $A\in D^\Theta$ 的 DSm 势,它相当于所考虑问题(模型 $\mathscr{M}$)的维恩图中组成 A 的部分的个数。这里的模型在必要的情况下也要将完全约束的情况考虑进去,即根据元素 θ_i 的本质得出的所有可能的交叉情况。这个内在的势取决于模型 $\mathscr{M}$,而包含集合 A 的模型 $\mathscr{M}$ 取决于维恩图的维数(也就是所考虑的框架的势 $n=|\Theta|$),还取决于图中非空交集的数目。这里不能将 $C_{\mathscr{M}}(A)$与一个给定集合 A 的经典的势 $|A|$(也就是它所含有的不同元素的个数)相混淆——这就是我们介绍这个新概念的原因。

2. DSm 势的一些性质

首先,可得到 $1\leqslant C_{\mathscr{M}}(A)\leqslant 2^n-1$。在所有的交集都为非空的自由模型 $\mathscr{M}^f$(也就是 DSm 模型)的(一般的)情形下,可以得到如下交集的 DSm 势:

$$C_{\mathscr{M}^f}(\theta_1)=\cdots=C_{\mathscr{M}^f}(\theta_n)=2^{n-1}$$

$$C_{\mathscr{M}^f}(\theta_i\cap\theta_j)=2^{n-2}(n\geqslant 2)$$

$$C_{\mathscr{M}^f}(\theta_i\cap\theta_j\cap\theta_k)=2^{n-3}(n\geqslant 3)$$

通过归纳可知,当 $1\leqslant m\leqslant n$ 时,$C_{\mathscr{M}^f}(\theta_{i1}\cap\theta_{i2}\cap\cdots\cap\theta_{i_m})=2^{n-m}$。对于 $n=1,2,3,4$ 的情形,可以通过维恩图对这个公式进行验证。假设这个公式对于包含 n 个元素的集合是成立的,现在来证明它对于包含 $n+1$ 个元素的集合(当所有的交集/合取式都是非空时)也是成立的。根据包含 n 个元素的维恩图,如果在其上画一条闭合的曲线,使它切开原图中所有 2^n-1 个部分(结果它把每个部分都分成了两个不同的子部分),便可得到包含 $n+1$ 个元素的维恩图。因而当维恩图的维数从 n 变为 $n+1$ 时,每个交集所含部分的个数都变为原来的两倍。

在自由模型 $\mathscr{M}^f$ 的情形下,也可以得到如下并集的 DSm 势:

$$C_{\mathscr{M}^f}(\theta_i\cup\theta_j)=3(2^{n-2})(n\geqslant 2)$$

$$C_{\mathscr{M}^f}(\theta_i\cup\theta_j)=3(2^{n-2})(n\geqslant 2)$$

$$C_{\mathscr{M}^f}(\theta_i\cup\theta_j\cup\theta_k)=7(2^{n-3})(n\geqslant 3)$$

同样可以通过归纳推证得到,当 $1\leqslant m\leqslant n$ 时,$C_{\mathscr{M}^f}(\theta_{i_1}\cup\theta_{i_2}\cup\cdots\cup\theta_{i_m})=(2^m-1)(2^{n-m})$。其证明过程与上面的相似,可以推断,当维恩图的维数从 n 变为 $n+1$ 时,组成并集 $\theta_i\cup\theta_j\cup\theta_k$ 的每个部分都将被分成两个不同的部分,因此并集所含部分的个数也将翻倍。

对于 D^Θ 中其他的由交集和并集运算得到的集合 A,$C_{\mathscr{M}^f}(A)$的封闭形式看上去很难获得。但是从 D^Θ 的产生规则中,可以得到 D^Θ 中集合 A 的 DSm 势与它在

基 $\boldsymbol{u}_n$ 下系数的和完全相等。这里的系数和等于在矩阵 $\boldsymbol{D}_n$ 中对应行的元素之和，可以通过程序很容易地将它计算出来。DSm 势在广义 Pignistic 变换(GPT)的定义上也发挥着重要的作用，通过 GPT 可以构建 D^Θ 元素的主观/Pignistic 概率，进而对工作在 Pignistic 层上的系统作出决策，这在第 7 章和文献[5]中都有介绍。若对系统强加一个约束使得 D^Θ 中的集合 B 为空集，那么必须要去掉组成集合 B 的部分在 D^Θ 中所对应的列，以及集合 B 和它在 D^Θ 中的所有子集所对应的行，这样便得到了表示新模型 $\mathcal{M}'$ 的一个新矩阵 $\boldsymbol{D}'_n$。在基向量 $\boldsymbol{u}_n$ 上，同样要去掉组成集合 B 的部分，最后得到新基的维数为 $2^n-1-C_{\mathcal{M}}(B)$。

3. $\mathcal{M}^f$ 中 DSm 势的例子

考虑符合自由模型 $\mathcal{M}^f$ 的三维情形 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}$，它对应于如图 3.1 所示维恩图(其中<$i$>中仅属于 θ_i 的部分，<ij>表示仅属于 θ_i 和 θ_j 的部分，依此类推，这实际上是 Smarandache 编码(参见第 2 章)。

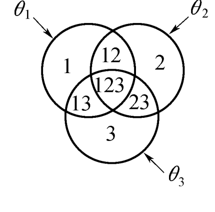


图 3.1 $\mathcal{M}^f$ 的维恩图

此规则在 $\mathcal{M}^f$ 中对应的 D^Θ 元素的部分排序见表 3.1。

表 3.1 自由 DSm 模型 $\mathcal{M}^f$ 的 $C_{\mathcal{M}^f}(A)$

$A\in D^\Theta$	$C_{\mathcal{M}^f}(A)$	$A\in D^\Theta$	$C_{\mathcal{M}^f}(A)$
$\alpha_0\triangleq\varnothing$	0	$\alpha_{10}\triangleq\theta_2$	4
$\alpha_1\triangleq\theta_1\cap\theta_2\cap\theta_3$	1	$\alpha_{11}\triangleq\theta_3$	4
$\alpha_2\triangleq\theta_1\cap\theta_2$	2	$\alpha_{12}\triangleq(\theta_1\cap\theta_2)\cup\theta_3$	5
$\alpha_3\triangleq\theta_1\cap\theta_3$	2	$\alpha_{13}\triangleq(\theta_1\cap\theta_3)\cup\theta_2$	5
$\alpha_4\triangleq\theta_2\cap\theta_3$	2	$\alpha_{14}\triangleq(\theta_2\cap\theta_3)\cup\theta_1$	5
$\alpha_5\triangleq(\theta_1\cup\theta_2)\cap\theta_3$	3	$\alpha_{15}\triangleq\theta_1\cup\theta_2$	6
$\alpha_6\triangleq(\theta_1\cup\theta_3)\cap\theta_2$	3	$\alpha_{16}\triangleq\theta_1\cup\theta_3$	6
$\alpha_7\triangleq(\theta_2\cup\theta_3)\cap\theta_1$	3	$\alpha_{17}\triangleq\theta_2\cup\theta_3$	6
$\alpha_8\triangleq(\theta_1\cap\theta_2)\cup(\theta_1\cap\theta_3)\cup(\theta_2\cap\theta_3)$	4	$\alpha_{18}\triangleq\theta_1\cup\theta_2\cup\theta_3$	7
$\alpha_9\triangleq\theta_1$	4		

可以发现，这里给出的部分排序并没有抓住元素的内在信息结构/力度特征，如对于元素$(\theta_1\cap\theta_2)\cup(\theta_1\cap\theta_3)\cup(\theta_2\cap\theta_3)$与 θ_1，尽管它们具有相同的 DSm 势，但它们看起来并不相似，因为 θ_1 中部分<1>仅属于 θ_1，而$(\theta_1\cap\theta_2)\cup(\theta_1\cap\theta_3)\cup(\theta_2\cap\theta_3)$中的任何一个部分都不是仅属于某个元素 θ_i。我们需要寻求能够抓住元素内在信息结构的排序函数，这就是我们要介绍下一部分内容的原因。

4. 混合 DSm 模型$\mathcal{M}$中 DSm 势的例子

在考虑与上面具有相同的三维情形时的混合 DSm 模型 $\mathcal{M}\neq\mathcal{M}^f$ 下，其中强加的约束为：除了 $\theta_1\cap\theta_2$ 之外，所有的合取式均为空集。它所对应的维恩图如图 3.2 所示。

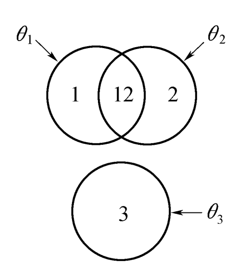


图 3.2　$\mathcal{M}$的维恩图

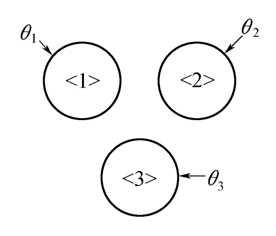
它所对应的 D^Θ 元素的部分排序见表 3.2。

表 3.2　混合 DSm 模型 $\mathcal{M}$ 的 $C_{\mathcal{M}}(A)$

$A\in D^\Theta$	$C_{\mathcal{M}}(A)$	$A\in D^\Theta$	$C_{\mathcal{M}}(A)$
$\alpha_0\triangleq\varnothing$	0	$\alpha_5\triangleq\theta_1\cup\theta_2$	3
$\alpha_1\triangleq\theta_1\cap\theta_2$	1	$\alpha_6\triangleq\theta_1\cup\theta_3$	3
$\alpha_2\triangleq\theta_3$	1	$\alpha_7\triangleq\theta_2\cup\theta_3$	3
$\alpha_3\triangleq\theta_1$	2	$\alpha_8\triangleq\theta_1\cup\theta_2\cup\theta_3$	4
$\alpha_4\triangleq\theta_2$	2		

5. 基于 Shafer 模型的另一个例子

现在同样考虑上述的三维情形，但它在元素 $\theta_i(i=1,2,3)$之间包含所有的排斥性约束。这相当于可用下面的维恩图表示三维 Shafer 模型 $\mathcal{M}^0$。



那么，对于受限制的 D^Θ，可以得到如下所示的元素，以及它们的 DSm 势列表(表 3.3)，很显然它与经典的幂集 2^Θ 相一致。

表 3.3 Shafer 模型 $\mathcal{M}^0$ 的 $C_{\mathcal{M}^0}(A)$

$A\in(D^\Theta\equiv 2^\Theta)$	$C_{\mathcal{M}^0}(A)$	$A\in(D^\Theta\equiv 2^\Theta)$	$C_{\mathcal{M}^0}(A)$
$\alpha_0\triangleq\varnothing$	0	$\alpha_4\triangleq\theta_1\cup\theta_2$	2
$\alpha_1\triangleq\theta_1$	1	$\alpha_5\triangleq\theta_1\cup\theta_3$	2
$\alpha_2\triangleq\theta_2$	1	$\alpha_6\triangleq\theta_2\cup\theta_3$	2
$\alpha_3\triangleq\theta_3$	1	$\alpha_7\triangleq\theta_1\cup\theta_2\cup\theta_3$	3

基于 DSm 势对 D^Θ 元素进行部分排序而得到的矩阵结构特性，与 Smets 在 3.1 节介绍的在 DST 框架下得到的结构完全相反，因而利用上述规则来获得包含在式(3.3)中的矩阵 BM 的有用结构，并不是一个有效的解决办法。最后一节将要介绍的部分排序方法，能够使我们得到好的矩阵结构，以便用于信度函数的矩阵运算。

3.2.3 基于内在信息内容的排序

前面已经得出，DSm 势并不能表示 D^Θ 中每个元素 d_i 的内在信息内容。因而基于一个新的函数 $s(\cdot)$，给出获得该信息的一个更好的方法，即用函数 $s(\cdot)$表示任意元素 $d_i\in D^\Theta$ 的内在信息力度。文献[1,2]已经对 $s(\cdot)$进行过复杂的定义，但是它很难操作，并且在能否等价地表示 D^Θ 元素方面也存在着疑问。

1. 函数 $s(\cdot)$的定义

这里给 $s(\cdot)$提供了一个更好的形式，在维恩图中属于每个元素 $d_i\in D^\Theta$ 之间都存在着一定的关系，而 $s(\cdot)$正是基于对这些关系的简单自然的几何解释建立起来的。在 D^Θ 下，可以将函数 $s(\cdot)$（它被存储在一个向量 $\boldsymbol{s}$ 中）定义为如下等式：

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{D}_n\cdot\boldsymbol{w}_n \tag{3.4}$$

式中：$\boldsymbol{s}\triangleq[s(d_0)\cdots s(d_p)]'$，其中 p 表示所考虑的模型 $\mathcal{M}$ 下 D^Θ 的势，若对框架 $\Theta=\{\theta_1,\cdots,\theta_n\}$选择自由模型 $\mathcal{M}^f$，那么 p 等于 Dedekind 数 $d(n)-1$；$\boldsymbol{D}_n$ 表示超幂集产生矩阵。向量 $\boldsymbol{w}_n$ 的各个分量 w_i 能够通过 DSm 编码基向量 $\boldsymbol{u}_n$ 的各个部分获得，具体过程如下(参见第 2 章有关 $\boldsymbol{D}_n$ 和 $\boldsymbol{u}_n$ 的详细介绍)：

$$w_i\triangleq 1/l(u_i) \tag{3.5}$$

式中：$l(u_i)$代表模型 $\mathcal{M}$ 维恩图中 u_i 部分的 Smarandache 编码长度，也就是编码中所用符号的个数。

例如，如果 $u_i=<123>$，那么 $l(u_i)=3$，这是由于编码 u_i 中只含有三个符号 1、2 和 3，因此 $w_i=1/3$。

根据这个新的 DSm 排序函数 $s(\cdot)$，可以按照 $s(\cdot)$值的递增顺序对元素 $d_i\in$

D^{Θ} 进行部分排序。

2. $\mathscr{M}^f$ 中对 $D^{\Theta=\{\theta_1,\theta_2\}}$ 元素排序的例子

在这个简单的情形下，D^{Θ} 元素的 DSm 排序如下：

$\alpha_i \in D^{\Theta}$	$s(\alpha_i)$
$\alpha_0=\varnothing$	$s(\alpha_0)=0$
$\alpha_1=\theta_1\cap\theta_2$	$s(\alpha_1)=1/2$
$\alpha_2=\theta_1$	$s(\alpha_2)=1+1/2$
$\alpha_3=\theta_2$	$s(\alpha_3)=1+1/2$
$\alpha_4=\theta_1\cup\theta_2$	$s(\alpha_4)=1+1+1/2$

根据以上顺序，可以很容易地验证按照式(3.3)从 $\boldsymbol{m}$ 到信度函数 Bel 的矩阵运算，等同于下面的式子。

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathrm{Bel}(\varnothing) \\ \mathrm{Bel}(\theta_1\cap\theta_2) \\ \mathrm{Bel}(\theta_1) \\ \mathrm{Bel}(\theta_2) \\ \mathrm{Bel}(\theta_1\cup\theta_2) \end{bmatrix}}_{\mathrm{Bel}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathrm{BM}_2} \underbrace{\begin{bmatrix} m(\varnothing) \\ m(\theta_1\cap\theta_2) \\ m(\theta_1) \\ m(\theta_2) \\ m(\theta_1\cup\theta_2) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{m}}$$

式中：矩阵 BM_2 具有很好的结构(下三角阵并具有幺模矩阵特性，且 $\det(\mathrm{BM}_2)=\det(\mathrm{BM}_2^{-1})=1$)。相反地，从 Bel 反向求取广义基本信度赋值 $\boldsymbol{m}$ 可以通过对前面的线性系统方程求逆运算来进行，形式如下：

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m(\varnothing) \\ m(\theta_1\cap\theta_2) \\ m(\theta_1) \\ m(\theta_2) \\ m(\theta_1\cup\theta_2) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{m}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathrm{MB}_2=\mathrm{BM}_2^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathrm{Bel}(\varnothing) \\ \mathrm{Bel}(\theta_1\cap\theta_2) \\ \mathrm{Bel}(\theta_1) \\ \mathrm{Bel}(\theta_2) \\ \mathrm{Bel}(\theta_1\cup\theta_2) \end{bmatrix}}_{\mathrm{Bel}}$$

3. $\mathscr{M}^f$ 中对 $D^{\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}}$ 元素排序的例子

在这个复杂的情形下，D^{Θ} 元素的 DSm 排序如下：

$\alpha_i \in D^{\Theta}, l=0\cdots 18$	$s(\alpha_i)$	$\alpha_i \in D^{\Theta}, l=0\cdots 18$	$s(\alpha_i)$
$\varnothing$	0	θ_2	1/3+1/2+1/2+1
$\theta_1\cap\theta_2\cap\theta_3$	1/3	θ_3	1/3+1/2+1/2+1

（续）

$\alpha_i \in D^\Theta, l=0\cdots18$	$s(\alpha_i)$	$\alpha_i \in D^\Theta, l=0\cdots18$	$s(\alpha_i)$
$\theta_1 \cap \theta_2$	1/3+1/2	$(\theta_1 \cap \theta_2) \cup \theta_3$	1/3+1/2+1/2+1+1/2
$\theta_1 \cap \theta_3$	1/3+1/2	$(\theta_1 \cap \theta_3) \cup \theta_2$	1/3+1/2+1/2+1+1/2
$\theta_2 \cap \theta_3$	1/3+1/2	$(\theta_2 \cap \theta_3) \cup \theta_1$	1/3+1/2+1/2+1+1/2
$(\theta_1 \cup \theta_2) \cap \theta_3$	1/3+1/2+1/2	$\theta_1 \cup \theta_2$	1/3+1/2+1/2+1+1/2+1
$(\theta_1 \cup \theta_3) \cap \theta_2$	1/3+1/2+1/2	$\theta_1 \cup \theta_3$	1/3+1/2+1/2+1+1/2+1
$(\theta_2 \cup \theta_3) \cap \theta_1$	1/3+1/2+1/2	$\theta_2 \cup \theta_3$	1/3+1/2+1/2+1+1/2+1
$(\theta_1 \cap \theta_2) \cup (\theta_1 \cap \theta_3) \cup (\theta_2 \cap \theta_3)$	1/3+1/2+1/2+1/2	$\theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3$	1/3+1/2+1/2+1+1/2+1+1
θ_1	1/3+1/2+1/2+1		

通过函数 $s(\cdot)$所产生的具有相同值元素的顺序可以任意选择，这并不改变后面将要给出的矩阵 BM_3 的结构，这就是根据 $s(\cdot)$而进行的部分排序可行的原因。在这里可以验证矩阵 BM_3 也具有前面所介绍的有趣结构形式与性质，并且 $\det(BM_3)=\det(BM_3^{-1})=1$。根据函数 $s(\cdot)$处理更高维($n>3$)的问题同样能够产生相似的矩阵结构。

尽管已经得到用于信度函数计算的有趣结构形式的矩阵，但是和 DST 框架下 BM_n 的递归创建不同，我们至今还没有找到从 BM_{n-1} 到 BM_n(对于维数为 n 的情况)的递归运算法则(如果这种递归运算存在的话)，所以这依然是一个需要深入研究的难题。

$$BM_3 = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix}$$

3.3 结论

在本章中，为了获得在 DSmT 框架下信度函数有趣的矩阵表示形式，我们分析了几个问题。这里介绍了三种方式来对超幂集 D^{Θ} 中的元素进行排序：第一种，直接列举单调布尔函数的方法；第二种，基于 DSm 势的方法；第三种，也是最有趣的一种，是依据我们所介绍的基于 DSm 编码构建的内在信息力度函数 $s(\cdot)$的方法。采用第三种排序方法，能够得到较好的内在结构形式的过渡矩阵 BM，从而能够直接、方便地通过程序从基本信度赋值向量 $\boldsymbol{m}$ 计算出信度函数向量 Bel，或者通过 BM 的逆矩阵从 Bel 反向计算出 $\boldsymbol{m}$。

参 考 文 献

[1] Dezert J. ,*Foundations for a New Theory of Plausiblc and Paradoxical Reasoning*,Information and Security Journal,Edited by Tz. Semerdjiev,ProCon Ltd. . Sofia,Bulgaria,Vol. 9,pp. 13-57,2002.

[2] Dezert. J. ,*Fondations pour une nouxelle théorie du raisonnement plausible et paradoxal*,ONERA Tech. Rep. RT 1/06769/DTIM,Jan. 2003.

[3] Dezert J. ,Smarandache F. ,*On the generation of hyper-power sets for the DSmT*,Proc. of the 6th Int. Conf. of inf. fusion(Fusion 2003),Cairns,Australia,July 8-11,2003.

[4] Dezert J. ,Smarandache F. ,*Partial ordering of hyper-power sets and matrix representation of belief functions within DSmT*. Proc. of the 6th Int. Conf. on inf. fusion(Fusion 2003),Cairns,Australia,July 8-11,2003

[5] Dezert J. ,Smarandache F. ,Daniel M. ,*The Generalized Pignistic Transformation*,Proc. of 7th Int. . Conf. on Inf. Fusion,Fusion 2004,Stockholm,Sweden,July 2004.

[6] Kennes R. ,Smets Ph. ,*Fast algorithms for Dempster-Shafer theory*,in Uncertainty in Knowledge Bases,B. Bouchon-Meunier,R. R. Yager,L. A. Zadeh(Editors),Lecture Notes in Computer Science 521,Springer-Verlag,Berlin,pp. 14-23,1991.

[7] Kennes R. ,*Computational Aspects of the Möbius Transformation of Graphs*,IEEE Trans. on SMC. 22,pp. 201-223,1992.

[8] Shafer G. ,*A Mathematical Theory of Evidence*,Princeton Univ. Press,Princeton,NJ,1976.

[9] Smets Ph. ,*Matrix Calculus for Belief Functions*,http://iridia,ulb. ac. be/~psmets/MatrixRepresentation. pdf.

第 4 章　混合 DSm 模型的组合规则

Jean Dezert
ONERA
29 Av. de la Division Leclerc
92320 Châtillon,France

Florentin Smarandache
Department of Mathematics
University of New Mexico
Gallup,NM 8730,U. S. A

摘要:本章介绍一种通用的方法来解决一类广泛存在的不确定和自相矛盾结合的(即高度冲突的)证据源融合问题。本章从 DSmT 的基础着手,展示混合 DSm 组合规则是如何通过考虑问题的所有可能的完全约束(如果有)来扩展的,这些约束源于问题所涉及的本质要素/概念;证明 Shafer 模型如何被看作是一个特定的混合 DSm 模型,且可以很容易被 DSmT 处理;并且,提出 Dempster 组合规则的一个新的有效替代规则,该规则遵循以往研究人员面对这个问题的处理步骤;最后提供几个简单的例子来说明所建议的方法的效率和通用性。

4.1　引言

根据发生在现实世界中每个融合问题的模型,介绍一种通用的混合 DSm 组合规则来融合两个或两个以上的独立证据源,同时考虑约束集,即它可能在某个时刻 t_l 成为空集,而在时刻 t_{l+1} 可能有新集合/命题加入该框架。当超幂集 D^Θ 发生变化(即所有命题的集合,由框架 Θ 的命题以及通过 $\cup$ 和 $\cap$ 操作组成的命题,详见文献[3])时,例如超幂集或 Θ 中命题的个数增加或减少时,混合 DSm 规则的实时应用,说明 DSmT 能处理动态融合问题。

本章介绍给读者的独立证据源,需要今后更深入的研究,定义的混合 DSm 模型和组合规则与其他组合规则(如 Dempster’s、Yager’s、Smets’、Dubois-Prade’s)不同,并给出七个在不同模型下应用混合 DSm 组合规则的数值实例,同时运用几个实例来说明 DSmT 的动态性,最后给出贝叶斯与混合 DSm 模型的混合产物。

4.2 关于独立证据源

独立证据源的概念在有效的信息融合算法中扮演了极为重要的角色，但是当操纵不确定和自相矛盾（即高度冲突）的信息时，要正式地建立这个概念却很困难，一些界定独立证据源的尝试已由 P. Smets 等人在 Dempster－Shafer Theory (DST)和传递信度模型 TBM[12－14]及其他可能性理论[1,2,5,8,10]中提出 。我们认为，n 个证据源是独立的，如果证据源的内部机制使每个证据源提供自己的基本信度赋值并不取决于其他证据源的机制（即不存在内部的所有机制之间的关系），或者如果证据源不共享（哪怕是部分）同样的知识/经验，以建立自己的基本信度赋值。本定义不排除独立的消息来源提供相同的（数值）基本信度赋值的可能。非独立的不确定和自相自相矛盾证据源的融合问题更为复杂，它必须首先准确地鉴别信息源间的冗余信息，以便将其删除，再应用融合规则。融合非独立证据源的问题仍在研究中。

4.3 自由 DSm 模型的组合规则

4.3.1 自由 DSm 模型的定义

假设正在考虑的融合问题的有限框架，$\Theta=\{\theta_1,\cdots,\theta_n\}$，元素 $\theta_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的本质属性是模糊/不精确/相对的，即非 Shafer 模型。我们也假设没有细分框架 Θ 细分成新的互相排斥的鉴别框 Θ_{ref} 是可能的，这就是自由 DSm 模型 $\mathcal{M}^f(\Theta)$，它可以被看作是反对（如果不引入非存在的制约因素，见下一节）Shafer 模型 $\mathcal{M}^0(\Theta)$ 的，其中在 Shafer 模型中，所有 θ_i 被强制具有排斥性，是完全可辨别的。

4.3.2 自由 DSm 模型实例

考虑问题框架为 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}$，基于 Θ 的自由 Dedekind 格子模型 $D^\Theta=\{\alpha_0,\cdots,\alpha_{18}\}$ 拥有如下 19 个命题（见第 2 章）。

Elements of D^Θ for $\mathcal{M}^f(\Theta)$	
$\alpha_0\triangleq\varnothing$	
$\alpha_1\triangleq\theta_1\cap\theta_2\cap\theta_3\neq\varnothing$	$\alpha_{10}\triangleq\theta_2\neq\varnothing$
$\alpha_2\triangleq\theta_1\cap\theta_2\neq\varnothing$	$\alpha_{11}\triangleq\theta_3\neq\varnothing$
$\alpha_3\triangleq\theta_1\cap\theta_3\neq\varnothing$	$\alpha_{12}\triangleq(\theta_1\cap\theta_2)\cup\theta_3\neq\varnothing$
$\alpha_4\triangleq\theta_2\cap\theta_3\neq\varnothing$	$\alpha_{13}\triangleq(\theta_1\cap\theta_3)\cup\theta_2\neq\varnothing$

（续）

Elements of D^{Θ} for $\mathcal{M}^{f}(\Theta)$	
$\alpha_5 \triangleq (\theta_1 \cup \theta_2) \cap \theta_3 \neq \varnothing$	$\alpha_{14} \triangleq (\theta_2 \cap \theta_3) \cup \theta_1 \neq \varnothing$
$\alpha_6 \triangleq (\theta_1 \cup \theta_3) \cap \theta_2 \neq \varnothing$	$\alpha_{15} \triangleq \theta_1 \cup \theta_2 \neq \varnothing$
$\alpha_7 \triangleq (\theta_2 \cup \theta_3) \cap \theta_1 \neq \varnothing$	$\alpha_{16} \triangleq \theta_1 \cup \theta_3 \neq \varnothing$
$\alpha_8 \triangleq (\theta_1 \cap \theta_2) \cup (\theta_1 \cap \theta_3) \cup (\theta_2 \cap \theta_3) \neq \varnothing$	$\alpha_{17} \triangleq \theta_2 \cup \theta_3 \neq \varnothing$
$\alpha_9 \triangleq \theta_1 \neq \varnothing$	$\alpha_{18} \triangleq \theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3 \neq \varnothing$

自由 DSm 模型 $\mathcal{M}^{f}(\Theta)$假设所有的命题 $\alpha_i(i>0)$是非空的。这与如图 4.1 所示的维恩图相符，其中在 Smarandache 条件下的“i”指示了图中的部分仅属于 θ_i，“ij”指示了该部分仅属于 θ_i 和 θ_j，“ijk”指示了该部分仅属于 θ_i、θ_j 和 θ_k，依此类推[3]。根据维恩图表示的模型，我们必须强调的一点，即所有交接边界必须被看作/解释为模糊的边界，这是由于命题 θ_i 的模糊、相对甚至不精确的本质属性所决定的（见第 6 章）。

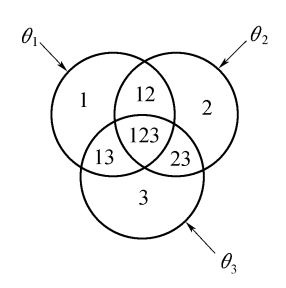


图 4.1　自由 DSm 的维恩图

由于自由 DSm 模型包含在混合 DSm 模型中，这里回顾基于 $\mathcal{M}^{f}(\Theta)$模型的经典 DSm 组合规则，它源于 Dedekind 格子模型，通过 Θ 中的命题及它们在$\cap$和$\cup$运算得到的命题生成的空间，即 D^{Θ}。

4.3.3　有两个证据源的自由 DSm 模型经典 DSm 规则

对于两个独立的不确定和自相矛盾（即高度冲突）的信息源（证据体/证据专家），提供基于 D^{Θ}（或 D^{Θ} 子集）的广义基本信度赋值 $m_1(\cdot)$和 $m_2(\cdot)$，则经典的 DSm 组合规则 $m_{\mathcal{M}_f(\Theta)}(\cdot) \triangleq [m_1 \oplus m_2](\cdot)$定义如下：

$$\forall A \neq \varnothing \in D^{\Theta}, m_{\mathcal{M}^f(\Theta)}(A) \triangleq [m_1 \oplus m_2](A) = \sum_{\substack{X_1, X_2 \in D^{\Theta} \\ (X_1 \cap X_2) = A}} m_1(X_1) m_2(X_2) \tag{4.1}$$

这里定义 $m_{\mathscr{M}^f(\Theta)}(\varnothing)=0$，除非另有说明，在某些特殊情况下，某些源指派一个非零值给它（如 Smets TBM 方法[9]）。该 DSm 组合规则符合交换和结合律。这条规则在处理两个不确定和相互自相矛盾/冲突的证据组合时，无需归一化处理。

4.3.4 有两个以上证据源的经典 DSm 规则

对有两个以上证据源的自由 DSm 模型 $\mathscr{M}^f(\theta)$，$k\geqslant 2$ 的组合规则很容易从上面的公式扩展而来，即

$$\forall A\neq\varnothing\in D^\Theta,m_{\mathscr{M}^f(\Theta)}(A)\triangleq[m_1\oplus\cdots m_k](A)=\sum_{\substack{X_1,\cdots,X_k\in D^\Theta\\(X_1\cap\cdots\cap X_k)=A}}\prod_{i=1}^{k}m_i(X_i) \tag{4.2}$$

通过定义 $m_{\mathscr{M}^f(\Theta)}(\varnothing)=0$，除非另有说明，在某些特殊情况下，某些源指派一个非零值给它。这个 DSm 规则同样符合交换率和结合率。

4.4 混合 DSm 模型的表示

4.4.1 定义

令 Θ 为所考虑融合问题的一般框架，它含有 n 个命题 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n$。混合 DSm 模型 $\mathscr{M}(\Theta)$ 是从自由 DSm 模型 $\mathscr{M}^f(\Theta)$ 通过在 D^Θ 的一些命题 A 中引入一些完全约束来定义的，前提是知道与所考虑问题相对应模型的准确本质。一个关于 A 的完全约束是由强制 A 为空集（空命题）组成，这里用 $A\overset{\mathscr{M}}{\equiv}\varnothing$ 来表示。它意味着 A 已经通过模型 $\mathscr{M}(\Theta)$ 被强制转换为 $\varnothing$。事实上，在一些融合问题中，一些 Θ 中的命题 θ_i 和 θ_j 可以被完全辨别，因为它们是相互排斥的，同时其他命题不能被细分成相互排斥的命题。由于某些原因，关于该问题的一些新知识的引入，使得一个或者几个命题 θ_i 不得不被强制转化为空集（特别是在一些动态融合问题中，即 Θ 随空间和时间改变时）。例如，考虑三个嫌疑人被调查的问题，可能发生如下情况：在调查中，一个嫌疑犯如果被可信的证据证明他的清白，就可以被排除出初始问题框架。关于三个嫌疑人的证据源提供的初始基本信度赋值，必须通过考虑在该问题模型下新知识的引入而进行修正。

假设存在几种可能的完全约束，可以被引入到任何自由 DSm 模型中。第一种完全约束是关于排斥性约束，它认为命题 $\theta_1,\cdots,\theta_k$ 的交集确实是不可能的（即 $\theta_i\cap\cdots\cap\theta_k\overset{\mathscr{M}}{\equiv}\varnothing$）。第二种完全约束是关于非存在性约束，它认为一些命题的并集

是绝对不存在的(即 $\theta_i \cup \cdots \cup \theta_k \overset{\mathcal{M}}{\equiv} \varnothing$)。这里排除了与约束 $\theta_1 \cup \cdots \cup \theta_n \overset{\mathcal{M}}{\equiv} \varnothing$(完全未知)相对应的完全退化情况,因为没有方法也没有必要来解决这样的空问题。在这样的退化情况中,可以令 $m(\varnothing) \triangleq 1$,这是没有任何作用的。这是因为这个问题依然是空的,即 D^Θ 中的命题减小到$\varnothing$。最后一种可能的完全约束是前两种情况的混合,如$(\theta_i \cap \theta_j) \cup \theta_k$ 一例,或者在涉及的 D^Θ 中任何其他包含$\cup$和$\cap$运算的混合命题中,至少有一个命题 θ_k 是约束命题的子集。从任何 $\mathcal{M}^f(\Theta)$,可以建立几个混合 DSm 模型,这依赖充分刻画问题本质属性的完全约束的数量。一个给定完全约束 $A \overset{\mathcal{M}}{\equiv} \varnothing \in D^\Theta$ 的引入,对所有的 $B \subset A$ 必然地暗示了内部约束集 $B \overset{\mathcal{M}}{\equiv} \varnothing$。另外,两个完全约束的引入,如 D^Θ 中的 A 和 B 必然地暗示了析取 $A \cup B$(因为在$\cup$和$\cap$操作下 D^Θ 的封闭性,它也属于 D^Θ)上的约束。这暗示着所有$C \in D^\Theta$,$C \subset (A \cup B)$属于空集。类似的情况,也可以扩展到引入 n 个完全约束的情形。Shafer 模型是唯一的最大约束的混合 DSm 模型,这是因为它包含所有可能的排斥性约束而没有非存在性约束,所有的 $\theta_i \neq \varnothing \in \Theta$ 被强制为相互排斥的。继而用 $\mathcal{M}^0(\Theta)$表示 Shafer 模型。在混合 DSm 模型 $\mathcal{M}$ 中,已经强制转化为空的 D^Θ 中的命题集用$\varnothing_{\mathcal{M}}$表示。

4.4.2 例 1:带有一个排斥性约束的混合 DSm 模型

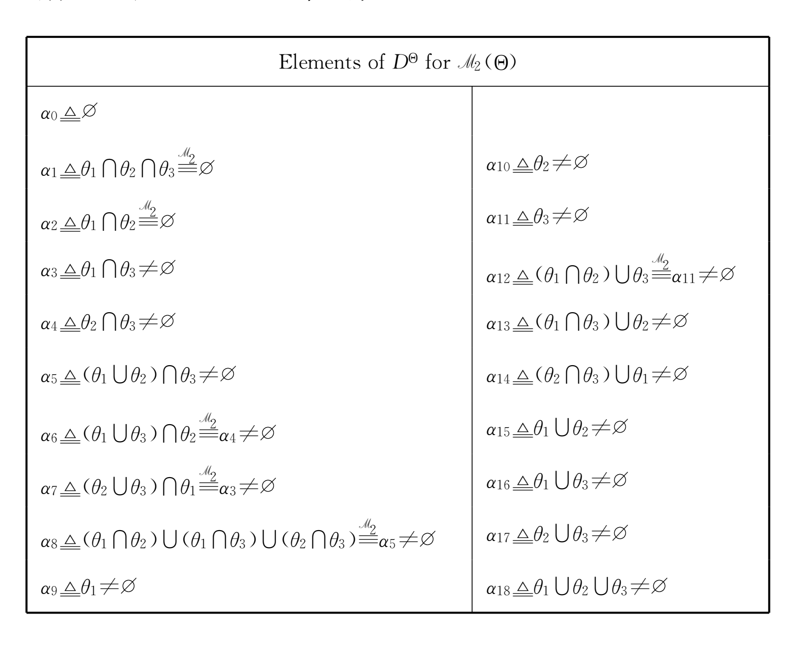
令 $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$是所考虑问题的一般框架,考虑引入排斥性约束 $\alpha_1 \triangleq \theta_1 \cap \theta_2 \cap \theta_3 \overset{\mathcal{M}_1}{\equiv} \varnothing$ 的混合 DSm 模型 $\mathcal{M}_1(\Theta)$。这个排斥性约束暗示没有其他约束,即 α_1 除了自身外不包含 D^Θ 中的其他命题,因此,可以有如下的 D^Θ 命题集。

Elements of D^Θ for $\mathcal{M}_1(\Theta)$	
$\alpha_0 \triangleq \varnothing$	
$\alpha_1 \triangleq \theta_1 \cap \theta_2 \cap \theta_3 \overset{\mathcal{M}_1}{\equiv} \varnothing$	$\alpha_{10} \triangleq \theta_2 \neq \varnothing$
$\alpha_2 \triangleq \theta_1 \cap \theta_2 \neq \varnothing$	$\alpha_{11} \triangleq \theta_3 \neq \varnothing$
$\alpha_3 \triangleq \theta_1 \cap \theta_3 \neq \varnothing$	$\alpha_{12} \triangleq (\theta_1 \cap \theta_2) \cup \theta_3 \neq \varnothing$
$\alpha_4 \triangleq \theta_2 \cap \theta_3 \neq \varnothing$	$\alpha_{13} \triangleq (\theta_1 \cap \theta_3) \cup \theta_2 \neq \varnothing$
$\alpha_5 \triangleq (\theta_1 \cup \theta_2) \cap \theta_3 \neq \varnothing$	$\alpha_{14} \triangleq (\theta_2 \cap \theta_3) \cup \theta_1 \neq \varnothing$
$\alpha_6 \triangleq (\theta_1 \cup \theta_3) \cap \theta_2 \neq \varnothing$	$\alpha_{15} \triangleq \theta_1 \cup \theta_2 \neq \varnothing$
$\alpha_7 \triangleq (\theta_2 \cup \theta_3) \cap \theta_1 \neq \varnothing$	$\alpha_{16} \triangleq \theta_1 \cup \theta_3 \neq \varnothing$
$\alpha_8 \triangleq (\theta_1 \cap \theta_2) \cup (\theta_1 \cap \theta_3) \cup (\theta_2 \cap \theta_3) \neq \varnothing$	$\alpha_{17} \triangleq \theta_2 \cup \theta_3 \neq \varnothing$
$\alpha_9 \triangleq \theta_1 \neq \varnothing$	$\alpha_{18} \triangleq \theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3 \neq \varnothing$

因此，初始基本信度赋值必须被传递到新约束条件下的拥有如上 18 个命题（实际包括 17 个非空命题）的超幂集 $D^\Theta(\mathcal{M}_1(\Theta))$上。从 D^Θ 到 $D^\Theta(\mathcal{M}_1(\Theta))$的基本信度赋值传递机制是通过下面将要介绍的混合 DSm 组合规则实现的。

4.4.3 例 2：带有其他排斥性约束的混合 DSm 模型

作为混合 DSm 模型 $\mathcal{M}_2(\Theta)$的第二个实例，考虑 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}$，且带有排斥性约束 $\alpha_2 \triangleq \theta_1 \cap \theta_2 \overset{\mathcal{M}_2}{\equiv} \varnothing$ 。这个排斥性约束同时暗示了 $\alpha_1 \triangleq \theta_1 \cap \theta_2 \cap \theta_3 \overset{\mathcal{M}_2}{\equiv} \varnothing$，由于 $\alpha_1 \subset \alpha_2$，因此有如下的 $D^\Theta(\mathcal{M}_2(\Theta))$命题集。



Elements of D^Θ for $\mathcal{M}_2(\Theta)$	
$\alpha_0 \triangleq \varnothing$	
$\alpha_1 \triangleq \theta_1 \cap \theta_2 \cap \theta_3 \overset{\mathcal{M}_2}{\equiv} \varnothing$	$\alpha_{10} \triangleq \theta_2 \neq \varnothing$
$\alpha_2 \triangleq \theta_1 \cap \theta_2 \overset{\mathcal{M}_2}{\equiv} \varnothing$	$\alpha_{11} \triangleq \theta_3 \neq \varnothing$
$\alpha_3 \triangleq \theta_1 \cap \theta_3 \neq \varnothing$	$\alpha_{12} \triangleq (\theta_1 \cap \theta_2) \cup \theta_3 \overset{\mathcal{M}_2}{\equiv} \alpha_{11} \neq \varnothing$
$\alpha_4 \triangleq \theta_2 \cap \theta_3 \neq \varnothing$	$\alpha_{13} \triangleq (\theta_1 \cap \theta_3) \cup \theta_2 \neq \varnothing$
$\alpha_5 \triangleq (\theta_1 \cup \theta_2) \cap \theta_3 \neq \varnothing$	$\alpha_{14} \triangleq (\theta_2 \cap \theta_3) \cup \theta_1 \neq \varnothing$
$\alpha_6 \triangleq (\theta_1 \cup \theta_3) \cap \theta_2 \overset{\mathcal{M}_2}{\equiv} \alpha_4 \neq \varnothing$	$\alpha_{15} \triangleq \theta_1 \cup \theta_2 \neq \varnothing$
$\alpha_7 \triangleq (\theta_2 \cup \theta_3) \cap \theta_1 \overset{\mathcal{M}_2}{\equiv} \alpha_3 \neq \varnothing$	$\alpha_{16} \triangleq \theta_1 \cup \theta_3 \neq \varnothing$
$\alpha_8 \triangleq (\theta_1 \cap \theta_2) \cup (\theta_1 \cap \theta_3) \cup (\theta_2 \cap \theta_3) \overset{\mathcal{M}_2}{\equiv} \alpha_5 \neq \varnothing$	$\alpha_{17} \triangleq \theta_2 \cup \theta_3 \neq \varnothing$
$\alpha_9 \triangleq \theta_1 \neq \varnothing$	$\alpha_{18} \triangleq \theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3 \neq \varnothing$

注意：在这种情形下，$D^\Theta(\mathcal{M}_2(\Theta))$的一些非空命题由于约束的存在是一致的（$\alpha_6 \overset{\mathcal{M}_2}{\equiv} \alpha_4$，$\alpha_7 \overset{\mathcal{M}_2}{\equiv} \alpha_3$，$\alpha_8 \overset{\mathcal{M}_2}{\equiv} \alpha_5$，$\alpha_{12} \overset{\mathcal{M}_2}{\equiv} \alpha_{11}$）。$D^\Theta(\mathcal{M}_2(\Theta))$现在只有 13 个不同的命题。由于 $\alpha_1 \subset \alpha_2$，同时引入约束 $\alpha_1 \triangleq \theta_1 \cap \theta_2 \cap \theta_3 \overset{\mathcal{M}_2}{\equiv} \varnothing$ 和 $\alpha_2 \triangleq \theta_1 \cap \theta_2 \overset{\mathcal{M}_2}{\equiv} \varnothing$ 并不会改变 $D^\Theta(\mathcal{M}_2(\Theta))$的构建。

4.4.4 例 3：带有其他排斥性约束的混合 DSm 模型

作为第三个混合 DSm 模型 $\mathcal{M}_3(\theta)$的实例，考虑 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}$和排斥性约束 $\alpha_6 \triangleq (\theta_1 \cup \theta_3) \cap \theta_2 \overset{\mathcal{M}_0}{\equiv} \varnothing$ 。$\alpha_1 \subset \alpha_6$ 暗示了 $\alpha_1 \triangleq \theta_1 \cap \theta_2 \cap \theta_3 \overset{\mathcal{M}_9}{\equiv} \varnothing$；$\alpha_2 \subset \alpha_6$ 暗示了 $\alpha_2 \triangleq \theta_1 \cap \theta_2 \overset{\mathcal{M}_3}{\equiv} \varnothing$；由于 $\alpha_4 \subset \alpha_6$，于是 $\alpha_4 \triangleq \theta_2 \cap \theta_3 \overset{\mathcal{M}_3}{\equiv} \varnothing$，因此 $D^\Theta(\mathcal{M}_3(\Theta))$有如下的命题集。

Elements of D^{Θ} for $\mathscr{M}_3(\Theta)$	
$\alpha_0 \triangleq \varnothing$	
$\alpha_1 \triangleq \theta_1 \cap \theta_2 \cap \theta_3 \overset{\mathscr{M}_9}{\equiv} \varnothing$	$\alpha_{10} \triangleq \theta_2 \neq \varnothing$
$\alpha_2 \triangleq \theta_1 \cap \theta_2 \overset{\mathscr{M}_3}{\equiv} \varnothing$	$\alpha_{11} \triangleq \theta_3 \neq \varnothing$
$\alpha_3 \triangleq \theta_1 \cap \theta_3 \neq \varnothing$	$\alpha_{12} \triangleq (\theta_1 \cap \theta_2) \cup \theta_3 \overset{\mathscr{M}_9}{\equiv} \alpha_{11} \neq \varnothing$
$\alpha_4 \triangleq \theta_2 \cap \theta_3 \overset{\mathscr{M}_9}{\equiv} \varnothing$	$\alpha_{13} \triangleq (\theta_1 \cap \theta_3) \cup \theta_2 \neq \varnothing$
$\alpha_5 \triangleq (\theta_1 \cup \theta_2) \cap \theta_3 \overset{\mathscr{M}_9}{\equiv} \alpha_3 \neq \varnothing$	$\alpha_{14} \triangleq (\theta_2 \cap \theta_3) \cup \theta_1 \overset{\mathscr{M}_9}{\equiv} \alpha_9 \neq \varnothing$
$\alpha_6 \triangleq (\theta_1 \cup \theta_3) \cap \theta_2 \overset{\mathscr{M}_9}{\equiv} \varnothing$	$\alpha_{15} \triangleq \theta_1 \cup \theta_2 \neq \varnothing$
$\alpha_7 \triangleq (\theta_2 \cup \theta_3) \cap \theta_1 \overset{\mathscr{M}_9}{\equiv} \alpha_3 \neq \varnothing$	$\alpha_{16} \triangleq \theta_1 \cup \theta_3 \neq \varnothing$
$\alpha_8 \triangleq (\theta_1 \cap \theta_2) \cup (\theta_1 \cap \theta_3) \cup (\theta_2 \cap \theta_3) \overset{\mathscr{M}_9}{\equiv} \alpha_5 \neq \varnothing$	$\alpha_{17} \triangleq \theta_2 \cup \theta_3 \neq \varnothing$
$\alpha_9 \triangleq \theta_1 \neq \varnothing$	$\alpha_{18} \triangleq \theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3 \neq \varnothing$

$D^{\Theta}(\mathscr{M}_3(\Theta))$现在只有 10 个不同的命题。

4.4.5 例 4:Shafer 模型

作为混合 DSm 模型 $\mathscr{M}_4(\theta)$的第四个特殊的实例,考虑 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}$和排斥性约束 $\alpha_8 \triangleq \{(\theta_1 \cap \theta_2) \cup \theta_3\} \cap (\theta_1 \cup \theta_2) \overset{\mathscr{M}_4}{\equiv} \varnothing$,得到 $D^{\Theta}(\mathscr{M}_4(\Theta))$如下的命题集。

Elements of D^{Θ} for $\mathscr{M}_4(\Theta)$ (Shafer's model)	
$\alpha_0 \triangleq \varnothing$	
$\alpha_1 \triangleq \theta_1 \cap \theta_2 \cap \theta_3 \overset{\mathscr{M}_4}{\equiv} \varnothing$	$\alpha_{10} \triangleq \theta_2 \neq \varnothing$
$\alpha_2 \triangleq \theta_1 \cap \theta_2 \overset{\mathscr{M}_4}{\equiv} \varnothing$	$\alpha_{11} \triangleq \theta_3 \neq \varnothing$
$\alpha_3 \triangleq \theta_1 \cap \theta_3 \overset{\mathscr{M}_4}{\equiv} \varnothing$	$\alpha_{12} \triangleq (\theta_1 \cap \theta_2) \cup \theta_3 \overset{\mathscr{M}_4}{\equiv} \alpha_{11} \neq \varnothing$
$\alpha_4 \triangleq \theta_2 \cap \theta_3 \overset{\mathscr{M}_4}{\equiv} \varnothing$	$\alpha_{13} \triangleq (\theta_1 \cap \theta_3) \cup \theta_2 \overset{\mathscr{M}_4}{\equiv} \alpha_{10} \neq \varnothing$
$\alpha_5 \triangleq (\theta_1 \cup \theta_2) \cap \theta_3 \overset{\mathscr{M}_4}{\equiv} \varnothing$	$\alpha_{14} \triangleq (\theta_2 \cap \theta_3) \cup \theta_1 \overset{\mathscr{M}_4}{\equiv} \alpha_9 \neq \varnothing$
$\alpha_6 \triangleq (\theta_1 \cup \theta_3) \cap \theta_2 \overset{\mathscr{M}_4}{\equiv} \varnothing$	$\alpha_{15} \triangleq \theta_1 \cup \theta_2 \neq \varnothing$
$\alpha_7 \triangleq (\theta_2 \cup \theta_3) \cap \theta_1 \overset{\mathscr{M}_4}{\equiv} \varnothing$	$\alpha_{16} \triangleq \theta_1 \cup \theta_3 \neq \varnothing$
$\alpha_8 \triangleq (\theta_1 \cap \theta_2) \cup (\theta_1 \cap \theta_3) \cup (\theta_2 \cap \theta_3) \overset{\mathscr{M}_4}{\equiv} \varnothing$	$\alpha_{17} \triangleq \theta_2 \cup \theta_3 \neq \varnothing$
$\alpha_9 \triangleq \theta_1 \neq \varnothing$	$\alpha_{18} \triangleq \theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3 \neq \varnothing$

这个模型事实上与 Shafer 模型 $\mathcal{M}^0(\Theta)$一致，因为这个约束包括了命题 $\theta_i(i=1,2,3)$所有可能的排斥性约束。由于 $\alpha_1\triangleq\theta_1\cap\theta_2\cap\theta_3\subset\alpha_8$，$\alpha_2\triangleq\theta_1\cap\theta_2\subset\alpha_8$，$\alpha_3\triangleq\theta_1\cap\theta_3\subset\alpha_8$ 且 $\alpha_4\triangleq\theta_2\cap\theta_3\subset\alpha_8$，$D^\Theta(\mathcal{M}_4(\Theta))$现在只有 $2^{|\Theta|}=8$ 个不同的命题，并且与典型的幂集一致。这个模型与 Shafer 模型相一致，是 Dempster－Shafer 理论的基础。

4.4.6 例 5:带有一个非存在性约束的混合 DSm 模型

作为混合 DSm 模型 $D^\Theta(\mathcal{M}_5(\Theta))$的第五个实例，考虑 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}$和非存在性约束 $\alpha_9\triangleq\theta_1\overset{\mathcal{M}_5}{\equiv}\varnothing$，即从初始框架 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}$中移除了 θ_1。这个非存在性约束暗示了 $\alpha_1\triangleq\theta_1\cap\theta_2\cap\theta_3\overset{\mathcal{M}_5}{\equiv}\varnothing$，$\alpha_2\triangleq\theta_1\cap\theta_2\overset{\mathcal{M}_5}{\equiv}\varnothing$，$\alpha_3\triangleq\theta_1\cap\theta_3\overset{\mathcal{M}_5}{\equiv}\varnothing$，并且 $\alpha_7\triangleq(\theta_2\cup\theta_3)\cap\theta_1\overset{\mathcal{M}_5}{\equiv}\varnothing$。因此，得到 $D^\Theta(\mathcal{M}_5(\Theta))$如下的命题集。

Elements of D^Θ for $\mathcal{M}_5(\Theta)$	
$\alpha_0\triangleq\varnothing$	
$\alpha_1\triangleq\theta_1\cap\theta_2\cap\theta_3\overset{\mathcal{M}_5}{\equiv}\varnothing$	$\alpha_{10}\triangleq\theta_2\neq\varnothing$
$\alpha_2\triangleq\theta_1\cap\theta_2\overset{\mathcal{M}_5}{\equiv}\varnothing$	$\alpha_{11}\triangleq\theta_3\neq\varnothing$
$\alpha_3\triangleq\theta_1\cap\theta_3\overset{\mathcal{M}_5}{\equiv}\varnothing$	$\alpha_{12}\triangleq(\theta_1\cap\theta_2)\cup\theta_3\overset{\mathcal{M}_5}{\equiv}\alpha_{11}\neq\varnothing$
$\alpha_4\triangleq\theta_2\cap\theta_3\neq\varnothing$	$\alpha_{13}\triangleq(\theta_1\cap\theta_3)\cup\theta_2\overset{\mathcal{M}_5}{\equiv}\alpha_{10}\neq\varnothing$
$\alpha_5\triangleq(\theta_1\cup\theta_2)\cap\theta_3\overset{\mathcal{M}_5}{\equiv}\alpha_4\neq\varnothing$	$\alpha_{14}\triangleq(\theta_2\cap\theta_3)\cup\theta_1\overset{\mathcal{M}_5}{\equiv}\alpha_4\neq\varnothing$
$\alpha_6\triangleq(\theta_1\cup\theta_3)\cap\theta_2\overset{\mathcal{M}_5}{\equiv}\alpha_4\neq\varnothing$	$\alpha_{15}\triangleq\theta_1\cup\theta_2\overset{\mathcal{M}_5}{\equiv}\alpha_{10}\neq\varnothing$
$\alpha_7\triangleq(\theta_2\cup\theta_3)\cap\theta_1\overset{\mathcal{M}_5}{\equiv}\varnothing$	$\alpha_{16}\triangleq\theta_1\cup\theta_3\overset{\mathcal{M}_5}{\equiv}\alpha_{11}\neq\varnothing$
$\alpha_8\triangleq(\theta_1\cap\theta_2)\cup(\theta_1\cap\theta_3)\cup(\theta_2\cap\theta_3)\overset{\mathcal{M}_5}{\equiv}\alpha_4\neq\varnothing$	$\alpha_{17}\triangleq\theta_2\cup\theta_3\neq\varnothing$
$\alpha_9\triangleq\theta_1\overset{\mathcal{M}_5}{\equiv}\varnothing$	$\alpha_{18}\triangleq\theta_1\cup\theta_2\cup\theta_3\overset{\mathcal{M}_5}{\equiv}\alpha_{17}\neq\varnothing$

$D^\Theta(\mathcal{M}_5(\Theta))$现在只有五个不同的命题，很显然与超幂集 $D^{\Theta\setminus\theta_1}$一致。

4.4.7 例 6:带有两个非存在性约束的混合 DSm 模型

作为混合 DSm 模型 $D^\Theta(\mathcal{M}_6(\Theta))$的第六个实例，考虑 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}$和非存在性约束 $\alpha_9\triangleq\theta_1\overset{\mathcal{M}_6}{\equiv}\varnothing$，$\alpha_{10}\triangleq\theta_2\overset{\mathcal{M}_6}{\equiv}\varnothing$。事实上，这两个约束与只选择约束 $\alpha_{15}\triangleq\theta_1\cup\theta_2\overset{\mathcal{M}_5}{\equiv}\varnothing$等价。换句话说，从初始框架 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}$中移除了 θ_1 和 θ_2。这些非存在

性约束暗示了 $\alpha_1 \triangleq \theta_1 \cap \theta_2 \cap \theta_3 \overset{\mathcal{M}_6}{\equiv} \varnothing$，$\alpha_2 \triangleq \theta_1 \cap \theta_2 \overset{\mathcal{M}_6}{\equiv} \varnothing$，$\alpha_3 \triangleq \theta_1 \cap \theta_3 \overset{\mathcal{M}_6}{\equiv} \varnothing$，$\alpha_4 \triangleq \theta_2 \cap \theta_3 \overset{\mathcal{M}_6}{\equiv} \varnothing$，$\alpha_5 \triangleq (\theta_1 \cup \theta_2) \cap \theta_3 \overset{\mathcal{M}_6}{\equiv} \varnothing$，$\alpha_6 \triangleq (\theta_1 \cup \theta_3) \cap \theta_2 \overset{\mathcal{M}_6}{\equiv} \varnothing$，$\alpha_7 \triangleq (\theta_2 \cup \theta_3) \cap \theta_1 \overset{\mathcal{M}_6}{\equiv} \varnothing$，$\alpha_8 \triangleq \{(\theta_1 \cap \theta_2) \cup \theta_3\} \cap (\theta_1 \cup \theta_2) \overset{\mathcal{M}_6}{\equiv} \varnothing$，$\alpha_{13} \triangleq (\theta_1 \cap \theta_3) \cup \theta_2 \overset{\mathcal{M}_6}{\equiv} \varnothing$，$\alpha_{14} \triangleq (\theta_2 \cap \theta_3) \cup \theta_1 \overset{\mathcal{M}_6}{\equiv} \varnothing$。因此，得到 $D^{\Theta}(\mathcal{M}_6(\Theta))$ 如下的命题集。

Elements of D^{Θ} for $\mathcal{M}_6(\Theta)$	
$\alpha_0 \triangleq \varnothing$	
$\alpha_1 \triangleq \theta_1 \cap \theta_2 \cap \theta_3 \overset{\mathcal{M}_6}{\equiv} \varnothing$	$\alpha_{10} \triangleq \theta_2 \overset{\mathcal{M}_6}{\equiv} \varnothing$
$\alpha_2 \triangleq \theta_1 \cap \theta_2 \overset{\mathcal{M}_6}{\equiv} \varnothing$	$\alpha_{11} \triangleq \theta_3 \neq \varnothing$
$\alpha_3 \triangleq \theta_1 \cap \theta_3 \overset{\mathcal{M}_6}{\equiv} \varnothing$	$\alpha_{12} \triangleq (\theta_1 \cap \theta_2) \cup \theta_3 \overset{\mathcal{M}_6}{\equiv} \alpha_{11} \neq \varnothing$
$\alpha_4 \triangleq \theta_2 \cap \theta_3 \overset{\mathcal{M}_6}{\equiv} \varnothing$	$\alpha_{13} \triangleq (\theta_1 \cap \theta_3) \cup \theta_2 \overset{\mathcal{M}_6}{\equiv} \varnothing$
$\alpha_5 \triangleq (\theta_1 \cup \theta_2) \cap \theta_3 \overset{\mathcal{M}_6}{\equiv} \varnothing$	$\alpha_{14} \triangleq (\theta_2 \cap \theta_3) \cup \theta_1 \overset{\mathcal{M}_6}{\equiv} \varnothing$
$\alpha_6 \triangleq (\theta_1 \cup \theta_3) \cap \theta_2 \overset{\mathcal{M}_6}{\equiv} \varnothing$	$\alpha_{15} \triangleq \theta_1 \cup \theta_2 \overset{\mathcal{M}_6}{\equiv} \varnothing$
$\alpha_7 \triangleq (\theta_2 \cup \theta_3) \cap \theta_1 \overset{\mathcal{M}_6}{\equiv} \varnothing$	$\alpha_{16} \triangleq \theta_1 \cup \theta_3 \overset{\mathcal{M}_6}{\equiv} \alpha_{11} \neq \varnothing$
$\alpha_8 \triangleq (\theta_1 \cap \theta_2) \cup (\theta_1 \cap \theta_3) \cup (\theta_2 \cap \theta_3) \overset{\mathcal{M}_6}{\equiv} \varnothing$	$\alpha_{17} \triangleq \theta_2 \cup \theta_3 \overset{\mathcal{M}_6}{\equiv} \alpha_{11} \neq \varnothing$
$\alpha_9 \triangleq \theta_1 \overset{\mathcal{M}_6}{\equiv} \varnothing$	$\alpha_{18} \triangleq \theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3 \overset{\mathcal{M}_6}{\equiv} \alpha_{11} \neq \varnothing$

$D^{\Theta}(\mathcal{M}_6(\Theta))$ 现在减少到只有两个不同的命题 $\varnothing$ 和 θ_3。$D^{\Theta}(\mathcal{M}_6(\Theta))$ 显然与超幂集 $D^{\Theta \setminus \{\theta_1, \theta_2\}}$ 一致。由于在 $D^{\Theta}(\mathcal{M}_6(\Theta))$ 中只存在一个可能的非空命题，这种问题被称为无意义问题。如果现在引入所有的非存在性约束到自由 DSm 模型中，那么初始问题减弱成空问题，也称为不可能问题，这与 $m(\varnothing) \equiv 1$ 一致（这类“问题”与现实无关）。这类空或者无意义的问题接下来将不再讨论，因为它们目前并非真正受人关注的工程信息融合问题。

4.4.8　例 7：带有混合约束的混合 DSm 模型

作为混合 DSm 模型 $D^{\Theta}(\mathcal{M}_7(\Theta))$ 的第七个实例，考虑 $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ 以及排斥性和非存在性约束 $\alpha_{12} \triangleq (\theta_1 \cap \theta_2) \cup \theta_3 \overset{\mathcal{M}_7}{\equiv} \varnothing$。这个混合约束暗示了 $\alpha_1 \triangleq \theta_1 \cap \theta_2 \cap \theta_3 \overset{\mathcal{M}_7}{\equiv} \varnothing$，$\alpha_2 \triangleq \theta_1 \cap \theta_2 \overset{\mathcal{M}_7}{\equiv} \varnothing$，$\alpha_3 \triangleq \theta_1 \cap \theta_3 \overset{\mathcal{M}_7}{\equiv} \varnothing$，$\alpha_4 \triangleq \theta_2 \cap \theta_3 \overset{\mathcal{M}_7}{\equiv} \varnothing$，$\alpha_5 \triangleq (\theta_1 \cup \theta_2) \cap \theta_3 \overset{\mathcal{M}_7}{\equiv} \varnothing$，$\alpha_6 \triangleq (\theta_1 \cup \theta_3) \cap \theta_2 \overset{\mathcal{M}_7}{\equiv} \varnothing$，$\alpha_7 \triangleq (\theta_2 \cup \theta_3) \cap \theta_1 \overset{\mathcal{M}_7}{\equiv} \varnothing$，$\alpha_8 \triangleq \{(\theta_1 \cap \theta_2) \cup \theta_3\} \cap (\theta_1 \cup \theta_2) \overset{\mathcal{M}_7}{\equiv} \varnothing$ 和 $\alpha_{11} \triangleq \theta_3 \overset{\mathcal{M}_7}{\equiv} \varnothing$。因此得到 $D^{\Theta}(\mathcal{M}_7(\Theta))$ 如下的命题集。

Elements of D^Θ for $\mathscr{M}_7(\Theta)$	
$\alpha_0 \triangleq \varnothing$	
$\alpha_1 \triangleq \theta_1 \cap \theta_2 \cap \theta_3 \overset{\mathscr{M}_7}{\equiv} \varnothing$	$\alpha_{10} \triangleq \theta_2 \neq \varnothing$
$\alpha_2 \triangleq \theta_1 \cap \theta_2 \overset{\mathscr{M}_7}{\equiv} \varnothing$	$\alpha_{11} \triangleq \theta_3 \overset{\mathscr{M}_7}{\equiv} \varnothing$
$\alpha_3 \triangleq \theta_1 \cap \theta_3 \overset{\mathscr{M}_7}{\equiv} \varnothing$	$\alpha_{12} \triangleq (\theta_1 \cap \theta_2) \cup \theta_3 \overset{\mathscr{M}_7}{\equiv} \varnothing$
$\alpha_4 \triangleq \theta_2 \cap \theta_3 \overset{\mathscr{M}_7}{\equiv} \varnothing$	$\alpha_{13} \triangleq (\theta_1 \cap \theta_3) \cup \theta_2 \overset{\mathscr{M}_7}{\equiv} \alpha_{10} \neq \varnothing$
$\alpha_5 \triangleq (\theta_1 \cup \theta_2) \cap \theta_3 \overset{\mathscr{M}_7}{\equiv} \varnothing$	$\alpha_{14} \triangleq (\theta_2 \cap \theta_3) \cup \theta_1 \overset{\mathscr{M}_7}{\equiv} \alpha_9 \neq \varnothing$
$\alpha_6 \triangleq (\theta_1 \cup \theta_3) \cap \theta_2 \overset{\mathscr{M}_7}{\equiv} \varnothing$	$\alpha_{15} \triangleq \theta_1 \cup \theta_2 \neq \varnothing$
$\alpha_7 \triangleq (\theta_2 \cup \theta_3) \cap \theta_1 \overset{\mathscr{M}_7}{\equiv} \varnothing$	$\alpha_{16} \triangleq \theta_1 \cup \theta_3 \overset{\mathscr{M}_7}{\equiv} \alpha_9 \neq \varnothing$
$\alpha_8 \triangleq (\theta_1 \cap \theta_2) \cup (\theta_1 \cap \theta_3) \cup (\theta_2 \cap \theta_3) \overset{\mathscr{M}_7}{\equiv} \varnothing$	$\alpha_{17} \triangleq \theta_2 \cup \theta_3 \overset{\mathscr{M}_7}{\equiv} \alpha_{10} \neq \varnothing$
$\alpha_9 \triangleq \theta_1 \neq \varnothing$	$\alpha_{18} \triangleq \theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3 \overset{\mathscr{M}_7}{\equiv} \alpha_{15} \neq \varnothing$

$D^\Theta(\mathscr{M}_7(\Theta))$现在减少到只有四个不同的命题，即 θ_1、θ_2、θ_3 和 $\theta_1 \cup \theta_2$。

4.5 混合 DSm 模型的组合规则

本节给出一种通用的混合 DSm 组合规则能够处理任何混合 DSm 模型(包括 Shafer 模型)。下面将表述这种新的通用组合规则是如何在前面提到的所有混合 DSm 模型中工作的，并且列出这种组合规则的一些有趣的性质。

4.5.1 表示法

令 $\Theta=\{\theta_1,\cdots,\theta_n\}$为约束性融合问题的鉴别框(即一个框架 Θ，$D^\Theta \backslash \{\varnothing\}$中至少有一个合取命题已知是空集)，并且 D^Θ 是由 Θ、$\varnothing$ 以及通过$\cup$和$\cap$运算产生的自由分配格子(超幂集)。属于 D^Θ 的空集需要认真辨别，如果一个命题与时间、空间、模型以及 D^Θ 中的其他命题相互独立，且永远为空(称它为绝对空集)。如 $\theta_1 \cap \theta_2$ 或者 $\theta_1 \cup \theta_2$ 或者只有 θ_i 自身($1 \leqslant i \leqslant n$)等，在某个时间(如果考虑动态融合问题)，或者在一个特殊的模型 $\mathscr{M}$ 中(但是在其他模型和/或时间) 变成空，称这种命题为相对空集。以$\varnothing_{\mathscr{M}}$来表示 D^Θ 中的相对空命题集(即它们在特殊的模型 $\mathscr{M}$ 或者特定的时间变成空)。$\varnothing_{\mathscr{M}}$是完全约束集，它依赖于所考虑的 DSm 模型 $\mathscr{M}$，并且模型 $\mathscr{M}$ 依赖对应的模糊维恩图的结构(Θ 中命题的数量，非空交集的数量，动态融合的时间)。根据约定，$\varnothing \notin \varnothing_{\mathscr{M}}$。用$\boldsymbol{\varnothing} \triangleq \{\varnothing,\varnothing_{\mathscr{M}}\}$来表示所有的相对和绝对空命题集。

对任何属于 D^Θ 的命题 A，令$\varnothing(A)$为集合 A 特有的非空函数，若 $A\notin\varnothing$，则$\varnothing(A)=1$，否则$\varnothing(A)=0$。这个函数通过所选择的混合 DSm 模型将 0 值赋予 D^Θ 中所有的相对或绝对空命题。这里定义 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n\}$上的完全未知集$I_t\triangleq\theta_1\cup\theta_2\cup\cdots\theta_n$ 和相对未知集 $I_r\triangleq\{\theta_{i_1}\cup\cdots\cup\theta_{i_k},i_1,\cdots,i_k\in\{1,2,\cdots,n\},2\leqslant k\leqslant n-1\}$。那么，所有的未知集为 $I=I_t\cup I_r$。对于 D^Θ 中的任何命题 A，考虑 $u(A)$为所有组成 A 的单个命题的并集。例如，如果 A 是一个单命题，那么 $u(A)=A$；如果 $A=\theta_1\cup\theta_2$ 或者 $A=\theta_1\cap\theta_2$，那么 $u(A)=\theta_1\cup\theta_2$；如果 $A=(\theta_1\cap\theta_2)\cup\theta_3$，那么$u(A)=\theta_1\cup\theta_2\cup\theta_3$；通过约定，$u(\varnothing)\triangleq\varnothing$。对混合 DSm 组合规则（见（式 4.3）、式（4.5）及接下来 S_2 的表示式）中的第二个求和函数，传递空集$\varnothing$的信度赋值（如果有。有时在很少的情况下，$m(\varnothing)>0$（在 Smets 的工作中），我们也想抓住这种特殊情况）到完全未知 $I_t=\theta_1\cup\theta_2\cup\cdots\cup\theta_n$ 命题集上。相对空命题信度赋值的其他部分，如 θ_i 和 $\theta_j(i\neq j)$，传递到部分未知/不确定的 $m(\theta_i\cup\theta_j)$上。S_2 根据 DSm 经典网络结构，只乘有绝对和相对空集的列命题，然后 S_2 将信度质量 $m_1(X_1)m_2(X_2)\cdots m_k(k)$传递到命题 $A\in D^\Theta(A=u(X_1)\cup u(X_2)\cup\cdots\cup u(X_k)$非空时)，或者如果 $u(X_1)\cup u(X_2)\cdots\cup u(X_k)$是空集，那么信度质量 $m_1(X_1)m_2(X_2)\cdots m_k(k)$被传递到完全未知集。这个新的 DSmT 混合框架中包含了所有的退化问题/模型，但是不包括通过约束 $I_t=\theta_1\cup\theta_2\cup\cdots\cup\theta_n\overset{\mathcal{M}_0}{\equiv}\varnothing$ 的退化 DSm－混合模型 $\mathcal{M}_\varnothing$，因为它是无意义的。

4.5.2 $u(X)$函数编程

该程序提供了解决以 Dezert－Smarandache 次序（见第 2 章和第 3 章）排列命题 $X\in D^\Theta$ 的二进制表示的 $u(X)$生成方法。现在考虑命题 $\theta_1,\cdots,\theta_n$ 的 Smarandache 编码。反吸收关系定义如下：命题 i 反吸收命题 ij（并且 $i<j$），用 $i\ll ij$ 和 $j\ll ij$ 表示；同样地，$ij\ll ijk$（并且 $i<j<k$），也有 $ik\ll ijk$ 和 $jk\ll ijk$。这种关系具有传递性，因此 $i\ll ij$，且由 $ij\ll ijk$ 推出 $i\ll ijk$；也可以写成链式结构，如 $i\ll ij\ll ijk$；类似地，可以得到 $j\ll ijk$ 和 $k\ll ijk$。这种反吸收的关系可以推广到用任意数字表示的部分，即对相应的维恩图上 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n\}$ $n\geqslant1$ 个不同部分用 Smarandache 编码。命题 ij 和 ik（或者 ij 和 jk）没有反吸收关系，因此这种反吸收关系为自由 DSm 模型的维恩图不同部分表示给出了一个局部次序。如果一个命题 X 只由一部分组成，即 $i_1i_2\cdots i_r$，那么用 Smarandache 编码，得到 $u(X)=\theta_{i_1}\cup\theta_{i_2}\cup\cdots\cup\theta_{i_r}$。如果 X 由两个或者更多的部分组成，第一步要消去所有的反吸收部分，例如，如果 $A\ll B$，那么 $u(A,B)=u(A)$；一般说来，如果 A 的所有数字属于 B，那么 A 部分被 B 反吸收；对一个反吸收链 $A_1\ll A_2\ll\cdots\ll A_8$ 只保留 A_1 而消去其他部分；另外，如果 X 是反吸收的不可简化，那么 $u(X)$是所有单子的并集。对于

X 的后面部分命题的下标(如果一个数字多次出现,那么只记一次)。为了方便,这里提供了计算 $u(X)(X\in D^{\Theta})$的如下 Matlab[①] 源代码,其中 u_n 对应于 DSm 编码基(已在第 2 章提及)。

```
%*******************************
functlon[UX]=GetUX(u_n,X);
%*******************************
% GetUX computes the function u(X) involved
% in the DSm hybrid rule of combination.
% Inputs:u_n=>Dezert-Smarandache base encoding
%          X=>Element of D^Theta in base u_n
% Example for n=3 if Theta={theta1,theta2,theta3}
%                    then u_3=[1 2 12 3 13 23 123]
% Output :Ux=>u(X) expressed. in base u_n
% Copyrights (c) 2003-J.Dezert & F.Smarandache
%*******************************
UX=zeros(1,slzo(u_n,2));XP=u_n(flnd(X==1))';
AF=zeros(slze(XP,1),1);XC=[];
for jj=1:slze(XP,1)
if(AF(jj)==0),ujj=num2str(XP(jj));
for kk=1:slze(XP,1)
if(AF(kk)==0)
ukk=num2str(XP(kk));w=intersect(ujj,ukk);
if(tsempty(w)==0),
if((isequal(w,ujj)+isequal(w,ukk))>0)
XC=[XC;str2num(w)];
if(slze(ujj,2)<slze(ukk,2)),AF(kk)=1;end
if(slze(ukk,2)<slze(ujj,2)),AF(jj)=1;end
end;end;end;end;end;end
XC=unique(XC);XCS=unique(num2str(XC'));
for ii=1:slze(XCS,2),if(XCS(ii)~=' ␣ ')
for jj=1:slze(u_n,2)
if(lsempty(intersect(XCS(ii),num2str(u_n(jj))))==0)
UX(jj)=1;end;end;end;end
```

计算 $u(X)(X\in D^{\Theta})$的 Matlab 源代码

这里是 $n=3$ 时的实例:$12\ll123$,12 反吸收 123,而在 12 和 23 间没有反吸收关系。

---

① Matlab 是 MathWorks 公司的标志。

- 如果 $X=123$,那么 $u(X)=\theta_1\cup\theta_2\cup\theta_3$。
- 如果 $X=\{23,123\}$,那么 $23\ll123$,$u(\{23,123\})=u(23)$,由于 123 已经被消去了,因此 $u(X)=u(23)=\theta_2\cup\theta_3$。
- 如果 $X=\{13,123\}$,那么 $13\ll123$,因此 $u(\{13,123\})=u(13)=\theta_1\cup\theta_3$。
- 如果 $X=\{13,23,123\}$,那么 $13\ll123$,因此 $u(\{13,23,123\})=u(\{13,23\})=\theta_1\cup\theta_2\cup\theta_3$(在$\{13,23\}$中的每个数字作为 θ 下标)。如果某个数字重复了,它只被采用一次;在 13 和 23 间没有反吸收关系。
- 如果 $X=\{3,13,23,123\}$,由于 $23\ll123$,那么 $u(X)=u(\{3,13,23\})$;又因为 $3\ll23$,那么 $u(\{3,13,23\})=u(\{3,13\})$;最后,因为 $3\ll13$,所以 $u(\{3,13\})=u(3)=\theta_3$。
- 如果 $X=\{1,12,13,23,123\}$,那么由于有反吸收链 $1\ll12\ll123$,且 $1\ll13$,因此 $u(X)=u(\{1,13,23\})=u(\{1,23\})$,最终 $u(X)=\theta_1\cup\theta_2\cup\theta_3$。
- 如果 $X=\{1,2,12,13,23,123\}$,那么由于 $1\ll12\ll123$ 且 $2\ll23$,$1\ll13$,因此 $u(X)=u(\{1,2,13\})=u(\{1,2\})$,最终 $u(X)=\theta_1\cup\theta_2$。
- 如果 $X=\{2,12,3,13,23,123\}$,那么由于 $2\ll23\ll123$,$3\ll13$,因此 $u(X)=u(\{2,12,3\})$;又由于 $2\ll12$,因此 $u(X)=u(\{2,3\})=\theta_2\cup\theta_3$。

4.5.3 两个证据源的混合 DSm 组合规则

从现在起,为了避免退化的融合问题,给定的混合 DSm 模型 $\mathscr{M}$ 总是与空模型 $\mathscr{M}_\varnothing$ 不同(即 $I_t\neq\varnothing$),与给定的混合 DSm 模型 $\mathscr{M}\neq\mathscr{M}_\varnothing$ 相关的两个证据源($A\in D^\Theta$)之间组合的混合 DSm 组合规则被定义为

$$
\begin{aligned}
m_{\mathscr{M}(\Theta)}(A) \triangleq \varnothing(A)\Bigg[&\sum_{\substack{X_1,X_2\in D^\Theta\\(X_1\cap X_2)=A}} m_1(X_1)m_2(X_2) \\
+ &\sum_{\substack{X_1,X_2\in\varnothing\\ [(u(X_1)\cup u(X_2))=A]\vee[(u(X_1)\cup u(X_2)\in\varnothing)\wedge(A=I_t)]}} m_1(X_1)m_2(X_2) \\
+ &\sum_{\substack{X_1,X_2\in D^\Theta\\(X_1\cup X_2)=A\\X_1\cap X_2\in\varnothing}} m_1(X_1)m_2(X_2)\Bigg]
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

式中:第一个和式对应着信度质量 $m_{\mathscr{M}^f(\Theta)}(A)$,由基于自由 DSm 模型 $\mathscr{M}^f$ 的经典 DSm 组合规则(4.1)获得,即

$$
m_{\mathscr{M}^f(\Theta)}(A) \triangleq \sum_{\substack{X_1,X_2\in D^\Theta\\(X_1\cap X_2)=A}} m_1(X_1)m_2(X_2) \tag{4.4}
$$

混合 DSm 组合规则式(4.3)中的第二个和式表示所有绝对和相对空集的信度质量，被传递给完全或者相对未知集上。混合 DSm 组合规则中的第三个和式正如经典 DSm 规则计算那样传递相对空集的信度质量之和到非空集上。

4.5.4 两个以上证据源的混合 DSm 组合规则

对于所有 $A \in D^{\Theta}$，前述的两源间的混合 DSm 组合规则的公式可以扩展如下：

$$m_{\mathscr{M}(\Theta)}(A) \triangleq \varnothing(A)\Big[\sum_{\substack{X_1,X_2,\cdots,X_k \in D^{\Theta}\\(X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_k)=A}} \prod_{i=1}^{k} m_i(X_i)$$

$$+ \sum_{\substack{X_1,X_2,\cdots,X_k \in \varnothing\\ [(u(X_1)\cup u(X_2)\cup\cdots\cup u(X_k))=A]\vee[(u(X_1)\cup u(X_2)\cup\cdots\cup u(X_k)\in\varnothing)\wedge(A=I_t)]}} \prod_{i=1}^{k} m_i(X_i)$$

$$+ \sum_{\substack{X_1,X_2,\cdots,X_k \in D^{\Theta}\\(X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_k)=A\\X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_k \in \varnothing}} \prod_{i=1}^{k} m_i(X_i)\Big] \tag{4.5}$$

前面公式的第一个和式对应着通过在自由 DSm 模型 $\mathscr{M}^f$(即自由格子 D^{Θ})基础上的应用经典 DSm 组合规则(4.2) 组合 k 个信息源而得到的信度质量 $m_{\mathscr{M}^f(\Theta)}(A)$，即

$$m_{\mathscr{M}^f(\Theta)}(A) \triangleq \sum_{\substack{X_1,X_2,\cdots,X_k \in D^{\Theta}\\(X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_k)=A}} \prod_{i=1}^{k} m_i(X_i) \tag{4.6}$$

4.5.5 关于混合 DSm 规则的结合律

由式(4.5)和式(4.6)，前面的通用公式可以写成

$$m_{\mathscr{M}(\Theta)}(A) \triangleq \varnothing(A)[S_1(A)+S_2(A)+S_3(A)] \tag{4.7}$$

式中

$$S_1(A) \equiv m_{\mathscr{M}^f(\Theta)}(A) \triangleq \sum_{\substack{X_1,X_2,\cdots,X_k \in D^{\Theta}\\(X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_k)=A}} \prod_{i=1}^{k} m_i(X_i) \tag{4.8}$$

$$S_2(A) \triangleq \sum_{\substack{X_1,X_2,\cdots,X_k \in \varnothing\\ [(u(X_1)\cup u(X_2)\cup\cdots\cup u(X_k))=A]\vee[(u(X_1)\cup u(X_2)\cup\cdots\cup u(X_k)\in\varnothing)\wedge(A=I_t)]}} \prod_{i=1}^{k} m_i(X_i) \tag{4.9}$$

$$S_3(A) \triangleq \sum_{\substack{X_1, X_2, \cdots, X_k \in D^\Theta \\ (X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_k) = A \\ X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_k \in \varnothing}} \prod_{i=1}^{k} m_i(X_i) \tag{4.10}$$

这个组合规则实际上是通过如下两个步骤实现的。

- **步骤 1:**通过经典 DSm 组合规则(4.6)来组合基于自由格子 $D^\Theta(A \in D^\Theta)$的证据源,$S_1(A)=m_{\mathcal{M}^f(\Theta)}(A)$。这一步保留了组合的交换性和结合性,当没有约束时(采用自由 DSm 模型时),混合 DSm 规则减弱成经典 DSm 规则,由于$\varnothing=\{\varnothing\}$,且 $m_i(\varnothing)=0(i=1,\cdots,k)$,因此 $\Phi(A)=1$ 且 $S_2(A)=S_3(A)=0\ \forall A \neq \varnothing \in D^\Theta$。对于 $A=\varnothing$,$\Phi(A)=0$,$m_{\mathcal{M}^f}(\varnothing)=0$。
- **步骤 2:**根据式(4.7)传递混合 DSm 模型 $\mathcal{M}$ 的完全约束的信度质量。注意,只有针对所考虑的融合问题,对参与的完全约束有可靠信息时这一步才是必要的。更准确地说,当一些约束被引入来处理一个给定混合 DSm 模型 $\mathcal{M}(\Theta)$时,必然存在一些命题 $A \overset{\mathcal{M}}{\equiv} \varnothing$,$\Phi(A)=0$,对这些命题,计算 $S_1(A)$、$S_2(A)$和 $S_3(A)$是不必要的。因为 $\Phi(A)=0$,即公式 $\Phi(A)[S_1(A)+S_2(A)+S_3(A)]$等于零,这减轻了计算量。对于命题 $A \overset{\mathcal{M}}{\equiv} \neq \varnothing$,即 $\Phi(A)=1$,通过对 $S_1(A)$、$S_2(A)$和 $S_3(A)$的计算来获得 $m_{\mathcal{M}(\Theta)}(A)$是必要的。根据模型的约束,混合 DSm 组合机制(所谓压缩步骤)的最后一部分包括收集(总结)所有对应于同样的命题中的信度质量。例如:如果考虑 3D 框架$\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}$,带有约束 $\theta_2 \cap \theta_3 \overset{\mathcal{M}}{\equiv} \varnothing$,那么根据混合 DSm 融合规则(4.7),$m_{\mathcal{M}(\Theta)}(\theta_1 \cup (\theta_2 \cap \theta_3))$必须添加到 $m_{\mathcal{M}(\Theta)}(\theta_1)$中,这是因为约束 $\theta_2 \cap \theta_3 \overset{\mathcal{M}}{\equiv} \varnothing$ 会导致 $\theta_1 \cup (\theta_2 \cap \theta_3) \overset{\mathcal{M}}{\equiv} \theta_1$。

步骤 2 不保持规则的全部结合特性(对 Yager 或者 Dubois & Prade 规则也是如此),但这不是一项基本要求,因为这个问题通过步骤 1 和步骤 2 的并行处理很容易解决。融合总是从自由 DSm 模型开始,步骤 2 只在一些完全约束被引入且在决策之前才被应用,换句话说,如果只有两个信息源 $m_1(\cdot)$和 $m_2(\cdot)$,且在框架 Θ 上有一些完全约束,首先应用步骤 1 来获得定义在自由 DSm 模型上[①] $m^{1,2}_{\mathcal{M}^f(\Theta)}(\cdot)=[m_1 \oplus m_2](\cdot)$,然后再应用步骤 2 来获得在混合模型上的最终结果 $m^{1,2}_{\mathcal{M}(\Theta)}(\cdot)$。如果第三个信息源被引入,记为 $m_3(\cdot)$,那么将其与前面的两个证据源经典组合结果通过步骤 1 再次组合来获得 $m^{1,2,3}_{\mathcal{M}^f(\Theta)}(\cdot)=[m_3 \oplus m^{1,2}_{\mathcal{M}^f(\Theta)}](\cdot)$,然后应用步骤 2 来获得在混合模型 $M(\Theta)$最终结果 $m^{1,2,3}_{\mathcal{M}(\Theta)}(\cdot)$。

---

① 作者在此引入标记 $m^{1,2}(\cdot)$来准确地表示结果质量只与信息源 1 和 2 的组合相关。

由于融合规则的完全结合性并非是一个基本条件，尽管近几年所有批评者都反对在文献中替代 Dempster 规则，但以这种方式融合没有技术难度。完全/直接的结合特性只有通过 Demspter 组合规则工作在 Shafer 模型时来实现。这就是 Dempster 规则通常优于其他融合规则的一个理由，但是反过来说，这种结合性（通过归一化因子 $1-m(\varnothing)$）也是 20 多年来主要为人诟病之处之一。我们知道，Dempster 规则在冲突变高（见第 5 章和第 12 章示例）时不能提供一致性结果，因此必须采取其他一些方法来阻止这样的问题，这其实是非常自相矛盾的。

为了防止在融合时的信息丢失,必须首先用自由 DSm 模型下的经典 DSm 规则组合所有证据源,然后根据模型 $\mathcal{M}$ 的完全约束来改变信度质量的分配。如果根据混合模型 $\mathcal{M}$,首先改变局部的信度质量 $m_1(\cdot),\cdots,m_k(\cdot)$分配,然后应用组合规则,融合仅变成次优的,因为在完全约束的质量转移过程中一些信息完全丢失了。如果把一些完全约束的信度质量在 $m(m<k)$个信息源的融合过程中的中间步骤进行转移,融合结果也是次优的。

我们还注意到,这个传递公式比在 DST 框架中的一般传递公式更通用(因为包括了引入排斥性约束和非存在性约束的可能性)、更精确(因为明确地将所有不同命题的相对空集考虑到一般传递公式(4.7)中),这将作为 Dempster 组合规则[6]的替代规则在 4.5.10 节中讨论。

4.5.6 混合 DSm 规则的属性

下面的等式成立：

$$\sum_{A\in D^{\Theta}} m_{\mathcal{M}(\Theta)}(A) \sum_{A\in D^{\Theta}} \varnothing(A)[S_1(A)+S_2(A)+S_3(A)]=1 \qquad (4.11)$$

首先证明 $\sum_{A\in D^{\Theta}} m(A)=1$,其中所有的质量 $m(A)$通过经典 DSm 规则获得。这里考虑每个信息源 $i(1\leqslant i\leqslant k)$提供质量 $m_i(\cdot)$,$d=|D^{\Theta}|$,它们的和等于 1,即 $m_i(D^{\Theta})=[m_{i1},m_{i2},\cdots,m_{id}]$,且 $\sum_{j=1,d} m_{ij}=1$,因此,对于 $k\geqslant 2$ 个信息源,质量矩阵变成

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1d} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{k1} & m_{k2} & \cdots & m_{kd} \end{bmatrix}$$

如果用 $A_1,A_2,\cdots,A_d$ 来标记 D^{Θ} 中的集合(以何种顺序列出并不重要),那么矩阵中的列(j)表示通过每个信息源 $S_1,S_2,\cdots,S_k$ 赋给 A_j 的质量,例如 $s_i(A_j)=m_{ij}$,其中 $1\leqslant i\leqslant k$。根据 DSm 网络结构[3],网络中的所有乘积将会有 $m_{1j_1}m_{2j_2}\cdots m_{kj_k}$ 的形式,即从矩阵的每个行取一个元素;而在矩阵的不同列中取没有限制数目

的元素，$1\leqslant j_1,j_2,\cdots,j_k\leqslant d$。每个这样的乘积将作为 D^Θ 中一个集合的融合质量。因此，所有融合质量的之和等于所有这些乘积之和，即

$$\prod_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{d}m_{ij}=\prod_{i=1}^{k}1=1 \tag{4.12}$$

混合 DSm 规则拥有三个和式，即 S_1、S_2 和 S_3，把质量矩阵 $\boldsymbol{M}$ 分成两个分离的子矩阵 $\boldsymbol{M}_\varnothing$（包含所有绝对和相对空集的列），和 $\boldsymbol{M}_N$（由所有非空集的列组成）。根据 DSm 网络结构（对 $k\geqslant2$ 行）得到：

- S_1 是由 $\boldsymbol{M}_N$ 的列（即它们对应集合的交集是非空的）根据 DSm 网络结构产生所有乘积的总和，即所有非空集合的质量之和在任何绝对或者相对空集信度质量传递之前被传递。
- S_2 根据 DSm 网络结构，是由 $\boldsymbol{M}_\varnothing$ 中列元素的所有乘积总和，即绝对和相对空集的信度质量部分转移给在 $I\triangleq I_t\cup I_r$ 中的未知或 Θ 中的单子。
- S_3 根据 DSm 网络结构，是由 $\boldsymbol{M}_N$ 和 $\boldsymbol{M}_\varnothing$ 的列元素（至少有一列来自于它们中的一个）所有乘积的总和，对于 $\boldsymbol{M}_N$ 列元素的乘积（即它们相应集合的交集是空（这并未计入前面的和 S_1））的总和，即绝对或者相对空集质量的部分和被传递给混合 DSm 模型 $\mathscr{M}$ 的非空集。

如果现在考虑这三个和的所有项（每项是 $m_{1j_1}m_{2j_2}\cdots m_{kj_k}$ 的乘积形式），就像在 DSm 网络结构对经典 DSm 规则一样，准确地获得相同项，所有存在于 S_1、S_2 和 S_3 项的和是 1（见式（4.12）），即完成证明。混合 DSm 规则自然从经典 DSm 规则派生。给定的混合 DSm 模型 $\mathscr{M}$ 的相对和绝对空集的所有质量根据式（4.7）被传递给非空集合，于是

$$\forall A\in\varnothing\subset D^\Theta,m_{\mathscr{M}(\Theta)}(A)=0 \tag{4.13}$$

一个相对空集（源于 D^Θ）存在于它的表达式 $\theta_{j1},\theta_{j2},\cdots,\theta_{jr}$（$1\leqslant r\leqslant n$）中的全部质量，一般会被分配到 $\theta_{j1},\theta_{j2},\cdots,\theta_{jr}$ 或它们的并集或者交集上，并且分配遵循经典 DSm 规则中相乘的方式，可以通过 DSm 网络结构[3]原理来解释。于是，由于没有损失任何信度质量，没有获得任何额外信度质量，就像之前证明的一样，所有 $m_{\mathscr{M}(\Theta)}(A)$ 的总和等于 1。并且幸运的是，不需要归一化常数，因为它可能在融合规则中带来信息损失。此处的三个和式是分离的，原因如下。

- $S_1(\cdot)$ 只将对应非空集的列相乘——但这使得对应这些列的集合的交集是非空的（根据经典 DSm 规则的定义）。
- $S_2(\cdot)$ 只将对应绝对和相对空集的列相乘。
- 对于 $S_3(\cdot)$，有如下规则：

（1）或者与绝对和相对空集对应的列乘以与非空集合对应的列。这样一来，至少一个列要么对应一个绝对或相对空集，要么对应非空集合。

（2）或者对应着非空集合的列，但是这样一来，对应着这些列的集合交集是空集。

根据 DSm 网络结构，任何具有上面的一般乘积形式 $m_{1j_1}m_{2j_2}\cdots m_{kj_k}$，也就是说，任何乘积将质量矩阵 $\boldsymbol{M}$ 中的每一行中元素作为因子，所有信息源的因子之和等于 k。函数$\varnothing(A)$将任何空集的信度质量自动赋为零，并且允许计算所有非空集合的质量。

4.5.7 关于混合 DSm 规则的编程

在此简洁地给出 DSm 组合规则的一个快速编程方法。考虑 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n\}$，源 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k$，并且令 $p=\min\{n,k\}$。仅需要检查焦元是否为空集，即通过这些源赋给这些集合（命题）质量是否全为零。因此，如果 $\boldsymbol{M}$ 是质量矩阵，且考虑一个 D^Θ 中的集合 A_j，那么列(j)对应着 A_j，即转置的$(m_{1j}m_{2j}\cdots m_{kj})$与 k 阶转置的 $\mathbf{0}$ 向量$(0\ 0\ \cdots\ 0)$不相一致。证据源已经赋质量给 D^Θ 之后，根据所有初始焦元的组成，建立 $D^\Theta(\text{step}_1)$。应用经典 DSm 规则，除了 $D^\Theta(\text{step}_1)$中已有的焦元外，添加 $D^\Theta(\text{step}_1)$中的 r 交集，于是

$$D^\Theta(\text{step}_2)=D^\Theta(\text{step}_1)\vee\{A_{i_1}\wedge A_{i_2}\wedge\cdots\wedge A_{i_r}\}$$

式中：$A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_r}$属于$D^\Theta(\text{step}_1)$且 $2\leqslant r\leqslant p$。

应用混合 DSm 规则，由于它的 S_2 和 S_3 之和，除了在 $D^\Theta(\text{step}_2)$中的焦元外，还添加 r 个集合的并集和总未知集，于是

$$D^\Theta(\text{step}_3)=D^\Theta(\text{step}_2)\vee I_t\vee\{A_{i_1}\vee A_{i_2}\vee\cdots\vee A_{i_r}\}$$

式中：$A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_r}$属于$D^\Theta(\text{step}_2)$且 $2\leqslant r\leqslant p$。

这意味着不是计算 D^Θ 中的所有集合的质量，而是首先计算所有焦元的质量（第一步），然后计算它们的 r—交集的质量（第二步），最后计算前面所有集合的 r—并集的质量以及所有未知的质量（第三步）。

4.5.8 混合 DSm 规则在前面例子中的应用

本节介绍利用混合 DSm 组合规则应用于两个独立信息源而得到的数字融合结果。通过检查前面七个例子，目的是帮助读者检查新通用公式的正确性。这里不详细进行推导，仅给出主要包含在通用公式（4.3）中的 $S_1(A)$、$S_2(A)$和 $S_3(A)$（分别在式（4.8）、式（4.9）和式（4.10）中定义）的最终结果，其中证据源的数目设置为 $k=2$。现在考虑 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}$和两个独立的证据源，其中广义基本信度赋值[①] $m_1(\cdot)$和 $m_2(\cdot)$列在下表[②]中。

---

① 一个对所有的 $A\neq\varnothing\in D^\Theta$，$m_1(A)>0$ 且 $m_2(A)>0$ 的例子将会在下一节中简要介绍。

② D^Θ 的命题顺序是指从单调的布尔函数产生的排序，见第 2 章。

Element A of D^{Θ}	$m_1(A)$	$m_2(A)$	$m_{\mathcal{M}^f(\Theta)}(A)$
$\varnothing$	0	0	0
$\theta_1 \cap \theta_2 \cap \theta_3$	0	0	0.16
$\theta_2 \cap \theta_3$	0	0.20	0.19
$\theta_1 \cap \theta_3$	0.10	0	0.12
$(\theta_1 \cup \theta_2) \cap \theta_3$	0	0	0.01
θ_3	0.30	0.10	0.10
$\theta_1 \cap \theta_2$	0.10	0.20	0.22
$(\theta_1 \cup \theta_3) \cap \theta_2$	0	0	0.05
$(\theta_2 \cup \theta_3) \cap \theta_1$	0	0	0
$(\theta_1 \cap \theta_2) \cup (\theta_1 \cap \theta_3) \cup (\theta_2 \cap \theta_3)$	0	0	0
$(\theta_1 \cap \theta_2) \cup \theta_3$	0	0	0
θ_2	0.20	0.10	0.03
$(\theta_1 \cap \theta_3) \cup \theta_2$	0	0	0
$\theta_2 \cup \theta_3$	0	0	0
θ_1	0.10	0.20	0.08
$(\theta_2 \cap \theta_3) \cup \theta_1$	0	0	0.02
$\theta_1 \cup \theta_3$	0.10	0.20	0.02
$\theta_1 \cup \theta_2$	0.10	0	0
$\theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3$	0	0	0

表的右边一列给出了在自由 DSm 模型基础上通过 DSm 组合规则获得的结果，下面部分给出了在 4.3 节通过对前面七个例子运用混合 DSm 组合规则组合而得到的结果。该表中列出的 $\phi(A)$、$S_1(A)$、$S_2(A)$和 $S_3(A)$的值可以帮助读者检查这些结果的正确性。注意到当 $\phi(A)=0$ 时，$S_1(A)$、$S_2(A)$和 $S_3(A)$的值实际上不需要计算，但是在这里给出，只是为了验证。

1. 应用混合 DSm 规则的第一个例子

下表对应着实例 1 中的混合模型 $\mathcal{M}_1$（即适合排斥性约束 $\theta_1 \cap \theta_2 \cap \theta_3 \overset{\mathcal{M}_1}{\equiv} \varnothing$）而获得的数值结果。表右边的一列提供了最终结果，即 $\forall A \in D^{\Theta}$，$m_{\mathcal{M}_1(\Theta)}(A) = \phi(A)[S_1(A)+S_2(A)+S_3(A)]$

Element A of D^{Θ}	$\phi(A)$	$S_1(A)$	$S_2(A)$	$S_3(A)$	$m_{\mathscr{M}_1(\Theta)}(A)$
$\varnothing$	0	0	0	0	0
$\theta_1\cap\theta_2\cap\theta_3\overset{\mathscr{M}_1}{\equiv}\varnothing$	0	0.16	0	0	0
$\theta_2\cap\theta_3$	1	0.19	0	0	0.19
$\theta_1\cap\theta_3$	1	0.12	0	0	0.12
$(\theta_1\cup\theta_2)\cap\theta_3$	1	0.01	0	0.02	0.03
θ_3	1	0.10	0	0	0.10
$\theta_1\cap\theta_2$	1	0.22	0	0	0.22
$(\theta_1\cup\theta_3)\cap\theta_2$	1	0.05	0	0.02	0.07
$(\theta_2\cup\theta_3)\cap\theta_1$	1	0	0	0.02	0.02
$\{(\theta_1\cap\theta_2)\cup\theta_3\}\cap(\theta_1\cup\theta_2)$	1	0	0	0	0
$(\theta_1\cap\theta_2)\cup\theta_3$	1	0	0	0.07	0.07
θ_2	1	0.03	0	0	0.03
$(\theta_1\cap\theta_3)\cup\theta_2$	1	0	0	0.01	0.01
$\theta_2\cup\theta_3$	1	0	0	0	0
θ_1	1	0.08	0	0	0.08
$(\theta_2\cap\theta_3)\cup\theta_1$	1	0.02	0	0.02	0.04
$\theta_1\cup\theta_3$	1	0.02	0	0	0.02
$\theta_1\cup\theta_2$	1	0	0	0	0
$\theta_1\cup\theta_2\cup\theta_3$	1	0	0	0	0

$$\boldsymbol{D}_{\mathscr{M}_1}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1&1\\0&0&0&1&1&1\\0&0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&1\\0&0&1&0&1&0\\0&0&1&0&1&1\\0&0&1&1&1&1\\0&1&1&0&0&1\\0&1&1&0&1&1\\0&1&1&1&1&1\\1&0&1&0&1&0\\1&0&1&0&1&1\\1&0&1&1&1&1\\1&1&1&0&1&1\\1&1&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

从这个数值实例的前面的表格中可以看到初始组合后的信度质量 $m_{\mathscr{M}^f(\Theta)}(\theta_1\cap\theta_2\cap\theta_3)\equiv S_1(\theta_1\cap\theta_2\cap\theta_3)=0.16$ 如何被传递(源于 $\mathscr{M}_1$ 约束)到 $S_3(A)$对应 D^{Θ} 的命题 $(\theta_1\cup\theta_2)\cap\theta_3$、$(\theta_1\cup\theta_3)\cap\theta_2$、$(\theta_2\cup\theta_3)\cap\theta_1$、$(\theta_1\cap\theta_2)\cup\theta_3$、$(\theta_1\cap\theta_3)\cup\theta_2$ 和$(\theta_2\cap\theta_3)\cup\theta_1$ 上。可以很轻松地检查到 $S_3(A)$列命题的和等于 $m_{\mathscr{M}^f(\Theta)}(\theta_1\cap\theta_2\cap\theta_3)=0.16$(即等于当 $\phi(A)=0$ 时 $S_1(A)$的和);对于 $\phi(A)=1$,$S_2(A)$的和等于 $\phi(A)=0$ 时 $S_3(A)$的和(在这个例子中,和是 0)。因此在引入这个约束之后,初始超幂集 D^{Θ} 减弱到如下 18 个命题:

$$D^{\Theta}_{\mathscr{M}_1}=\{\varnothing,\theta_2\cap\theta_3,\theta_1\cap\theta_3,(\theta_1\cup\theta_2)\cap\theta_3,\theta_3,\theta_1\cap\theta_2,(\theta_1\cup\theta_3)\cap\theta_2,(\theta_2\cup\theta_3)\cap\theta_1,\{(\theta_1\cap\theta_2)\cup\theta_3\}\cap(\theta_1\cup\theta_2),(\theta_1\cap\theta_2)\cup\theta_3,\theta_2,(\theta_1\cap\theta_3)\cup\theta_2,\theta_2\cup\theta_3,\theta_1,(\theta_2\cap\theta_3)\cup\theta_1,\theta_1\cup\theta_3,\theta_1\cup\theta_2,\theta_1\cup\theta_2\cup\theta_3\}$$

详见第 2 章,$D^{\Theta}_{\mathscr{M}_1}$ 的命题可以通过矩阵乘 $\boldsymbol{D}_{\mathscr{M}_1}\cdot\boldsymbol{u}_{\mathscr{M}_1}$ 的形式来描述和编码,其中在上面已给出 $\boldsymbol{D}_{\mathscr{M}_1}$,这里基向量 $\boldsymbol{u}_{\mathscr{M}_1}$ 被定义[①]为 $\boldsymbol{u}_{\mathscr{M}_1}=[\langle 1\rangle\langle 2\rangle\langle 12\rangle\langle 3\rangle$

① $\boldsymbol{D}_{\mathscr{M}^f}$ 以 $\boldsymbol{D}_n$ 表示,$\boldsymbol{u}_{\mathscr{M}^f}$ 以 $\boldsymbol{u}_n$ 表示,见第 2 章。

$<13><23>]'$。事实上 $\boldsymbol{u}_{\mathcal{M}_1}$ 是从 $\boldsymbol{u}_{\mathcal{M}^f}$ 通过移除它的分量 $<123>$ 对应通过模型 $\mathcal{M}_1$ 引入的约束。一般来说，为一个给定的混合 DSm 模型 $\mathcal{M}$ 编码的矩阵 $D_{\mathcal{M}}$ 是从 $D_{\mathcal{M}^f}$ 通过移除所有对应着选定模型 $\mathcal{M}$ 约束的列及所有对应多余/等价命题的行获得的。在这个特殊的例子中，考虑到模型 $\mathcal{M}_1$，我们将不得不移除 $D_{\mathcal{M}^f}$ 的最后一列来获得 $D_{\mathcal{M}_1}$，而不从 $D_{\mathcal{M}^f}$ 中移除行，这是因为在这个例子中没有多余/等价命题，$D_{\mathcal{M}^f}$ 一些行的移除会在下个例子中介绍。

2. 应用混合 DSm 规则的第二个例子

下面对应于运用混合规则求解混合模型 D_2 的（即有排斥性约束 $\theta_2 \cap \theta_3 \overset{\mathcal{M}_2}{\equiv} \varnothing \Rightarrow \theta_1 \cap \theta_2 \cap \theta_3 \overset{\mathcal{M}_2}{\equiv} \varnothing$）数值融合结果，得到：

Element A of D^Θ	$\phi(A)$	$S_1(A)$	$S_2(A)$	$S_3(A)$	$m_{\mathcal{M}_2(\Theta)}(A)$
$\varnothing$	0	0	0	0	0
$\theta_1 \cap \theta_2 \cap \theta_3 \overset{\mathcal{M}_2}{\equiv} \varnothing$	0	0.16	0	0	0
$\theta_2 \cap \theta_3$	1	0.19	0	0	0.19
$\theta_1 \cap \theta_3$	1	0.12	0	0	0.12
$(\theta_1 \cup \theta_2) \cap \theta_3$	1	0.01	0	0.02	0.03
θ_3	1	0.10	0	0	0.10
$\theta_1 \cap \theta_2 \overset{\mathcal{M}_2}{\equiv} \varnothing$	0	0.22	0	0.02	0
$(\theta_1 \cup \theta_3) \cap \theta_2 \overset{\mathcal{M}_2}{\equiv} \theta_2 \cap \theta_3$	1	0.05	0	0.02	0.07
$(\theta_2 \cup \theta_3) \cap \theta_1 \overset{\mathcal{M}_2}{\equiv} \theta_1 \cap \theta_3$	1	0	0	0.02	0.02
$(\theta_1 \cap \theta_2) \cup (\theta_1 \cap \theta_3) \cup (\theta_2 \cap \theta_3) \overset{\mathcal{M}_2}{\equiv} (\theta_1 \cup \theta_2) \cap \theta_3$	1	0	0	0	0
$(\theta_1 \cap \theta_2) \cup \theta_3 \overset{\mathcal{M}_2}{\equiv} \theta_3$	1	0	0	0.07	0.07
θ_2	1	0.03	0	0.05	0.08
$(\theta_1 \cap \theta_3) \cup \theta_2$	1	0	0	0.01	0.01
$\theta_2 \cup \theta_3$	1	0	0	0	0
θ_1	1	0.08	0	0.04	0.12
$(\theta_2 \cap \theta_3) \cup \theta_1$	1	0.02	0	0.02	0.04
$\theta_1 \cup \theta_3$	1	0.02	0	0.04	0.06
$\theta_1 \cup \theta_2$	1	0	0.02	0.07	0.09
$\theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3$	1	0	0	0	0

从这个数值实例的如上列表，可以看到 $m_{\mathcal{M}^f(\Theta)}(\theta_1 \cap \theta_2 \cap \theta_3) \equiv S_1(\theta_1 \cap \theta_2 \cap \theta_3) = 0.16$ 以及 $m_{\mathcal{M}^f(\Theta)}(\theta_1 \cap \theta_2) \equiv S_1(\theta_1 \cap \theta_2) = 0.22$ 如何被传递到（由于 M_2 的约束）$S_3(A)$ 对应列 D^Θ 的一些命题上。可以轻易地检查到 $S_3(A)$ 列中的命题之和等于 $0.16+0.22=0.38$（即等于当 $\phi(A)=0$，$S_1(A)$ 的和），以及当 $\phi(A)=1$ 时 $S_2(A)$

的和等于当 $\phi(A)=0$ 时 $S_3(A)$的和(这个和是 0.02)。D^Θ 的一些命题由于 $\mathcal{M}_2$ 的约束而等价,因此必须累计所有对应的等价命题/命题的质量(通过例$\{(\theta_1\cap\theta_2)\cup\theta_3\}\cap(\theta_1\cup\theta_2)\overset{\mathcal{M}_2}{\equiv}(\theta_1\cup\theta_2)\cap\theta_3$)。这可以被看作最后的合并步骤。然后就获得了缩减后的超幂集 $D^\Theta_{\mathcal{M}_2}$,它现在有 13 个不同的命题和组合后的信度赋值列在下表中。

由此可见,$D^\Theta_{\mathcal{M}_2}$ 命题的编码矩阵 $\boldsymbol{D}_{\mathcal{M}_2}$ 如下所示,基向量为 $\boldsymbol{u}_{\mathcal{M}_2}=[<1><2><3><13><23>]'$。事实上,对引入的约束的模型 $\mathcal{M}_2$,通过 $u_{\mathcal{M}_2}$ 从 $u_{\mathcal{M}^f}$ 移除它的成分<12>和<123>可以直接获得。

Element A of $D^\Theta_{\mathcal{M}_2}$	$m_{\mathcal{M}_2(\Theta)}(A)$
$\varnothing$	0
$\theta_2\cap\theta_3$	0.19+0.07=0.26
$\theta_1\cap\theta_3$	0.12+0.02=0.14
$(\theta_1\cup\theta_2)\cap\theta_3$	0.03+0=0.03
θ_3	0.10+0.07=0.17
θ_2	0.08
$(\theta_1\cap\theta_3)\cup\theta_2$	0.01
$\theta_2\cup\theta_3$	0
θ_1	0.12
$(\theta_2\cap\theta_3)\cup\theta_1$	0.04
$\theta_1\cup\theta_3$	0.06
$\theta_1\cup\theta_2$	0.09
$\theta_1\cup\theta_2\cup\theta_3$	0

$$\boldsymbol{D}_{\mathcal{M}_2}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&1&1\\0&0&1&1&1\\0&1&0&0&1\\0&1&0&1&1\\0&1&1&1&1\\1&0&0&1&0\\1&0&0&1&1\\1&0&1&1&1\\1&1&0&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

3. 应用混合 DSm 规则的第三个例子

下面对应于运用混合规则求解混合模型 $\mathcal{M}_3$(即随着排斥性约束$(\theta_1\cup\theta_3)\cap\theta_2\overset{\mathcal{M}_3}{\equiv}\varnothing$)数值融合的结果。此约束直接暗示 $\theta_1\cap\theta_2\cap\theta_3\overset{\mathcal{M}_9}{\equiv}\varnothing$,$\theta_1\cap\theta_2\overset{\mathcal{M}_9}{\equiv}\varnothing$,以及 $\theta_2\cap\theta_3\overset{\mathcal{M}_9}{\equiv}\varnothing$,得到:

Element A of D^Θ	$\phi(A)$	$S_1(A)$	$S_2(A)$	$S_3(A)$	$m_{\mathcal{M}_3(\Theta)}(A)$
$\varnothing$	0	0	0	0	0
$\theta_1\cap\theta_2\cap\theta_3\overset{\mathcal{M}_3}{\equiv}\varnothing$	0	0.16	0	0	0
$\theta_2\cap\theta_3\overset{\mathcal{M}_3}{\equiv}\varnothing$	0	0.19	0	0	0
$\theta_1\cap\theta_3$	1	0.12	0	0	0.12

Element A of D^{Θ}	$\phi(A)$	$S_1(A)$	$S_2(A)$	$S_3(A)$	$m_{\mathcal{M}_3(\Theta)}(A)$
$(\theta_1\cup\theta_2)\cap\theta_3\overset{\mathcal{M}_3}{\equiv}\theta_1\cap\theta_3$	1	0.01	0	0.02	0.03
θ_3	1	0.10	0	0.06	0.16
$\theta_1\cap\theta_2\overset{\mathcal{M}_3}{\equiv}\varnothing$	0	0.22	0	0.02	0
$(\theta_1\cup\theta_3)\cap\theta_2\overset{\mathcal{M}_3}{\equiv}\varnothing$	0	0.05	0	0.02	0
$(\theta_2\cup\theta_3)\cap\theta_1\overset{\mathcal{M}_3}{\equiv}\theta_1\cap\theta_3$	1	0	0	0.02	0.02
$(\theta_1\cap\theta_2)\cup(\theta_1\cap\theta_3)\cup(\theta_2\cap\theta_3)\overset{\mathcal{M}_3}{\equiv}\theta_1\cap\theta_3$	1	0	0	0	0
$(\theta_1\cap\theta_2)\cup\theta_3\overset{\mathcal{M}_3}{\equiv}\theta_3$	1	0	0	0.07	0.07
θ_2	1	0.03	0	0.09	0.12
$(\theta_1\cap\theta_3)\cup\theta_2$	1	0	0	0.01	0.01
$\theta_2\cup\theta_3$	1	0	0	0.05	0.05
θ_1	1	0.08	0	0.04	0.12
$(\theta_2\cap\theta_3)\cup\theta_1\overset{\mathcal{M}_3}{\equiv}\theta_1$	1	0.02	0	0.02	0.04
$\theta_1\cup\theta_3$	1	0.02	0	0.06	0.08
$\theta_1\cup\theta_2$	1	0	0.02	0.09	0.11
$\theta_1\cup\theta_2\cup\theta_3$	1	0	0.02	0.05	0.07

在对应 $S_3(A)$的列中，可以看到初始组合质量 $m_{\mathcal{M}^f(\Theta)}((\theta_1\cup\theta_3)\cap\theta_2)\equiv S_1((\theta_1\cup\theta_3)\cap\theta_2)=0.05$，$m_{\mathcal{M}^f(\Theta)}(\theta_1\cap\theta_2\cap\theta_3)\equiv S_1((\theta_1\cap\theta_2\cap\theta_3)=0.16$，$m_{\mathcal{M}^f(\Theta)}(\theta_2\cap\theta_3)\equiv S_1(\theta_2\cap\theta_3)=0.19$，以及 $m_{\mathcal{M}^f(\Theta)}(\theta_1\cap\theta_2)\equiv S_1(\theta_1\cap\theta_2)=0.22$ 如何被传递到（由于 $\mathcal{M}_3$ 的约束）D^{Θ} 的一些命题上。可以轻易地检查到 $S_3(A)$的列命题之和等于 $0.05+0.16+0.19+0.22=0.62$（即等于当 $\phi(A)=0$ 时，$S_1(A)$的和）。当 $\phi(A)=1$ 时，$S_2(A)$的和等于 $0.02+0.02=0.04$（即等于当 $\phi(A)=0$ 时，$S_3(A)$的和），因为模型 $\mathcal{M}_3$ 必须将对应于等价命题的所有质量累计求和，因此在最终压缩合并以后，得到了缩减的超幂集 $D^{\Theta}_{\mathcal{M}_3}$，它只有 10 个不同的命题相应组合后的信度赋值。基向量 $\boldsymbol{u}_{\mathcal{M}_3}$ 通过 $\boldsymbol{u}_{\mathcal{M}_3}=[\langle 1\rangle\langle 2\rangle\langle 3\rangle\langle 13\rangle]'$给出，且编码矩阵 $\boldsymbol{D}_{\mathcal{M}_3}$ 在其右侧给出。

Element A of $D^{\Theta}_{\mathcal{M}_3}$	$m_{\mathcal{M}_3(\Theta)}(A)$
$\varnothing$	0
$\theta_1\cap\theta_3$	0.12+0.03+0.02+0=0.17
θ_3	0.16+0.07=0.23
θ_2	0.12
$(\theta_1\cap\theta_3)\cup\theta_2$	0.01
$\theta_2\cup\theta_3$	0.05
θ_1	0.12+0.04=0.16
$\theta_1\cup\theta_3$	0.08
$\theta_1\cup\theta_2$	0.11
$\theta_1\cup\theta_2\cup\theta_3$	0.07

$$\boldsymbol{D}_{\mathcal{M}_3}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&1\\0&1&0&0\\0&1&0&1\\0&1&1&1\\1&0&0&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

4. 应用混合 DSm 规则的第四个例子

这是在混合模型 $\mathcal{M}_4$ 下，Shafer 模型获得的结果：

Element A of D^Θ	$\phi(A)$	$S_1(A)$	$S_2(A)$	$S_3(A)$	$m_{\mathcal{M}_4(\Theta)}(A)$
$\varnothing$	0	0	0	0	0
$\theta_1\cap\theta_2\cap\theta_3\overset{\mathcal{M}_4}{\equiv}\varnothing$	0	0.16	0	0	0
$\theta_2\cap\theta_3\overset{\mathcal{M}_4}{\equiv}\varnothing$	0	0.19	0	0	0
$\theta_1\cap\theta_3\overset{\mathcal{M}_4}{\equiv}\varnothing$	0	0.12	0	0	0
$(\theta_1\cup\theta_2)\cap\theta_3\overset{\mathcal{M}_4}{\equiv}\varnothing$	0	0.01	0	0.02	0
θ_3	1	0.10	0	0.07	0.17
$\theta_1\cap\theta_2\overset{\mathcal{M}_4}{\equiv}\varnothing$	0	0.22	0	0.02	0
$(\theta_1\cup\theta_3)\cap\theta_2\overset{\mathcal{M}_4}{\equiv}\varnothing$	0	0.05	0	0.02	0
$(\theta_2\cup\theta_3)\cap\theta_1\overset{\mathcal{M}_4}{\equiv}\varnothing$	0	0	0	0.02	0
$(\theta_1\cap\theta_2)\cup(\theta_1\cap\theta_3)\cup(\theta_2\cap\theta_3)\overset{\mathcal{M}_4}{\equiv}\varnothing$	0	0	0	0	0
$(\theta_1\cap\theta_2)\cup\theta_3\overset{\mathcal{M}_4}{\equiv}\theta_3$	1	0	0	0.07	0.07
θ_2	1	0.03	0	0.09	0.12
$(\theta_1\cap\theta_3)\cup\theta_2\overset{\mathcal{M}_4}{\equiv}\theta_2$	1	0	0	0.01	0.01
$\theta_2\cup\theta_3$	1	0	0	0.05	0.05
θ_1	1	0.08	0	0.06	0.14
$(\theta_2\cap\theta_3)\cup\theta_1\overset{\mathcal{M}_4}{\equiv}\theta_1$	1	0.02	0	0.02	0.04
$\theta_1\cup\theta_3$	1	0.02	0	0.15	0.17
$\theta_1\cup\theta_2$	1	0	0.02	0.09	0.11
$\theta_1\cup\theta_2\cup\theta_3$	1	0	0.06	0.06	0.12

从这个数值实例的表中，可以看出在对应着 $S_3(A)$的列中，八个强制为空集的命题的初始组合信度质量，通过模型 $\mathcal{M}_4$ 的约束被传递到 D^Θ 一些命题。可以轻松检查出对 $S_3(A)$列的命题之和等于 $0.16+0.19+0.12+0.01+0.22+0.05=0.75$(即当 $\phi(A)=0$，等于 $S_1(A)$的和)；对于$\phi(A)=1$，$S_2(A)$的和等于当 $\phi(A)=0$ 时 $S_3(A)$的和，即 $0.02+0.06=0.08=0.02+0.02+0.02+0.02$。

在最后合并步骤之后(即所有等价命题的聚类)，得到缩减的只有 $2^3=8$ 个命题的超幂集 $D^\Theta_{\mathcal{M}_4}$(对应着经典幂集 2^Θ)以及组合后的信度赋值如下：

Element A of $D^{\Theta}_{\mathcal{M}_4}$	$m_{\mathcal{M}_4(\Theta)}(A)$
$\varnothing$	0
θ_3	0.17+0.07=0.24
θ_2	0.12+0.01=0.13
$\theta_2\cup\theta_3$	0.05
θ_1	0.14+0.04=0.18
$\theta_1\cup\theta_3$	0.17
$\theta_1\cup\theta_2$	0.11
$\theta_1\cup\theta_2\cup\theta_3$	0.12

$$\boldsymbol{D}_{\mathcal{M}_4}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\\0&1&1\\1&0&0\\1&0&1\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$$

基向量 $\boldsymbol{u}_{\mathcal{M}_4}$ 通过 $\boldsymbol{u}_{\mathcal{M}_4}=[<1><2><3>]'$给出，且编码矩阵 $\boldsymbol{D}_{\mathcal{M}_4}$ 在其右侧给出。

5. 应用混合 DSm 规则的第五个例子

下表给出了对应在包含非存在性约束 $\theta_1\overset{\mathcal{M}_5}{\equiv}\varnothing$ 的混合模型 $\mathcal{M}_5$ 下的数值融合结果，这一非存在性约束暗示了 $\theta_1\cap\theta_2\overset{\mathcal{M}_5}{\equiv}\varnothing$，$\theta_1\cap\theta_3\overset{\mathcal{M}_5}{\equiv}\varnothing$ 以及$(\theta_2\cup\theta_3)\cap\theta_1\overset{\mathcal{M}_5}{\equiv}\varnothing$。

从表中可以得到，在对应着 $S_3(A)$的列中根据模型 $\mathcal{M}_5$ 的约束，强迫约束其为空集的五个命题初始组合的信度质量如何传递给 D^{Θ} 的某些命题。可以轻易检查到 $S_3(A)$的列命题之和等于 0+0.16+0.12+0.22+0+0.08=0.58(即当$\phi(A)=0$ 时，等于 $S_1(A)$的和)；以及当 $\phi(A)=1$，$S_2(A)$的和等于当 $\phi(A)=0$ 时$S_3(A)$的和，即 0.02+0.06+0.04=0.12=0.02+0.02+0.08。

Element A of D^{Θ}	$\phi(A)$	$S_1(A)$	$S_2(A)$	$S_3(A)$	$m_{\mathcal{M}_5(\Theta)}(A)$
$\varnothing$	0	0	0	0	0
$\theta_1\cap\theta_2\cap\theta_3\overset{\mathcal{M}_5}{\equiv}\varnothing$	0	0.16	0	0	0
$\theta_2\cap\theta_3$	1	0.19	0	0	0.19
$\theta_1\cap\theta_3\overset{\mathcal{M}_5}{\equiv}\varnothing$	0	0.12	0	0	0
$(\theta_1\cup\theta_2)\cap\theta_3\overset{\mathcal{M}_5}{\equiv}\theta_2\cap\theta_3$	1	0.01	0	0.02	0.03
θ_3	1	0.10	0	0.01	0.11
$\theta_1\cap\theta_2\overset{\mathcal{M}_5}{\equiv}\varnothing$	0	0.22	0	0.02	0
$(\theta_1\cup\theta_3)\cap\theta_2\overset{\mathcal{M}_5}{\equiv}\theta_2\cap\theta_3$	1	0.05	0	0.02	0.07
$(\theta_2\cup\theta_3)\cap\theta_1\overset{\mathcal{M}_5}{\equiv}\varnothing$	0	0	0	0.02	0
$(\theta_1\cap\theta_2)\cup(\theta_1\cap\theta_3)\cup(\theta_2\cap\theta_3)\overset{\mathcal{M}_5}{\equiv}\theta_2\cap\theta_3$	1	0	0	0	0
$(\theta_1\cap\theta_2)\cup\theta_3\overset{\mathcal{M}_5}{\equiv}\theta_3$	1	0	0	0.07	0.07
θ_2	1	0.03	0	0.05	0.08
$(\theta_1\cap\theta_3)\cup\theta_2\overset{\mathcal{M}_5}{\equiv}\theta_2$	1	0	0	0.01	0.01

Element A of D^{Θ}	$\phi(A)$	$S_1(A)$	$S_2(A)$	$S_3(A)$	$m_{\mathcal{M}_5(\Theta)}(A)$
$\theta_2 \cup \theta_3$	1	0	0	0	0
$\theta_1 \overset{\mathcal{M}_5}{\equiv} \varnothing$	0	0.08	0.02	0.08	0
$(\theta_2 \cap \theta_3) \cup \theta_1 \overset{\mathcal{M}_5}{\equiv} \theta_2 \cap \theta_3$	1	0.02	0	0.02	0.04
$\theta_1 \cup \theta_3 \overset{\mathcal{M}_5}{\equiv} \theta_3$	1	0.02	0.02	0.17	0.21
$\theta_1 \cup \theta_2 \overset{\mathcal{M}_5}{\equiv} \theta_2$	1	0	0.06	0.09	0.15
$\theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3 \overset{\mathcal{M}_5}{\equiv} \theta_2 \cup \theta_3$	1	0	0.04	0	0.04

在最终完成合并步骤以后（即所有等价命题合并同类项），得到缩减的超幂集 $D^{\Theta}_{\mathcal{M}_5}$ 仅有如下五个不同的命题：

Element A of $D^{\Theta}_{\mathcal{M}_5}$	$m_{\mathcal{M}_5(\Theta)}(A)$
$\varnothing$	0
$\theta_2 \cap \theta_3$	0.19+0.03+0.07+0+0.04=0.33
θ_3	0.11+0.07+0.21=0.39
θ_2	0.08+0.01+0.15=0.24
$\theta_2 \cup \theta_3$	0+0.04=0.04

$$\mathbf{D}_{\mathcal{M}_5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

基向量 $\boldsymbol{u}_{\mathcal{M}_5}$ 通过 $\boldsymbol{u}_{\mathcal{M}_5} = [<2><3><23>]'$ 给出。编码矩阵 $\mathbf{D}_{\mathcal{M}_5}$ 在上面给出。

6. 应用混合 DSm 规则的第六个例子

下面是对应包括两个非存在性约束 $\theta_1 \overset{\mathcal{M}_6}{\equiv} \varnothing$ 和 $\theta_2 \overset{\mathcal{M}_6}{\equiv} \varnothing$ 的混合模型 $\mathcal{M}_6$ 的数值融合结果。这实际上是一个退化的实例，因为在这个不常见的模型中没有不确定性。这里只想说明混合 DSm 规则在这个例子中仍然有效，并且提供如下一个合理的融合结果：

Element A of D^{Θ}	$\phi(A)$	$S_1(A)$	$S_2(A)$	$S_3(A)$	$m_{\mathcal{M}_6(\Theta)}(A)$
$\varnothing$	0	0	0	0	0
$\theta_1 \cap \theta_2 \cap \theta_3 \overset{\mathcal{M}_6}{\equiv} \varnothing$	0	0.16	0	0	0
$\theta_2 \cap \theta_3 \overset{\mathcal{M}_6}{\equiv} \varnothing$	0	0.19	0	0	0
$\theta_1 \cap \theta_3 \overset{\mathcal{M}_6}{\equiv} \varnothing$	0	0.12	0	0	0
$(\theta_1 \cup \theta_2) \cap \theta_3 \overset{\mathcal{M}_6}{\equiv} \varnothing$	0	0.01	0	0.02	0
θ_3	1	0.10	0	0.07	0.17
$\theta_1 \cap \theta_2 \overset{\mathcal{M}_6}{\equiv} \varnothing$	0	0.22	0	0.02	0
$(\theta_1 \cup \theta_3) \cap \theta_2 \overset{\mathcal{M}_6}{\equiv} \varnothing$	0	0.05	0	0.02	0

Element A of D^{Θ}	$\phi(A)$	$S_1(A)$	$S_2(A)$	$S_3(A)$	$m_{\mathcal{M}_6(\Theta)}(A)$
$(\theta_2 \cup \theta_3) \cap \theta_1 \overset{\mathcal{M}_6}{\equiv} \varnothing$	0	0	0	0.02	0
$(\theta_1 \cap \theta_2) \cup (\theta_1 \cap \theta_3) \cup (\theta_2 \cap \theta_3) \overset{\mathcal{M}_6}{\equiv} \varnothing$	0	0	0	0	0
$(\theta_1 \cap \theta_2) \cup \theta_3 \overset{\mathcal{M}_6}{\equiv} \theta_3$	1	0	0	0.07	0.07
$\theta_2 \overset{\mathcal{M}_6}{\equiv} \varnothing$	0	0.03	0.02	0.11	0
$(\theta_1 \cap \theta_3) \cup \theta_2 \overset{\mathcal{M}_6}{\equiv} \varnothing$	0	0	0	0.01	0
$\theta_2 \cup \theta_3 \overset{\mathcal{M}_6}{\equiv} \theta_3$	1	0	0.04	0.05	0.09
$\theta_1 \overset{\mathcal{M}_6}{\equiv} \varnothing$	0	0.08	0	0.08	0
$(\theta_2 \cap \theta_3) \cup \theta_1 \overset{\mathcal{M}_6}{\equiv} \varnothing$	0	0.02	0	0.02	0
$\theta_1 \cup \theta_3 \overset{\mathcal{M}_6}{\equiv} \theta_3$	1	0.02	0.02	0.19	0.23
$\theta_1 \cup \theta_2 \overset{\mathcal{M}_6}{\equiv} \varnothing$	0	0	0.21	0.12	0
$\theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3 \overset{\mathcal{M}_6}{\equiv} \theta_3$	1	0	0.36	0.08	0.44

这里仍然可以验证 $S_3(A)$的和(即 0.88)等于当 $\phi(A)=0 S_1(A)$的和；以及当$\varnothing(A)=1$ 时，$S_2(A)$的和等于当 $\phi(A)=0 S_3(A)$的和。在所有等价命题的合并后，得到缩减的超幂集 $D^{\Theta}_{\mathcal{M}_6}$ 仅有如下两个不同的命题：

Element A of $D^{\Theta}_{\mathcal{M}_6}$	$m_{\mathcal{M}_6(\Theta)}(A)$
$\varnothing$	0
θ_3	0.17+0.07+0.09+0.23+0.44=1

编码矩阵 $\mathbf{D}_{\mathcal{M}_6}=[01]'$，且 $D^{\Theta}_{\mathcal{M}_6}$ 命题的基向量 $\mathbf{u}_{\mathcal{M}_6}=[\langle 3\rangle]$。

7. 应用混合 DSm 规则的第七个例子

下面对应包括混合排斥性和非存在性约束$(\theta_1 \cap \theta_2) \cup \theta_3 \overset{\mathcal{M}_7}{\equiv} \varnothing$ 的混合模型 $\mathcal{M}_7$ 下的数值融合结果。这个混合约束暗示了 $\theta_1 \cap \theta_2 \cap \theta_3 \overset{\mathcal{M}_7}{\equiv} \varnothing$，$\theta_1 \cap \theta_2 \overset{\mathcal{M}_7}{\equiv} \varnothing$，$\theta_1 \cap \theta_3 \overset{\mathcal{M}_7}{\equiv} \varnothing$，$\theta_2 \cap \theta_3 \overset{\mathcal{M}_7}{\equiv} \varnothing$ $(\theta_1 \cup \theta_2) \cap \theta_3 \overset{\mathcal{M}_7}{\equiv} \varnothing$，$(\theta_1 \cup \theta_3) \cap \theta_2 \overset{\mathcal{M}_7}{\equiv} \varnothing$，$(\theta_2 \cup \theta_3) \cap \theta_1 \overset{\mathcal{M}_7}{\equiv} \varnothing$，$\{(\theta_1 \cap \theta_2) \cup \theta_3\} \cap (\theta_1 \cup \theta_2) \overset{\mathcal{M}_7}{\equiv} \varnothing$ 以及 $\theta_3 \overset{\mathcal{M}_7}{\equiv} \varnothing$ 。通过应用混合 DSm 组合规则得到：

Element A of D^{Θ}	$\phi(A)$	$S_1(A)$	$S_2(A)$	$S_3(A)$	$m_{\mathcal{M}_7(\Theta)}(A)$
$\varnothing$	0	0	0	0	0
$\theta_1 \cap \theta_2 \cap \theta_3 \overset{\mathcal{M}_7}{\equiv} \varnothing$	0	0.16	0	0	0
$\theta_2 \cap \theta_3 \overset{\mathcal{M}_7}{\equiv} \varnothing$	0	0.19	0	0	0
$\theta_1 \cap \theta_3 \overset{\mathcal{M}_7}{\equiv} \varnothing$	0	0.12	0	0	0

Element A of D^{Θ}	$\phi(A)$	$S_1(A)$	$S_2(A)$	$S_3(A)$	$m_{\mathcal{M}_7(\Theta)}(A)$
$(\theta_1 \cup \theta_2) \cap \theta_3 \overset{\mathcal{M}_7}{\equiv} \varnothing$	0	0.01	0	0.02	0
$\theta_3 \overset{\mathcal{M}_7}{\equiv} \varnothing$	0	0.10	0.03	0.10	0
$\theta_1 \cap \theta_2 \overset{\mathcal{M}_7}{\equiv} \varnothing$	0	0.22	0	0.02	0
$(\theta_1 \cup \theta_3) \cap \theta_2 \overset{\mathcal{M}_7}{\equiv} \varnothing$	0	0.05	0	0.02	0
$(\theta_2 \cup \theta_3) \cap \theta_1 \overset{\mathcal{M}_7}{\equiv} \varnothing$	0	0	0	0.02	0
$(\theta_1 \cap \theta_2) \cup (\theta_1 \cap \theta_3) \cup (\theta_2 \cap \theta_3) \overset{\mathcal{M}_7}{\equiv} \varnothing$	0	0	0	0	0
$(\theta_1 \cap \theta_2) \cup \theta_3 \overset{\mathcal{M}_7}{\equiv} \varnothing$	0	0	0	0.07	0
θ_2	1	0.03	0	0.09	0.12
$(\theta_1 \cap \theta_3) \cup \theta_2 \overset{\mathcal{M}_7}{\equiv} \theta_2$	1	0	0	0.01	0.01
$\theta_2 \cup \theta_3 \overset{\mathcal{M}_7}{\equiv} \theta_2$	1	0	0.06	0.05	0.11
θ_1	1	0.08	0	0.06	0.14
$(\theta_2 \cap \theta_3) \cup \theta_1 \overset{\mathcal{M}_7}{\equiv} \theta_1$	1	0.02	0	0.02	0.04
$\theta_1 \cup \theta_3 \overset{\mathcal{M}_7}{\equiv} \theta_1$	1	0.02	0.01	0.22	0.25
$\theta_1 \cup \theta_2$	1	0	0.02	0.09	0.11
$\theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3 \overset{\mathcal{M}_7}{\equiv} \theta_1 \cup \theta_2$	1	0	0.16	0.06	0.22

在所有等价命题合并后，得到缩减的超幂集 $D^{\Theta}_{\mathcal{M}_7}$ 仅有如下四个不同的命题：

Element A of $D^{\Theta}_{\mathcal{M}_7}$	$m_{\mathcal{M}_7(\Theta)}(A)$
$\varnothing$	0
θ_2	0.12+0.01+0.11=0.24
θ_1	0.14+0.04+0.25=0.43
$\theta_1 \cup \theta_2$	0.11+0.22=0.33

$D^{\Theta}_{\mathcal{M}_7}$ 命题的基向量 $\boldsymbol{u}_{\mathcal{M}_7}$ 和编码矩阵 $\boldsymbol{D}_{\mathcal{M}_7}$ 如下：

$$\boldsymbol{u}_{\mathcal{M}_7} = [<1><2>]', \boldsymbol{D}_{\mathcal{M}_7} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

同样可以验证 $S_3(A)$ 的和（即 0.85）等于在 $\phi(A)=0$ 时 $S_1(A)$ 的和；以及在 $\phi(A)=1$时，$S_2(A)$的和等于在 $\phi(A)=0$ 时 $S_3(A)$的和。

4.5.9 用更多的一般基本信度赋值 $m_1(\cdot)$和 $m_2(\cdot)$的例子

本节介绍采用两个一般基本信度赋值 $m_1(\cdot)$和 $m_2(\cdot)$的混合 DSm 组合规则应用在前面七个模型的数值结果。其中对所有的命题 $A\neq\varnothing\in D^{\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}}$，有 $m_1(A)>0$ 以及 $m_2(A)>0$。这里只提供结果，验证过程留给读者。下表给出利用 $m_1(\cdot)$和 $m_2(\cdot)$所选的数值及通过经典 DSm 组合规则得到的融合结果。

Element A of D^Θ	$m_1(A)$	$m_2(A)$	$m_{\mathcal{M}^f}(A)$
$\varnothing$	0	0	0
$\theta_1\cap\theta_2\cap\theta_3$	0.01	0.40	0.4389
$\theta_2\cap\theta_3$	0.04	0.03	0.0410
$\theta_1\cap\theta_3$	0.03	0.04	0.0497
$(\theta_1\cup\theta_2)\cap\theta_3$	0.01	0.02	0.0257
θ_3	0.03	0.04	0.0311
$\theta_1\cap\theta_2$	0.02	0.20	0.1846
$(\theta_1\cup\theta_3)\cap\theta_2$	0.02	0.01	0.0156
$(\theta_2\cup\theta_3)\cap\theta_1$	0.03	0.04	0.0459
$(\theta_1\cap\theta_2)\cup(\theta_1\cap\theta_3)\cup(\theta_2\cap\theta_3)$	0.04	0.03	0.0384
$(\theta_1\cap\theta_2)\cup\theta_3$	0.04	0.03	0.0296
θ_2	0.02	0.01	0.0084
$(\theta_1\cap\theta_3)\cup\theta_2$	0.01	0.02	0.0221
$\theta_2\cup\theta_3$	0.20	0.02	0.0140
θ_1	0.01	0.02	0.0109
$(\theta_2\cap\theta_3)\cup\theta_1$	0.02	0.01	0.0090
$\theta_1\cup\theta_3$	0.04	0.03	0.0136
$\theta_1\cup\theta_2$	0.03	0.04	0.0175
$\theta_1\cup\theta_2\cup\theta_3$	0.40	0.01	0.0040

针对前面的例子，下表给出在混合 DSm 模型下通过混合 DSm 规则，最终合并同类项之前的结果。

Element A of D^Θ	$m_{\mathcal{M}_1}(A)$	$m_{\mathcal{M}_2}(A)$	$m_{\mathcal{M}_3}(A)$	$m_{\mathcal{M}_4}(A)$	$m_{\mathcal{M}_5}(A)$	$m_{\mathcal{M}_6}(A)$	$m_{\mathcal{M}_7}(A)$
$\varnothing$	0	0	0	0	0	0	0
$\theta_1\cap\theta_2\cap\theta_3$	0	0	0	0	0	0	0
$\theta_2\cap\theta_3$	0.0573	0.0573	0	0	0.0573	0	0

Element A of D^{Θ}	$m_{\mathcal{M}_1}(A)$	$m_{\mathcal{M}_2}(A)$	$m_{\mathcal{M}_3}(A)$	$m_{\mathcal{M}_4}(A)$	$m_{\mathcal{M}_5}(A)$	$m_{\mathcal{M}_6}(A)$	$m_{\mathcal{M}_7}(A)$
$\theta_1 \cap \theta_3$	0.0621	0.0621	0.0621	0	0	0	0
$(\theta_1 \cup \theta_2) \cap \theta_3$	0.0324	0.0324	0.0335	0	0.0334	0	0
θ_3	0.0435	0.0435	0.0460	0.0494	0.0459	0.0494	0
$\theta_1 \cap \theta_2$	0.1946	0	0	0	0	0	0
$(\theta_1 \cup \theta_3) \cap \theta_2$	0.0323	0.0365	0	0	0.0365	0	0
$(\theta_2 \cup \theta_3) \cap \theta_1$	0.0651	0.0719	0.0719	0	0	0	0
$(\theta_1 \cap \theta_2) \cup (\theta_1 \cap \theta_3) \cup (\theta_2 \cap \theta_3)$	0.0607	0.0704	0.0743	0	0.0764	0	0
$(\theta_1 \cap \theta_2) \cup \theta_3$	0.0527	0.0613	0.0658	0.0792	0.0687	0.0792	0
θ_2	0.0165	0.0207	0.0221	0.0221	0.0207	0	0.0221
$(\theta_1 \cap \theta_3) \cup \theta_2$	0.0274	0.0309	0.0340	0.0375	0.0329	0	0.0375
$\theta_2 \cup \theta_3$	0.0942	0.1346	0.1471	0.1774	0.1518	0.1850	0.1953
θ_1	0.0151	0.0175	0.0175	0.0195	0	0	0.0195
$(\theta_2 \cap \theta_3) \cup \theta_1$	0.0182	0.0229	0.0243	0.0295	0.0271	0	0.0295
$\theta_1 \cup \theta_3$	0.0299	0.0385	0.0419	0.0558	0.0489	0.0589	0.0631
$\theta_1 \cup \theta_2$	0.0299	0.0412	0.0452	0.0544	0.0498	0	0.0544
$\theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3$	0.1681	0.2583	0.3143	0.4752	0.3506	0.6275	0.5786

下表给出在完成合并步骤（所有等价命题合并）之后的混合 DSm 组合结果。

Element A of $D^{\Theta}_{\mathcal{M}_7}$	$m_{\mathcal{M}_7(\Theta)}(A)$
$\varnothing$	0
θ_2	0.2549
θ_1	0.1121
$\theta_1 \cup \theta_2$	0.6330

例 7

Element A of $D^{\Theta}_{\mathcal{M}_6}$	$m_{\mathcal{M}_6(\Theta)}(A)$
$\varnothing$	0
θ_3	1

例 6

Element A of $D^{\Theta}_{\mathcal{M}_6}$	$m_{\mathcal{M}_5(\Theta)}(A)$
$\varnothing$	0
$\theta_2 \cap \theta_3$	0.2307
θ_3	0.1635
θ_2	0.1034
$\theta_2 \cup \theta_3$	0.5024

例 5

Element A of $D^{\Theta}_{\mathcal{M}_4}$	$m_{\mathcal{M}_4(\Theta)}(A)$
$\varnothing$	0
θ_3	0.1286
θ_2	0.0596
$\theta_2 \cup \theta_3$	0.1774
θ_1	0.0490
$\theta_1 \cup \theta_3$	0.0558
$\theta_1 \cup \theta_2$	0.0544
$\theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3$	0.4752

例 4

Element A of $D^{\Theta}_{\mathcal{M}_3}$	$m_{\mathcal{M}_3(\Theta)}(A)$
$\varnothing$	0
$\theta_1 \cap \theta_3$	0.2418
θ_3	0.1118
θ_2	0.0221
$(\theta_1 \cap \theta_3) \cup \theta_2$	0.0340
$\theta_2 \cup \theta_3$	0.1471
θ_1	0.0418
$\theta_1 \cup \theta_3$	0.0419
$\theta_1 \cup \theta_2$	0.0452
$\theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3$	0.3143

例 3

Element A of $D^{\Theta}_{\mathcal{M}_2}$	$m_{\mathcal{M}_2(\Theta)}(A)$
$\varnothing$	0
$\theta_2 \cap \theta_3$	0.0938
$\theta_1 \cap \theta_3$	0.1340
$(\theta_1 \cup \theta_2) \cap \theta_3$	0.1028
θ_3	0.1048
θ_2	0.0207
$(\theta_1 \cap \theta_3) \cup \theta_2$	0.0309
$\theta_2 \cup \theta_3$	0.1346
θ_1	0.0175
$(\theta_2 \cap \theta_3) \cup \theta_1$	0.0229
$\theta_1 \cup \theta_3$	0.0358
$\theta_1 \cup \theta_2$	0.0412
$\theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3$	0.2583

例 2

Element A of $D^{\Theta}_{\mathcal{M}_1}$	$m_{\mathcal{M}_1(\Theta)}(A)$
$\varnothing$	0
$\theta_2 \cap \theta_3$	0.0573
$\theta_1 \cap \theta_3$	0.0621
$(\theta_1 \cup \theta_2) \cap \theta_3$	0.0324
θ_3	0.0435
$\theta_1 \cap \theta_2$	0.1946
$(\theta_1 \cup \theta_3) \cap \theta_2$	0.0323
$(\theta_2 \cup \theta_3) \cap \theta_1$	0.0651
$(\theta_1 \cap \theta_2) \cup (\theta_1 \cap \theta_3) \cup (\theta_2 \cap \theta_3)$	0.0607
$(\theta_1 \cap \theta_2) \cup \theta_3$	0.0527
θ_2	0.0165
$(\theta_1 \cap \theta_3) \cup \theta_2$	0.0274
$\theta_2 \cup \theta_3$	0.0942
θ_1	0.0151
$(\theta_2 \cap \theta_3) \cup \theta_1$	0.0182
$\theta_1 \cup \theta_3$	0.0299
$\theta_1 \cup \theta_2$	0.0299
$\theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3$	0.1681

例 1

4.5.10 混合 DSm 规则与 Dempster 组合规则

本质上，混合 DSm 组合规则与 Dubois-Prade（见第 2 章和文献[4]）组合规则相近，但是更通用和更精确，因为它作用在 $D^{\Theta} \supset 2^{\Theta}$，且允许工作的模型包含所有可能的排斥性和非存在性约束。采用混合 DSm 规则的优点是它不要求计算权重因子，也不需要归一化处理。混合 DSm 组合规则不同于 Dempster 组合规则，很容易在下面的例子中证明：

考虑 $\Theta = \{\theta_1, \theta_2\}$，且在两个信息源完全冲突的情况下，其基本信度赋值为

$$m_1(\theta_1) = 1 \qquad m_1(\theta_2) = 0$$
$$m_2(\theta_1) = 0 \qquad m_2(\theta_2) = 1$$

利用自由 DSm 模型 $\mathcal{M}^f$ 的经典 DSm 组合规则，得到

$$m_{\mathcal{M}^f}(\theta_1) = 0 \quad m_{\mathcal{M}^f}(\theta_2) = 0 \quad m_{\mathcal{M}^f}(\theta_1 \cap \theta_2) = 1 \quad m_{\mathcal{M}^f}(\theta_1 \cup \theta_2) = 0$$

如果强迫 θ_1 和 θ_2 为排斥性约束的 Shafer 模型，那么 Dempster 组合规则不能够在这种约束的情况下使用，因为两个信息源的完全约束，从而出现未定义的运算

0/0。但是混合 DSm 规则可以在这种限制情况下使用，因为它把这个空集（$\theta_1 \cap \theta_2 \equiv \varnothing$ 是因为选择了模型 $\mathcal{M}^0$）的信度质量传递给非空集，且得到

$$m_{\mathcal{M}^0}(\theta_1)=0 \quad m_{\mathcal{M}^0}(\theta_2)=0 \quad m_{\mathcal{M}^0}(\theta_1 \cap \theta_2)=0 \quad m_{\mathcal{M}^0}(\theta_1 \cup \theta_2)=1$$

在这个非常简单的情况下得到的此结果与 Yager 和 Dubois-Prade[11,4]组合规则相一致。

现在检验一下，当在初始基本信度赋值 $m_1(\cdot)$ 和 $m_2(\cdot)$ 中引入一个小变量 $\varepsilon>0$ 时，$m_1(\theta_1)=1-\varepsilon$，$m_1(\theta_2)=\varepsilon$ 和 $m_2(\theta_1)=\varepsilon$，$m_2(\theta_2)=1-\varepsilon$ 的数值融合结果如图 4.2 所示，$\lim_{\varepsilon\to 0} m_{DS}(\cdot)$，其中 $m_{DS}(\cdot)$ 是用 Dempster 组合规则得到的结果。

$$m_{DS}(\theta_1)=0.5 \quad m_{DS}(\theta_2)=0.5 \quad m_{DS}(\theta_1 \cap \theta_2)=0 \quad m_{DS}(\theta_1 \cup \theta_2)=0$$

这个结果是非常可疑的，因为它给 θ_1 和 θ_2 赋同样的值，这比赋所有信度给完全未知集更具体。从我们的角度来看，赋信度给完全未知集似乎更合理，因为它能正确反映出两个信息源间总的冲突。在这种情况下，从融合中提取的信息似乎很合理。应用混合 DSm 组合规则（用 Shafer 模型 $\mathcal{M}^0$），会得到在完全未知情况下预期的信度赋值，即 $m_{\mathcal{M}^0}(\theta_1 \cup \theta_2)=1$。关于 θ_1、θ_2 以及 $\theta_1 \cup \theta_2$ 的信度赋值随着变量 ε 的变化，通过经典 Dempster 规则和基于 Shafer 模型 $\mathcal{M}^0$（即 $\theta_1 \cap \theta_2 \overset{\mathcal{M}_0}{\equiv} \varnothing$）的混合 DSm 规则分别融合获得的信度赋值的估计如图 4.2 所示。

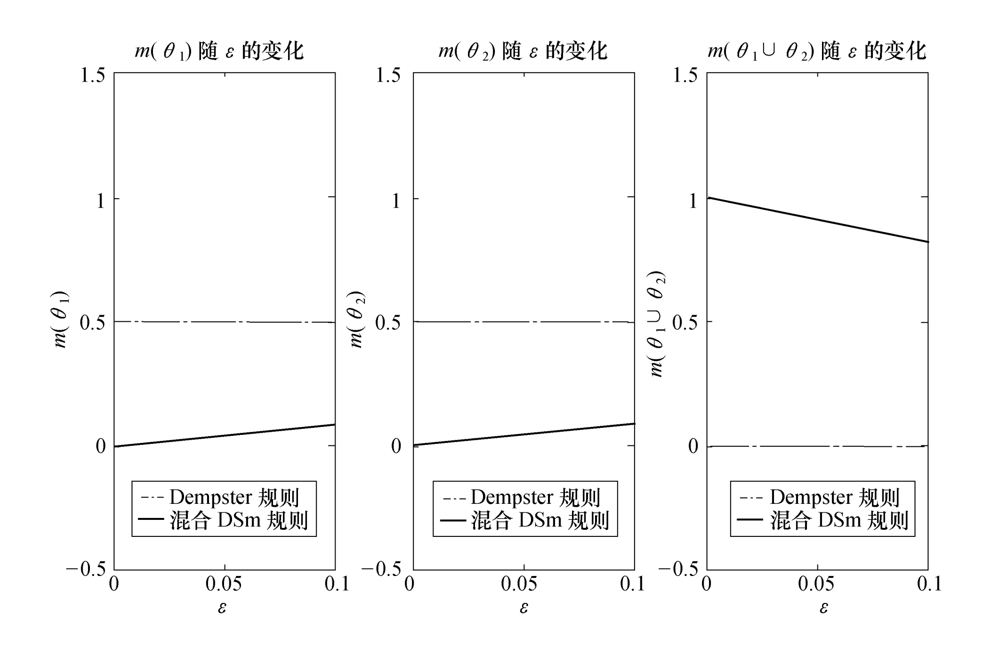


图 4.2 当 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2\}$ 时混合 DSm 规则与 Dempster 组合规则之间的比较

4.6 动态融合

前面介绍的混合 DSm 组合规则尽管已经发展为处理静态融合问题的方法，但是在简单处理动态融合问题时仍然可以直接实时应用，因为在模型暂时改变时，仍然可以运用这样的混合规则。假设 D^{Θ} 由于框架 Θ 的动态性而改变，即从时间 t_l 到 t_{l+1}，它的一些命题在时间 t_l 时为非空集，但在时间 t_{l+1} 变成（或被证明是）空集，反之亦然；如果新的命题在时间 t_l 时为空，在时间 t_{l+1} 时变为非空集，那么这个混合 DSm 规则可以在每次变化时重复应用。如果 Θ 保持不变，但是它的非空命题 D^{Θ} 集发生增长变化，那么可以重复应用混合 DSm 规则。

4.6.1 例 1

这里考虑如下框架的证据融合问题：①

$$\Theta(t_l) \triangleq \{\theta_1 \equiv \text{young}, \theta_2 \equiv \text{old}, \theta_3 \equiv \text{white hairs}\}$$

其两个证据源的基本信度赋值定义如下：

$$m_1(\theta_1) = 0.5 \quad m_1(\theta_3) = 0.5 \quad \text{且} \quad m_2(\theta_2) = 0.5 \quad m_2(\theta_3) = 0.5$$

通过应用经典 DSm 融合规则，得到

$$m_{\mathcal{M}^f(\Theta(t_l))}(\theta_1 \cap \theta_2) = 0.25 \quad m_{\mathcal{M}^f(\Theta(t_l))}(\theta_1 \cap \theta_3) = 0.25$$
$$m_{\mathcal{M}^f(\Theta(t_l))}(\theta_2 \cap \theta_3) = 0.25 \quad m_{\mathcal{M}^f(\Theta(t_l))}(\theta_3) = 0.25$$

现在假设在时间 t_{l+1}，某人认为年轻人没有白头发（即 $\theta_1 \cap \theta_3 \equiv \varnothing$）。怎样在此约束问题的模型上用这个新的信息更新前面的融合结果呢？这里采用混合 DSm 规则来解决它，将空集的信度质量（利用时间 t_{l+1} 新模型 $\mathcal{M}$ 上的约束）传递到 D^{Θ} 的非空集。在约束 $\theta_1 \cap \theta_3 \equiv \varnothing$ 下运用混合 DSm 规则，得到

$$m_{\mathcal{M}}(\theta_1 \cap \theta_2) = 0.25 \quad m_{\mathcal{M}}(\theta_2 \cap \theta_3) = 0.25 \quad m_{\mathcal{M}}(\theta_3) = 0.25$$

因为 $\theta_1 \cap \theta_2 = \{\text{young}\} \cap \{\text{white hairs}\} \overset{\mathcal{M}}{\equiv} \varnothing$，所以混合质量 $m_{\mathcal{M}}(\theta_1 \cap \theta_3) = 0$，前面的混合质量 $m_{\mathcal{M}^f(\Theta(t_l))}(\theta_1 \cap \theta_3) = 0.25$ 通过混合 DSm 规则被传递到 $m_{\mathcal{M}}(\theta_1 \cup \theta_3) = 0.25$。

4.6.2 例 2

令 $\Theta(t_l) = \{\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n\}$ 为嫌疑人的列表，考虑两个目击到巴格达博物馆抢劫现场的观察者，他们用 $D^{\Theta(t_l)}$ 上定义的基本信度赋值 $m_1(\cdot)$ 和 $m_2(\cdot)$ 向广播台和电视台证实劫匪身份，其中 t_l 代表观察的时间。之后，在时间 t_{l+1}，其中一人发现

---

① 该问题已经于 2002 年在 L. Cholvy 建议下，与作者以私人的方式进行了交流。

了一个在列表 $\Theta(t_l)$ 中的嫌疑人，记为 θ_i，证明不可能是嫌疑人，因为他在另一个地方值班，且证据确凿。因此把 θ_i 从 $\Theta(t_l)$ 中删除，得到了新的鉴别框架 $\Theta(t_{l+1})$。如果鉴别框再次改变，可以重复地运用混合 DSm 规则。这是一个典型的动态实例，其中模型随时间改变，且需要使结果与当前随时间变化的模型相适应。同时，一旦在混合系统中有新的目击者/证据可用，也要在混合 DSm 融合规则中加以考虑。

如果 $\Theta(D^{\Theta})$ 中的命题从时间 t_l 到时间 t_{l+1} 减少（即它们的一些命题被证明是空集），那么为了把空集的信度质量传递到非空集上，应用混合 DSm 规则获得一个更新的基本信度赋值 $m_{t_l+1|t_l}(\cdot)$。反之，如果 Θ 及 D^{Θ} 中的命题增加（即新的命题添加到 Θ 中，并且/或者在 D^{Θ} 中有新的命题被证明不是空集，接下来要求对它们有一个新的基本信度赋值），那么一个新的质量（来自于这个或其他信息源）需要用来描述这些新的命题，再次运用混合 DSm 规则来组合它们。

4.6.3 例 3

考虑在时间 t_l 以框架 $\Theta(t_l)\triangleq\{\theta_1,\theta_2\}$ 为特征的融合问题，以及两个提供 $D^{\Theta(t_l)}$ 上基本信度赋值 $m_1(\cdot)$ 及 $m_2(\cdot)$ 的独立信息源。假设在时间 t_{l+1} 一个新的假设 θ_3 被引入，且在时间 t_{l+1} 可用的第三个信息源提供它自身在 $D^{\Theta(t_l)}$ 上的基本信度赋值 $m_3(\cdot)$，其中

$$\Theta(t_{l+1})\triangleq\{\Theta(t_l),\theta_3\}\equiv\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}$$

为了解决这种动态融合问题，仅用如下经典 DSm 规则：

- 用经典 DSm 融合规则组合在时间 t_l 时 $m_1(\cdot)$ 及 $m_2(\cdot)$ 来获得 $D^{\Theta(t_l)}$ 上的 $m_{12}(\cdot)=[m_1\oplus m_2](\cdot)$。
- 由于 $D^{\Theta(t_l)}\subset D^{\Theta(t_{l+1})}$，$m_{12}(\cdot)$ 赋组合后的基本信度赋值到 $D^{\Theta(t_{l+1})}$ 的一个子集上，通过经典 DSm 融合规则来组合在时间 t_{l+1} 时的 $m_{12}(\cdot)$ 和 $m_3(\cdot)$，来获得最终的结果在 $D^{\Theta(t_{l+1})}$ 上的 $m_{123}(\cdot)$，即

$$\begin{aligned}m_{t_{l+1}}(\cdot)&\triangleq m_{123}(\cdot)=[m_{12}\oplus m_3](\cdot)\\&=[(m_1\oplus m_2)\oplus m_3](\cdot)\equiv[m_1\oplus m_2\oplus m_3](\cdot)\end{aligned}$$

- 如果一些完全约束被考虑到问题模型 $\mathscr{M}$ 中，那么最终不得不运用混合 DSm 规则。

这种方法可直接推广到任意数量的证据源，并从理论上讲，推广到任意框架结构/尺寸 $\Theta(t_l)$、$\Theta(t_{l+1})$、…。但是在实践中，由于超幂集数量巨大的命题，框架 $\Theta(t_l)$，$\Theta(t_{l+1})$，…的尺寸不能够太大。这个实际的限制依赖于计算机实时处理的能力。具体的 DSm 规则的近似处理方法将不得不发展到处理大维数框架的融合问题。

一般值得指出的是，DSmT 不仅可以轻松地处理动态融合问题，还可以处理在不完全框架下的非集中融合问题。例如，考虑两个独立信息源提供了在

$D^{\Theta_{12}(t_l)=\{\theta_1,\theta_2\}}$下的基本信度赋值 $m_1(\cdot)$和 $m_2(\cdot)$，另一组三个独立信息源提供了在 $D^{\Theta_{345}(t_l)=\{\theta_3,\theta_4,\theta_5\}}$下的基本信度赋值 $m_3(\cdot)$、$m_4(\cdot)$和 $m_5(\cdot)$，那么以一个分布组合方式组合所有的信息仍然是可能的，即：

- 用经典 DSm 融合规则来组合在时间 t_l 上的 $m_1(\cdot)$和 $m_2(\cdot)$来获得在 $D^{\Theta_{12}(t_l)}$上的 $m_{12}(\cdot)=[m_1 \oplus m_2](\cdot)$。
- 用经典 DSm 规则来组合在时间 t_l 上的 $m_3(\cdot)$、$m_4(\cdot)$和 $m_5(\cdot)$来获得 $D^{\Theta_{345}(t_l)}$上的 $m_{345}=[m_3 \oplus m_4 \oplus m_5](\cdot)$。
- 考虑全局框架 $\Theta(t_l) \triangleq \{\Theta_{12}(t_l),\Theta_{345}(t_l)\}$。
- 如果一些完全约束不得不被考虑到问题的模型 $\mathcal{M}$ 中，那么最终运用混合 DSm 规则。

注意：这个静态分布融合方式也可以通过混合两个前面介绍的动态融合方法来扩展到分布动态融合方式。

在统一两个证据源的鉴别框为 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\theta_5\}$的同时，通过扩展向量 $m_i(\cdot)(1 \leqslant i \leqslant 5$，五个带有补充零赋值的信度质量)，在对应扩展的 D^{Θ}，对包含 $k=5$ 个命题的两个证据源运用混合 DSm 规则进行组合，这种方法适合组合任意多个证据源的情况。

现在针对这种涉及非排斥框架的动态融合问题给出几个简单的数值实例。

1. 例 3.1

考虑 $\Theta(t_l) \triangleq \{\theta_1,\theta_2\}$，在时间 t_l 时可用的基本信度赋值如下：

$$m_1(\theta_1)=0.1 \quad m_1(\theta_2)=0.2 \quad m_1(\theta_1 \cup \theta_2)=0.3 \quad m_1(\theta_1 \cap \theta_2)=0.4$$
$$m_2(\theta_1)=0.5 \quad m_2(\theta_2)=0.3 \quad m_2(\theta_1 \cup \theta_2)=0.1 \quad m_2(\theta_1 \cap \theta_2)=0.1$$

经典 DSm 组合规则给出：

$$m_{12}(\theta_1)=0.21 \quad m_{12}(\theta_2)=0.17$$
$$m_{12}(\theta_1 \cup \theta_2)=0.03 \quad m_{12}(\theta_1 \cap \theta_2)=0.59$$

现在考虑在时间 t_{l+1}时的框架 $\Theta(t_{l+1}) \triangleq \{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}$，且第三个证据源有如下的基本信度赋值：

$$m_3(\theta_3)=0.4 \quad m_3(\theta_1 \cap \theta_3)=0.3 \quad m_3(\theta_2 \cup \theta_3)=0.3$$

通过采用经典 DSm 组合规则组合 $m_3(\cdot)$与 $m_{12}(\cdot)$，因此得到

$$m_{123}(\theta_1 \cap \theta_2 \cap \theta_3)=0.464 \quad m_{123}(\theta_2 \cap \theta_3)=0.068$$
$$m_{123}(\theta_1 \cap \theta_3)=0.156 \quad m_{123}((\theta_1 \cup \theta_2) \cap \theta_3)=0.012$$
$$m_{123}(\theta_1 \cap \theta_2)=0.177 \quad m_{123}(\theta_1 \cap (\theta_2 \cup \theta_3))=0.063$$
$$m_{123}(\theta_2)=0.051 \quad m_{123}((\theta_1 \cap \theta_3) \cup \theta_2)=0.009$$

2. 例 3.2

考虑 $\Theta(t_l) \triangleq \{\theta_1,\theta_2\}$，以及在时间 t_l 时可用的基本信度赋值 $m_1(\cdot)$和

$m_2(\cdot)$。像前面例子一样，运用经典 DSm 融合规则可得

$$m_{12}(\theta_1)=0.21 \quad m_{12}(\theta_2)=0.17$$
$$m_{12}(\theta_1 \cup \theta_2)=0.03 \quad m_{12}(\theta_1 \cap \theta_2)=0.59$$

现在考虑在时间 t_{l+1} 时的框架 $\Theta(t_{l+1}) \triangleq \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$，像前面实例一样，第三个证据源带有如下基本信度赋值：

$$m_3(\theta_3)=0.4 \quad m_3(\theta_1 \cap \theta_3)=0.3 \quad m_3(\theta_2 \cup \theta_3)=0.3$$

通过经典 DSm 组合规则得到的最终融合结果和前面的结果相一致，但是现在假设发现了完全约束 $\theta_3=\varnothing$，它还暗示了约束 $\theta_1 \cap \theta_2 \cap \theta_3=\varnothing$，$\theta_1 \cap \theta_3=\varnothing$，$\theta_2 \cap \theta_3=\varnothing$ 和 $(\theta_1 \cup \theta_2) \cap \theta_3=\varnothing$。这时必须考虑混合 DSm 模型 $\mathscr{M}$，然后，通过混合 DSm 规则重新调整前面实例融合得到的信度质量 $m_{123}(\cdot)$，且最终得到

$$m_{\mathscr{M}}(\theta_1)=0.147 \quad m_{\mathscr{M}}(\theta_2)=0.060+0.119=0.179$$
$$m_{\mathscr{M}}(\theta_1 \cup \theta_2)=0+0+0.021=0.021 \quad m_{\mathscr{M}}(\theta_1 \cap \theta_2)=0.240+0.413=0.653$$

因此，当约束 $\theta_3=\varnothing$，应用混合 DSm 规则，不会得到与前例相同的结果（即 $m_{\mathscr{M}}(\cdot) \neq m_{12}(\cdot)$），因为从第三个证据源的信度赋值 $m_3(\cdot)$ 看，它在 θ_1、θ_2、$\theta_1 \cup \theta_2$ 或者 $\theta_1 \cap \theta_2$ 上仍然保留了一些信息，如 $m_3(\theta_2)=0.3>0$。

3. 例 3.3

考虑 $\Theta(t_l) \triangleq \{\theta_1, \theta_2\}$，以及在时间 t_l 时可用的基本信度赋值 $m_1(\cdot)$ 和 $m_2(\cdot)$（同前例）。

运用经典 DSm 融合规则得到

$$m_{12}(\theta_1)=0.21 \quad m_{12}(\theta_2)=0.17$$
$$m_{12}(\theta_1 \cup \theta_2)=0.03 \quad m_{12}(\theta_1 \cap \theta_2)=0.59$$

现在考虑在时间 t_{l+l} 时的框架 $\Theta(t_{l+1}) \triangleq \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\}$ 以及第三个证据源提供如下的基本信度赋值：

$$m_3(\theta_3)=0.5 \quad m_3(\theta_4)=0.3 \quad m_3(\theta_3 \cap \theta_4)=0.1 \quad m_3(\theta_3 \cup \theta_4)=0.1$$

然后，在时间 t_{l+1} 时运用 DSm 规则得到

$$m_{123}(\theta_1 \cap \theta_3)=0.105 \quad m_{123}(\theta_1 \cap \theta_4)=0.063$$
$$m_{123}(\theta_1 \cap (\theta_3 \cup \theta_4))=0.021 \quad m_{123}(\theta_1 \cap \theta_3 \cap \theta_4)=0.021$$
$$m_{123}(\theta_2 \cap \theta_3)=0.085 \quad m_{123}(\theta_2 \cap \theta_4)=0.051$$
$$m_{123}(\theta_2 \cap (\theta_3 \cup \theta_4))=0.017 \quad m_{123}(\theta_2 \cap \theta_3 \cap \theta_4)=0.017$$
$$m_{123}(\theta_3 \cap (\theta_1 \cup \theta_2))=0.015 \quad m_{123}(\theta_4 \cap (\theta_1 \cup \theta_2))=0.009$$
$$m_{123}((\theta_1 \cup \theta_2) \cap (\theta_3 \cup \theta_4))=0.003$$
$$m_{123}((\theta_1 \cup \theta_2) \cap (\theta_3 \cap \theta_4))=0.003 \quad m_{123}(\theta_1 \cap \theta_2 \cap \theta_3)=0.295$$
$$m_{123}(\theta_1 \cap \theta_2 \cap \theta_4)=0.177$$

$$m_{123}((\theta_1 \cap \theta_2) \cap (\theta_3 \cup \theta_4)) = 0.059 \quad m_{123}(\theta_1 \cap \theta_2 \cap \theta_3 \cap \theta_4) = 0.059$$

现在假设在时间 t_{l+2} 某人发现 $\theta_3 = \theta_3 = \varnothing$，然后通过运用混合 DSm 规则，最终得到

$$\begin{aligned}
m_{t_{l+2}}(\theta_1) &= m_{123}(\theta_1) + \{m_{12}(\theta_1)m_3(\theta_3) + m_{12}(\theta_1)m_3(\theta_4) \\
&\quad + m_{12}(\theta_1)m_3(\theta_3 \cup \theta_4) + m_{12}(\theta_1)m_3(\theta_3 \cap \theta_4)\} \\
&= 0 + \{(0.21 \times 0.5) + (0.21 \times 0.3) \\
&\quad + (0.21 \times 0.1) + (0.21 \times 0.1)\} = 0.21 \\
m_{t_{l+2}}(\theta_2) &= m_{123}(\theta_2) + \{m_{12}(\theta_2)m_3(\theta_3) + m_{12}(\theta_2)m_3(\theta_4) \\
&\quad + m_{12}(\theta_2)m_3(\theta_3 \cup \theta_4) + m_{12}(\theta_2)m_3(\theta_3 \cap \theta_4)\} \\
&= 0 + \{(0.17 \times 0.5) + (0.17 \times 0.3) \\
&\quad + (0.17 \times 0.1) + (0.17 \times 0.1)\} = 0.17 \\
m_{t_{l+2}}(\theta_1 \cup \theta_2) &= m_{123}(\theta_1 \cup \theta_2) + \{m_{12}(\theta_1 \cup \theta_2)m_3(\theta_3) + m_{12}(\theta_1 \cup \theta_2)m_3(\theta_4) \\
&\quad + m_{12}(\theta_1 \cup \theta_2)m_3(\theta_3 \cup \theta_4) + m_{12}(\theta_1 \cup \theta_2)m_3(\theta_3 \cap \theta_4)\} \\
&\quad + \sum_{X_1, X_2 \in \{\theta_3, \theta_4, \theta_3 \cup \theta_4, \theta_3 \cap \theta_4\}} m_{12}(X_1)m_3(X_2) \\
&= 0 + \{(0.03 \times 0.5) + (0.03 \times 0.3) \\
&\quad + (0.03 \times 0.1) + (0.03 \times 0.1)\} + \{0\} = 0.03 \\
m_{t_{l+2}}(\theta_1 \cap \theta_2) &= m_{123}(\theta_1 \cap \theta_2) + \{m_{12}(\theta_1 \cap \theta_2)m_3(\theta_3) + m_{12}(\theta_1 \cap \theta_2)m_3(\theta_4) \\
&\quad + m_{12}(\theta_1 \cap \theta_2)m_3(\theta_3 \cup \theta_4) + m_{12}(\theta_1 \cap \theta_2)m_3(\theta_3 \cap \theta_4)\} \\
&= 0 + \{(0.59 \times 0.5) + (0.59 \times 0.3) \\
&\quad + (0.59 \times 0.1) + (0.59 \times 0.1)\} = 0.59
\end{aligned}$$

因此得到与在时间 t_l 时为 $m_{12}(\cdot)$ 同样的结果，它是归一化的。

注意：如果第三个信息源不赋非空信度质量给 θ_1 或 θ_2（或者 $\cup$ 或 $\cap$ 运算的集合），那么在时间 t_{l+2} 得到与例 3.3 中 t_l 时同样的结果，即当强迫 $\theta_3 = \theta_4 = \varnothing$ 时，$m_{l+2}(\cdot) = m_l(\cdot)$。但是，如果第三个信息源赋非空质量给 θ_1（或 θ_2，或 $\theta_1 \cup \theta_2$，或 $\theta_1 \cap \theta_2$），然后假设 $\theta_3 = \theta_4 = \varnothing$，强迫 Θ 从四个单子变为两个单子，那么通过运用混合 DSm 规则，在时间 t_{l+2} 的融合结果与它在时间 t_l 时不同。这是很正常的，因为一些信息/质量从第三个信息源中遗留下来了，现在与前面的信息源的那部分相融合（就像例 3.2 或者下面的例 3.4）。

一般说来，假设由信息源 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$ 提供的 $k \geqslant 2$ 个信度质量，在时间 t_l 对 $\Theta(t_l) = \{\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n\}$ 进行融合。在时间 t_{l+1} 新的非空命题 $\theta_{n+1}, \theta_{n+2}, \cdots, \theta_{n+m}$ 出现，$m \geqslant 1$，因此 $\Theta(t_{l+1}) = \{\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n, \theta_{n+1}, \theta_{n+2}, \cdots, \theta_{n+m}\}$，当然，一个或更多的证据源（即证据体）$\beta_k, \cdots, \beta_{k+l}$（$l \geqslant 1$）进一步参与进来给这些新的命题赋信度质量，则有如下结论。

- 如果所有这些新的信息源 $\beta_{k+l},\cdots,\beta_{k+l}$ 赋空质量给 $D^{\Theta(t_{l+1})}$ 中的所有命题，在结构/组成中至少包含 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n$ 中的一个单子，那么在时间 t_{l+2} 约束为 $\theta_{n+1}=\theta_{n+2}=\cdots=\theta_{n+m}=\varnothing$，然后利用混合 DSm 规则，得到像在时间 t_l 时一样的结果，即 $m_{l+2}(\cdot)=m_l(\cdot)$。
- 否则，时间 t_{l+2} 时的融合结果与时间 t_l 时的不同，这是因为信息源 $\beta_{k+1},\cdots,\beta_{k+l}$ 仍然给单子 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n$ 提供信息，或者 $D^{\Theta(t_l)}$ 的一些命题上仍然遗留了一些信息/质量，或者 $D^{\Theta(t_l)}$ 至少包含了一个这样的单子的信息/质量和前面的信息源融合。

4. 例 3.4

考虑 $\Theta(t_l)\triangleq\{\theta_1,\theta_2\}$，在时间 t_l 可用的基本信度赋值 $m_1(\cdot)$ 和 $m_2(\cdot)$ 如下：

$$m_1(\theta_1)=0.6\quad m_1(\theta_2)=0.4\quad \text{和}\quad m_2(\theta_1)=0.7\quad m_2(\theta_2)=0.3$$

经典 DSm 组合规则给出了 $m_{12}(\theta_1)=0.42$，$m_{12}(\theta_2)=0.12$ 及 $m_{12}(\theta_1\cap\theta_2)=0.46$。现在考虑在时间 t_{l+1} 时的框架 $\Theta(t_{l+1})\triangleq\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}$ 及第三个信息源，带有基本信度赋值 $m_3(\theta_1)=0.5$，$m_3(\theta_2)=0.2$ 和 $m_3(\theta_3)=0.3$。从经典 DSm 组合规则得到的最终结果仍然与前述相同：

$$m_{123}(\theta_1)=0.210\quad m_{123}(\theta_2)=0.024$$
$$m_{123}(\theta_1\cap\theta_2)=0.466\quad m_{123}(\theta_1\cap\theta_3)=0.126$$
$$m_{123}(\theta_2\cap\theta_3)=0.036\quad m_{123}(\theta_1\cap\theta_2\cap\theta_3)=0.138$$

现在假设某人发现完全约束 $\theta_1\cap\theta_3=\varnothing$，它也暗示着 $\theta_1\cap\theta_2\cap\theta_3=\varnothing$，这是所考虑的混合 DSm 模型 $\mathscr{M}$，通过运用混合 DSm 组合规则，强制 $m_{\mathscr{M}}(\theta_1\cap\theta_3)=0$ 及 $m_{\mathscr{M}}(\theta_1\cap\theta_2\cap\theta_3)=0$，然后转移 $m_{123}(\theta_1\cap\theta_2\cap\theta_3)=0.138$ 到 $m_{123}((\theta_1\cap\theta_2)\cup\theta_3)$，转移质量 $m_{123}(\theta_1\cap\theta_3)=0.126$ 到 $m_{\mathscr{M}}(\theta_1\cup\theta_3)$，最终得到

$$m_{\mathscr{M}}(\theta_1)=0.210\quad m_{\mathscr{M}}(\theta_2)=0.024$$
$$m_{\mathscr{M}}(\theta_1\cap\theta_2)=0.466\quad m_{\mathscr{M}}(\theta_2\cap\theta_3)=0.036$$
$$m_{\mathscr{M}}((\theta_1\cap\theta_2)\cup\theta_3)=0.138\quad m_{\mathscr{M}}(\theta_1\cup\theta_3)=0.126$$

5. 例 3.5

考虑 $\Theta(t_l)\triangleq\{\theta_1,\theta_2\}$，在时间 t_l 两个前面的基本信度赋值与前述例子相同，即

$$m_1(\theta_1)=0.6\quad m_1(\theta_2)=0.4\ \text{和}\ m_2(\theta_1)=0.7\quad m_2(\theta_2)=0.3$$

运用经典 DSm 组合规则得到

$$m_{12}(\theta_1)=0.42\quad m_{12}(\theta_2)=0.12\quad m_{12}(\theta_1\cap\theta_2)=0.46$$

现在考虑在时间 t_{l+1} 的框架 $\Theta(t_{l+1})\triangleq\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}$ 及第三个信息源，带有如下的基本信度赋值：

$$m_3(\theta_1)=0.5\quad m_3(\theta_2)=0.2\quad m_3(\theta_3)=0.3$$

然后通过经典 DSm 组合规则组合 $m_3(\cdot)$和 $m_{12}(\cdot)$得到现在的最终结果：

$$m_{123}(\theta_1)=0.210 \quad m_{123}(\theta_2)=0.024$$
$$m_{123}(\theta_1\cap\theta_2)=0.466 \quad m_{123}(\theta_1\cap\theta_3)=0.126$$
$$m_{123}(\theta_2\cap\theta_3)=0.036 \quad m_{123}(\theta_1\cap\theta_2\cap\theta_3)=0.138$$

但是现在假设某人发现完全约束是 $\theta_3=\varnothing$，它必然暗示了 $\theta_1\cap\theta_3=\theta_2\cap\theta_3=\theta_1\cap\theta_2\cap\theta_3\equiv\varnothing$ 以及$(\theta_1\cup\theta_2)\cap\theta_3=\varnothing$（这是在这个例子中所考虑的新的混合 DSm 模型 $\mathcal{M}$)，通过应用混合 DSm 融合规则，最终得到非空的信度质量为

$$m_{\mathcal{M}}(\theta_1)=0.336 \quad m_{\mathcal{M}}(\theta_2)=0.060 \quad m_{\mathcal{M}}(\theta_1\cap\theta_2)=0.604$$

6. 例 3.6

考虑 $\Theta(t_l)\triangleq\{\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4\}$，以及在时间 t_l 可用的基本信度赋值：

$$\begin{cases} m_1(\theta_1)=0.5 \quad m_1(\theta_2)=0.4 \quad m_1(\theta_1\cap\theta_2)=0.1 \\ m_2(\theta_1)=0.3 \quad m_2(\theta_2)=0.2 \quad m_2(\theta_1\cap\theta_3)=0.1 \quad m_2(\theta_4)=0.4 \end{cases}$$

运用经典 DSm 组合规则得到

$$m_{12}(\theta_1)=0.15 \quad m_{12}(\theta_2)=0.08 \quad m_{12}(\theta_1\cap\theta_2)=0.27$$
$$m_{12}(\theta_1\cap\theta_3)=0.05 \quad m_{12}(\theta_1\cap\theta_4)=0.20$$
$$m_{12}(\theta_2\cap\theta_4)=0.16 \quad m_{12}(\theta_1\cap\theta_2\cap\theta_3)=0.05$$
$$m_{12}(\theta_1\cap\theta_2\cap\theta_4)=0.04$$

假设在时间 t_{l+1} 某人发现 $\theta_1\cap\theta_2\overset{\mathcal{M}}{\equiv}\theta_1\cap\theta_3\overset{\mathcal{M}}{\equiv}\varnothing$，利用混合 DSm 规则，得到

$$\begin{cases} m_{\mathcal{M}}(\theta_1\cap\theta_2)=m_{\mathcal{M}}(\theta_1\cap\theta_3)=m_{\mathcal{M}}(\theta_1\cap\theta_2\cap\theta_3) \\ \qquad\qquad\quad =m_{\mathcal{M}}(\theta_1\cap\theta_2\cap\theta_4)=0 \\ m_{\mathcal{M}}(\theta_1)=m_{12}(\theta_1)+m_2(\theta_1)m_1(\theta_1\cap\theta_2)+m_1(\theta_1)m_2(\theta_1\cap\theta_3) \\ \qquad\qquad =0.15+0.03+0.05=0.23 \\ m_{\mathcal{M}}(\theta_2)=m_{12}(\theta_2)+m_2(\theta_2)m_1(\theta_1\cap\theta_2)+m_1(\theta_2)m_2(\theta_1\cap\theta_3) \\ \qquad\qquad =0.08+0.02+0.04=0.14 \\ m_{\mathcal{M}}(\theta_4)=m_{12}(\theta_4)+m_1(\theta_1\cap\theta_2)m_2(\theta_4)=0+0.04=0.04 \\ m_{\mathcal{M}}(\theta_1\cap\theta_4)=m_{12}(\theta_1\cap\theta_4)=0.20 \\ m_{\mathcal{M}}(\theta_2\cap\theta_4)=m_{12}(\theta_2\cap\theta_4)=0.16 \\ m_{\mathcal{M}}(\theta_1\cup\theta_2)=m_{12}(\theta_1\cup\theta_2)+m_1(\theta_1)m_2(\theta_2)+m_2(\theta_1)m_1(\theta_2) \\ \qquad\qquad\qquad +m_1(\theta_1\cap\theta_2)m_2(\theta_1\cap\theta_2)=0.22 \\ m_{\mathcal{M}}(\theta_1\cup\theta_2\cup\theta_3)=m_{12}(\theta_1\cup\theta_2\cup\theta_3)+m_1(\theta_1\cap\theta_2) \\ \qquad\qquad\qquad m_2(\theta_1\cap\theta_3)+m_2(\theta_1\cap\theta_2)m_1(\theta_1\cap\theta_3) \\ \qquad\qquad\qquad +m_1(\theta_1\cap\theta_2\cap\theta_3)m_2(\theta_1\cap\theta_2\cap\theta_3)=0.01 \end{cases}$$

7. 例 3.7

考虑 $\Theta(t_l)\triangleq\{\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4\}$，在时间 t_l 可用的基本信度赋值如下：

$$\begin{cases} m_1(\theta_1)=0.2 & m_1(\theta_2)=0.4 & m_1(\theta_1\cap\theta_2)=0.1 \\ m_1(\theta_1\cap\theta_3)=0.2 & m_1(\theta_4)=0.1 & \\ m_2(\theta_1)=0.1 & m_2(\theta_2)=0.3 & m_2(\theta_1\cap\theta_2)=0.2 \\ m_2(\theta_1\cap\theta_3)=0.1 & m_2(\theta_4)=0.3 & \end{cases}$$

运用经典 DSm 组合规则得到

$$m_{12}(\theta_1)=0.02\quad m_{12}(\theta_2)=0.12\quad m_{12}(\theta_1\cap\theta_2)=0.28$$

$$m_{12}(\theta_1\cap\theta_3)=0.06\quad m_{12}(\theta_4)=0.03$$

$$m_{12}(\theta_1\cap\theta_4)=0.07\quad m_{12}(\theta_2\cap\theta_4)=0.15\quad m_{12}(\theta_1\cap\theta_2\cap\theta_3)=0.15$$

$$m_{12}(\theta_1\cap\theta_2\cap\theta_4)=0.05\quad m_{12}(\theta_1\cap\theta_3\cap\theta_4)=0.07$$

现在假设在时间 t_{l+1} 某人发现 $\theta_1\cap\theta_2\overset{\mathcal{M}}{\equiv}\theta_1\cap\theta_3\overset{\mathcal{M}}{\equiv}\varnothing$。利用混合 DSm 规则，得到

$$\begin{cases} m_{\mathcal{M}}(\theta_1\cap\theta_2)=m_{\mathcal{M}}(\theta_1\cap\theta_3)=m_{\mathcal{M}}(\theta_1\cap\theta_2\cap\theta_3) \\ \qquad\qquad=m_{\mathcal{M}}(\theta_1\cap\theta_2\cap\theta_4)=0 \\ m_{\mathcal{M}}(\theta_1)=m_{12}(\theta_1)+m_1(\theta_1)m_2(\theta_1\cap\theta_2)+m_2(\theta_1)m_1(\theta_1\cap\theta_2) \\ \qquad\qquad+m_1(\theta_1)m_2(\theta_1\cap\theta_3)+m_2(\theta_1)m_1(\theta_1\cap\theta_3)=0.11 \\ m_{\mathcal{M}}(\theta_2)=m_{12}(\theta_2)+m_1(\theta_2)m_2(\theta_1\cap\theta_2)+m_2(\theta_2)m_1(\theta_1\cap\theta_2) \\ \qquad\qquad+m_1(\theta_2)m_2(\theta_1\cap\theta_3)+m_2(\theta_2)m_1(\theta_1\cap\theta_3)=0.33 \\ m_{\mathcal{M}}(\theta_4)=m_{12}(\theta_4)+m_1(\theta_4)m_2(\theta_1\cap\theta_2)+m_2(\theta_4)m_1(\theta_1\cap\theta_2) \\ \qquad\qquad+m_1(\theta_4)m_2(\theta_1\cap\theta_3)+m_2(\theta_4)m_1(\theta_1\cap\theta_3)=0.15 \\ m_{\mathcal{M}}(\theta_1\cap\theta_4)=m_{12}(\theta_1\cap\theta_4)=0.07 \\ m_{\mathcal{M}}(\theta_2\cap\theta_4)=m_{12}(\theta_2\cap\theta_4)=0.15 \\ m_{\mathcal{M}}(\theta_1\cup\theta_2)=m_{12}(\theta_1\cup\theta_2)+m_1(\theta_1\cap\theta_2)m_2(\theta_1\cap\theta_2) \\ \qquad\qquad+m_1(\theta_1)m_2(\theta_2)+m_2(\theta_1)m_1(\theta_2)=0.12 \\ m_{\mathcal{M}}(\theta_1\cup\theta_3)=m_{12}(\theta_1\cup\theta_3)+m_1(\theta_1\cap\theta_3) \\ \qquad\qquad m_2(\theta_1\cap\theta_3)=0.02 \\ m_{\mathcal{M}}(\theta_1\cup\theta_2\cup\theta_3)=m_{12}(\theta_1\cup\theta_2\cup\theta_3)+m_1(\theta_1\cap\theta_2)m_2(\theta_1\cap\theta_3) \\ \qquad\qquad+m_2(\theta_1\cap\theta_2)m_1(\theta_1\cap\theta_3)=0.05 \end{cases}$$

4.7 混合 DSm 模型与贝叶斯的结合

前文首先给出了运用一般混合 DSm 组合规则，组合 $k\geqslant 2$ 个独立且等可靠信息源的广义基本信度赋值，能够处理模型中涉及到的所有可能种类的完全约束。

这个方法隐含地假设，某人肯定认为/信度问题模型 $\mathcal{M}$（通常是一个混合 DSm 模型）是有效的且与真实模型相一致。但在一些复杂的融合问题中（静态或者动态的问题），某人或许会因为框架 Θ 中命题的性质和演变而对模型的有效性产生怀疑。在这样的情形下，建议考虑一组排斥且完备的模型 $\mathcal{M}=\{\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2,\cdots,\mathcal{M}_k\}$ 带有一定的概率 $\{P\{\mathcal{M}_1\},P\{\mathcal{M}_2\},\cdots,P\{\mathcal{M}_k\}\}$。这里不深入探讨这些概率的获得（这较大依赖于所考虑融合问题的性质），而只是假设当融合必须完成时，这种概率在任何给定的时间 t_l 都是可行的。建议利用组合质量 $m_{\mathcal{M}_i(\Theta)}(\cdot)(i=1,\cdots,K)$ 的贝叶斯混合来获得最终的结果，即

$$\forall A \in D^{\Theta}, m_{\mathcal{M}_1,\cdots,\mathcal{M}_K}(A) = \sum_{i=1}^{K} P\{\mathcal{M}_i\} m_{\mathcal{M}_i(\Theta)}(A) \tag{4.14}$$

4.8 总结

在本章中，针对处理许多融合问题的鉴别框 Θ，已经扩展 DSmT 以及经典 DSm 组合规则到任何种类的混合模型。自由 DSm 模型（假设框架的命题是不可细分的）可以被认为是 Shafer 模型（假设框架的所有命题是互相排斥的）的对立，Shafer 模型是基于证据的数学理论（Dempster－Shafer Theory，DST）。在这两个极端模型之间，对框架 Θ 事实上还存在许多可能的混合模型，且它们依赖于所考虑融合问题的固有属性。对于实际问题，Θ 中的一些命题可以呈现出真正的排斥性，同时其他的一些可以被认为不是完全可分辨的或细分的。目前的研究工作针对混合模型提出了一种新的基于 DSmT 的混合 DSm 组合规则。这个混合 DSm 规则适合任何模型、任何框架（完备或非完备，命题之间排斥或非排斥的，或许两者皆有），不管多少信息源的信度质量的融合计算，也不管信息源的冲突/自相矛盾有多大。这是一个重要的规则，因为它不要求计算权重因子，也不需要像其他规则那样归一化，并且，空集的信度质量转移到非空集的信度质量是遵循 DSm 网络结构自然完成的，这个结构是从 DSm 经典规则派生来的。DSmT 和混合 DSm 规则是一种对经典方法及已存在的组合规则的可靠替代。这个新的结果对于未来复杂的（不确定的/不完全的/自相矛盾的/动态的）信息融合系统的发展所发挥的作用是鼓舞人心的。

参 考 文 献

[1] Dawid A. P., *Conditional Independence*, 14th Conf. on Uncertainty and Artificial Intelligence, USA, 1998.

[2] Dawid A. P., *Conditional Independence*, In Encyclopedia of Statistical Science (Update) Volume 3, Wiley, New York, 1999.

[3] Dezert J., Smarandache F., *On the generation of hyper-power sets for the DSmT*, Proceedings of the 6th International Conference on Information Fusion, Cairns, Australia, July 8-11, 2003.

[4] Dubois D., Prade H., *Representation and combination of uncertainty with belief functions and possibility measures*, Computational Intelligence, Vol. 4, pp. 244-264, 1988.

[5] Fonck P., *Conditional Independence in Possibility Theory*, Uncertainty and Artificial Intelligence, pp. 221-226, 1994.

[6] Lefevre E., Colot O., Vannoorenberghe P. *Belief functions combination and conflict management*, Information Fusion Journal, Elsevier, 2002.

[7] Shafer G., *A Mathematical Theory of Evidence*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1976.

[8] Shenoy P., *Conditional Independence in Valuation-Based Systems*, International Journal of Approximate reasoning, Vol. 10, pp. 203-234, 1994.

[9] Smets Ph., Kennes R., *The transferable belief model*, Artificial Intelligence, 66(2), pp. 191-234, 1994.

[10] Studeny M., *Forrnal properties of Conditional Independence in. Different Calculi of AI*, Proc. of ECSQARU'93, (Clarke K., Kruse R. and Moral S., Eds.), Springer-Verlag, 1993.

[11] Yager R. R., *On the Dempster-Shafer framework and new combination rules*, Information Sciences, Vol. 41, pp. 93-138, 1987.

[12] Yaghlane B. B., Smets Ph., Mellouli K., *Independence and Non-Interactivity in the Transferable Belief Model*, Workshop on Conditional Independence Structure and graphical Models, Eds. F. Matus and M. Studeny, Toronto, CA, 1999.

[13] Yaghlane B. B., Smets Ph., Mellouli K., *Belief Function Independence: I The marginal case*, International Journal of Approximate Reasoning, Vol. 29, pp. 47-70, 2002.

[14] Yaghlane B. B., Smets Ph., Mellouli K., *Belief Function Independence: II conditional case*, International Journal of Approximate Reasoning, Vol. 31, pp. 31-75, 2002.

第 5 章　Dempster 组合规则的反例

Jean Dezert
Florentin Smarandache
Mohammad Khoshnevisan
ONERA
Department of Mathematics
Griffith Business School
29 Av. de la Division Leclerc
University of New Mexico
Griffith University
92320 Châtillon，France
Gallup，NM 8730，U. S. A
Gold Coast Campus，Australia

摘要：本章介绍几种类型的融合问题，它们并不能通过经典的证据理论（也就是著名的 DST）直接处理，或者是因为不可能获得 Shafer 模型的鉴别框架，或者是因为 Dempster 组合规则并不能提供有效的结果（或者根本就没有结果）。我们提出并探讨 DSmT 连同它的经典（或者混合）组合规则来解决各种融合问题的可能性。

5.1　引言

本章主要关注 Dempster-Shafer 理论（DST）[5] 中 Dempster 组合规则的有效性受到限制的情形。这里提供几种不同类型融合问题的例子，利用 Dempster 组合规则进行处理并不能得到有效的结果，我们将介绍它们是如何由前几章提到的 DSmT 来直接解决的。DST 与 DSmT 是基于不同的框架建模方法（Shafer 模型与自由 DSm 模型或者混合 DSm 模型）以及运算空间的选择（经典的幂集 2^{Θ} 与超幂集 D^{Θ}），我们将定义要组合的基本信度赋值函数 $m_i(\cdot)$，以及所应用的融合规则（Dempster 组合规则与 DSm 或混合 DSm 组合规则）。

5.2　第一类反例

对 Dempster 组合规则来说，第一类反例通常包括所有的 Dempster 规则没有定义的情形，这是因为信息源的完全冲突而导致 0/0。5.2.1 节将要介绍第一种子

类型对应于贝叶斯信度函数。5.2.2 节将会介绍关于更多证据源间一般冲突的反例。

5.2.1 关于贝叶斯信息源的反例

下面的例子仅是关于贝叶斯信息源的，即关于这些信息源的信度函数的焦元仅与 Θ 中的单个元素 θ_i 有关。

1. 关于 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2\}$ 的例子

考虑鉴别框 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2\}$ 以及存在两个独立信息源的情况，基本的信度赋值为

$$m_1(\theta_1)=1 \quad m_1(\theta_2)=0$$
$$m_2(\theta_1)=0 \quad m_2(\theta_2)=1$$

用信度质量矩阵来表示这些信度赋值，即

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

- 在这里并不能应用 Dempster 规则，因为形式上可以得到 $m(\theta_1)=0/0$ 以及 $m(\theta_2)=0/0$，也就是无定义的情形。
- 这里可以应用 DSm 规则，因为可以获得 $m(\theta_1)=m(\theta_2)=0$ 以及 $m(\theta_1\cap\theta_2)=1$（当采用自由 DSm 模型时，总的冲突）。若采用 Shafer 模型并应用混合 DSm 规则，则可以得到在这种情况下说得通的结果 $m_{\mathrm{h}}(\theta_1\cup\theta_2)=1$，在这里我们用下标 h 来表示通过混合 DSm 规则得到的信度质量，以避免与通过经典的 DSm 规则得到的结果相混淆。

2. 关于 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4\}$ 的例子

考虑鉴别框 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4\}$ 以及存在两个独立信息源的情形，信度质量矩阵为

$$\begin{bmatrix}0.6 & 0 & 0.4 & 0\\ 0 & 0.2 & 0 & 0.8\end{bmatrix}$$

- 这里 Dempster 规则再一次不能应用，因为对于 $\forall 1\leqslant j\leqslant 4$，可以得到 $m(\theta_j)=0/0$（无定义的情形）。
- 但是这里可以应用 DSm 规则，从而可以得到：$m(\theta_1)=m(\theta_2)=m(\theta_3)=m(\theta_4)=0$，$m(\theta_1\cap\theta_2)=0.12$，$m(\theta_1\cap\theta_4)=0.48$，$m(\theta_2\cap\theta_3)=0.08$，$m(\theta_3\cap\theta_4)=0.32$（部分自相矛盾/冲突）。
- 假设现在发现所有的交集都是空集（Shafer 模型），那么应用混合 DSm 规则可以得到（在这里下标 h 表示混合规则）

$$m_{\mathrm{h}}(\theta_1\cup\theta_2)=0.12 \quad m_{\mathrm{h}}(\theta_1\cup\theta_4)=0.48,$$

$$m_h(\theta_2 \cup \theta_3) = 0.08 \quad m_h(\theta_3 \cup \theta_4) = 0.32$$

3. 关于 $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\}$ 的另一个例子

考虑鉴别框 $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\}$ 以及存在三个独立信息源的情况，信度质量矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0.7 \end{bmatrix}$$

- 这里还是不能应用 Dempster 规则，因为对于 $\forall 1 \leqslant j \leqslant 4$，可以得到 $m(\theta_j) = 0/0$（无定义的情形）。
- 但这里可以应用 DSm 规则，从而可以获得 $m(\theta_1) = m(\theta_2) = m(\theta_3) = m(\theta_4) = 0$，以及

$$m(\theta_1 \cap \theta_2) = 0.6 \cdot 0.2 \cdot 0.3 = 0.036$$
$$m(\theta_1 \cap \theta_4) = 0.6 \cdot 0.8 \cdot 0.7 = 0.336$$
$$m(\theta_2 \cap \theta_3) = 0.4 \cdot 0.2 \cdot 0.3 = 0.024$$
$$m(\theta_3 \cap \theta_4) = 0.4 \cdot 0.8 \cdot 0.7 = 0.224$$
$$m(\theta_1 \cap \theta_2 \cap \theta_4) = 0.6 \cdot 0.2 \cdot 0.7 + 0.6 \cdot 0.3 \cdot 0.8 = 0.228$$
$$m(\theta_2 \cap \theta_3 \cap \theta_4) = 0.2 \cdot 0.4 \cdot 0.7 + 0.3 \cdot 0.4 \cdot 0.8 = 0.152$$

  （部分自相矛盾/冲突）其他的值都等于零。如果将这些信度相加起来，就可以得到和为 1。
- 假设现在发现所有的交集都是空集（Shafer 模型），那么应用混合 DSm 规则可以得到

$$m_h(\theta_1 \cup \theta_2) = 0.036, m_h(\theta_1 \cup \theta_4) = 0.336, m_h(\theta_2 \cup \theta_3) = 0.024,$$
$$m_h(\theta_3 \cup \theta_4) = 0.224, m_h(\theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_4) = 0.228, m_h(\theta_2 \cup \theta_3 \cup \theta_4) = 0.152$$

4. 更一般的情形

考虑鉴别框 $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n\}$ $(n \geqslant 2)$，以及存在 k $(k \geqslant 2)$ 个独立信息源的情况。令 $\mathrm{M} = [a_{ij}]$ $(1 \leqslant i \leqslant k; 1 \leqslant j \leqslant n)$ 为 k 行 n 列的信度质量矩阵。若这个矩阵的每列都至少含有一个零，就不能应用 Dempster 规则，这是因为对于所有的 $1 \leqslant j \leqslant n$，得到了无定义的情形 $m(\theta_j) = 0/0$。这里的冲突因子为 1。然而这里却可以应用经典 DSm 规则，它可以得到：对于所有的 $1 \leqslant j \leqslant n$，$m(\theta_j) = 0$；而且，对于 $\forall 1 \leqslant v_s \leqslant n$，$1 \leqslant s \leqslant w$，$2 \leqslant w \leqslant k$ 部分自相矛盾/冲突为 $m(\theta_{v_1} \cap \theta_{v_2} \cap \cdots \cap \theta_{v_w}) = \sum (a_{1t_1}) \cdot (a_{2t_2}) \cdot \cdots \cdot (a_{kt_k})$。其中，集合 $T = \{t_1, t_2, \cdots, t_k\}$ 等价于集合 $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_w\}$，只是其中元素的顺序不同，并且 T 中的元素可能会重复，这表示如果重复集合 V 中的某些元素，就可以得到 T。因而，和式算子 Σ 是通过组合列 $v_1, v_2, \cdots, v_w$ 中的

至少一个元素以及每一行的任一元素的所有情况得到的。也就是说，$(a_{1t_1})\cdot(a_{2t_2})\cdot\cdots\cdot(a_{kt_k})$包含 $1,2,\cdots,k$ 中每行各一个元素，以及 $v_1,v_2,\cdots,v_w$ 中每列一个或多个元素。

5.2.2 更一般信息源的反例

本节介绍涉及一般信息源（即非贝叶斯信息源）的两个数字实例，它们不能应用 Dempster 规则。

1. 关于 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4\}$ 的例子

考虑鉴别框 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4\}$ 以及存在两个独立信息源的情况，信度质量矩阵为

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	$\theta_1\cup\theta_2$
$m_1(\cdot)$	0.4	0.5	0	0	0.1
$m_2(\cdot)$	0	0	0.3	0.7	0

这里不能应用 Dempster 规则，这是因为对于 $m(\theta_i)$ $(1\leqslant i\leqslant 4)$，会得到 0/0 的结果。但是 DSm 规则（经典的或混合的）可以在这里使用。

由经典的 DSm 规则可得

$$m(\theta_1\cap\theta_3)=0.12,m(\theta_1\cap\theta_4)=0.28,m(\theta_2\cap\theta_3)=0.15,$$
$$m(\theta_2\cap\theta_4)=0.35,m(\theta_3\cap(\theta_1\cup\theta_2))=0.03,m(\theta_4\cap(\theta_1\cup\theta_2))=0.07$$

现在假设它是一个 Shafer 模型，那么可以应用混合 DSm 模型（这里用下标 h 表示）得到

$$m_{\mathrm{h}}(\theta_1\cup\theta_3)=0.12,m_{\mathrm{h}}(\theta_1\cup\theta_4)=0.28,m_{\mathrm{h}}(\theta_2\cup\theta_3)=0.15,$$
$$m_{\mathrm{h}}(\theta_2\cup\theta_4)=0.35,m_{\mathrm{h}}(\theta_3\cup\theta_1\cup\theta_2)=0.03,m_{\mathrm{h}}(\theta_4\cup\theta_1\cup\theta_2)=0.07$$

2. 关于 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4\}$ 的另一个例子

考虑鉴别框 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4\}$ 以及存在三个独立信息源的情况，信度质量矩阵为

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	$\theta_1\cup\theta_2$	$\theta_3\cup\theta_4$
$m_1(\cdot)$	0.4	0.5	0	0	0.1	0
$m_2(\cdot)$	0	0	0.3	0.6	0	0.1
$m_3(\cdot)$	0.8	0	0	0	0.2	0

这里不能应用 Dempster 规则，这是因为对于 $m(\theta_i)$ $(1\leqslant i\leqslant 4)$，会得到 0/0 的结果。但是 DSm 规则（经典的或混合的）可以在这里使用。

应用经典的 DSm 规则可得

$$m(\theta_1)=m(\theta_2)=m(\theta_3)=m(\theta_4)=0$$

$$m(\theta_1 \cup \theta_2) = m(\theta_3 \cup \theta_4) = 0$$

$$m(\theta_1 \cap \theta_3) = 0.096$$

$$m(\theta_1 \cap \theta_3 \cap (\theta_1 \cup \theta_2)) = m(\theta_1 \cap \theta_3) = 0.024$$

$$m(\theta_1 \cap \theta_4) = 0.192$$

$$m(\theta_1 \cap \theta_4 \cap (\theta_1 \cup \theta_2)) = m(\theta_1 \cap \theta_4) = 0.048$$

$$m(\theta_1 \cap (\theta_3 \cup \theta_4)) = 0.032$$

$$m(\theta_1 \cap (\theta_3 \cup \theta_4) \cap (\theta_1 \cup \theta_2)) = m(\theta_1 \cap (\theta_3 \cup \theta_4)) = 0.008$$

$$m(\theta_2 \cap \theta_3 \cap \theta_1) = 0.120$$

$$m(\theta_2 \cap \theta_3 \cap (\theta_1 \cup \theta_2)) = m(\theta_2 \cap \theta_3) = 0.030$$

$$m(\theta_2 \cap \theta_4 \cap \theta_1) = 0.240$$

$$m(\theta_2 \cap \theta_4 \cap (\theta_1 \cup \theta_2)) = m(\theta_2 \cap \theta_4) = 0.060$$

$$m(\theta_2 \cap (\theta_3 \cup \theta_4) \cap \theta_1) = m((\theta_1 \cap \theta_2) \cap (\theta_3 \cup \theta_4)) = 0.040$$

$$m(\theta_2 \cap (\theta_3 \cup \theta_4) \cap (\theta_1 \cup \theta_2)) = m(\theta_2 \cap (\theta_3 \cup \theta_4)) = 0.010$$

$$m((\theta_1 \cup \theta_2) \cap \theta_3 \cap \theta_1) = m(\theta_1 \cap \theta_3) = 0.024$$

$$m((\theta_1 \cup \theta_2) \cap \theta_3) = 0.006$$

$$m((\theta_1 \cup \theta_2) \cap \theta_4 \cap \theta_1) = m(\theta_1 \cap \theta_4) = 0.048$$

$$m((\theta_1 \cup \theta_2) \cap \theta_4) = 0.012$$

$$m((\theta_1 \cup \theta_2) \cap (\theta_3 \cup \theta_4) \cap \theta_1) = m(\theta_1 \cap (\theta_3 \cup \theta_4)) = 0.008$$

$$m((\theta_1 \cup \theta_2) \cap (\theta_3 \cup \theta_4)) = 0.002$$

当把相同的值累加在一起之后，得到

$$m(\theta_1 \cap \theta_3) = 0.096 + 0.024 + 0.024 = 0.144$$

$$m(\theta_1 \cap \theta_4) = 0.192 + 0.048 + 0.048 = 0.288$$

$$m(\theta_2 \cap \theta_3) = 0.030$$

$$m(\theta_2 \cap \theta_4) = 0.060$$

$$m(\theta_1 \cap \theta_2 \cap \theta_3) = 0.120$$

$$m(\theta_1 \cap \theta_2 \cap \theta_4) = 0.240$$

$$m((\theta_1 \cup \theta_2) \cap \theta_3) = 0.006$$

$$m((\theta_1 \cup \theta_2) \cap \theta_4) = 0.012$$

$$m(\theta_1 \cap (\theta_3 \cup \theta_4)) = 0.032 + 0.008 + 0.008 = 0.048$$

$$m(\theta_1 \cap \theta_2 \cap (\theta_3 \cup \theta_4)) = 0.040$$

$$m(\theta_2 \cap (\theta_3 \cup \theta_4)) = 0.010$$

$$m((\theta_1 \cup \theta_2) \cap (\theta_3 \cup \theta_4)) = 0.002$$

假设现在发现所有的交集都是空集，则应用混合 DSm 规则可以得到

$$m_{\mathrm{h}}(\theta_1 \cup \theta_3) = 0.144$$

$$m_h(\theta_1 \cup \theta_4) = 0.288$$
$$m_h(\theta_2 \cup \theta_3) = 0.030$$
$$m_h(\theta_2 \cup \theta_4) = 0.060$$
$$m_h(\theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3) = 0.120 + 0.006 = 0.126$$
$$m_h(\theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_4) = 0.240 + 0.012 = 0.252$$
$$m_h(\theta_1 \cup \theta_3 \cup \theta_4) = 0.048$$
$$m_h(\theta_2 \cup \theta_3 \cup \theta_4) = 0.010$$
$$m_h(\theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3 \cup \theta_4) = 0.040 + 0.002 = 0.042$$

3. 更一般的情形

考虑鉴别框 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n\}(n\geqslant 2)$，以及存在 $k(k\geqslant 2)$ 个独立信息源的情况，信度质量矩阵 $\boldsymbol{M}$ 包括 k 行 $n+u$ 列(其中 $u\geqslant 1$)，它们对应于 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n$ 以及 u 个不确定命题 $\theta_{i_1}\cup\cdots\cup\theta_{i_a},\cdots,\theta_{j_1}\cup\cdots\cup\theta_{j_t}$。

假设发生下面的情况：

- 每列都至少包括一个零；
- 所有的不确定命题都与总的未知集 $\theta_1\cup\cdots\cup\theta_n$ 不相同(即它们是部分未知的)；
- 部分不确定性命题是两两不相交的；
- 对于每个非空不确定列 $c_j(n+1\leqslant j\leqslant n+u)$，其形式表示为 $\theta_{p1}\cup\cdots\cup\theta_{pw}$，存在某一行的 $p_1,\cdots,p_w$ 以及 c_j 列上的所有元素都是零赋值。

这种情况下，不能应用 Dempster 组合规则解决这种融合问题。这是因为对于所有的 $m(\theta_i)$ $(1\leqslant i\leqslant n)$，会得到 0/0 的结果。而 DSm 规则(经典的或者混和的)则可以应用。

5.3 第二类反例

这里提出的第二类反例是对文献[7,8]中提出的著名的 Zadeh 例子的推广。

5.3.1 Zadeh 的例子

两个医生在检查一个病人，他们一致认为他得了脑膜炎(M)或脑损伤(C)或脑瘤(T)，因而鉴别框就为 $\Theta=\{M,C,T\}$。假设医生们一致认为病人得脑瘤的可能性很小，但是在致病原因上意见不一，他们给出自己的诊断如下：

$$m_1(M)=0.99\quad m_1(T)=0.01\qquad 和\qquad m_2(C)=0.99\quad m_2(T)=0.01$$

如果运用 Dempster 组合规则来组合这两个基本信度函数，就得到了意想不到的结果，即

$$m(T)=\frac{0.0001}{1-0.0099-0.0099-0.9801}=1$$

这意味着这个病人一定是得了脑瘤！这个意想不到的结果的出现是由于：这两个证据源（医生）一致认为病人基本上不可能得脑瘤，但他们对其他的致病原因的看法却完全冲突。这个十分简单而又有趣的例子表明了 DST 在自动推理实际应用中具有局限性。

这个例子已经被一些专家在过去作了研究，解释了 Dempster 组合规则在这种情况下应用时得到反常结果的原因。由于在这种极端情形下出现了高度的冲突，Zadeh 欣然地指出了该规则的不足之处。人们通常认为在此种情形之下，在没有确定信息源间冲突程度的情况下，利用 Dempster 组合规则得到的结论并不能直接采用。这似乎说得通，但是并没有理论的方法来事先确定是否该信任这种组合法则得到的结果，尤其是在一些涉及较多信息源和假设的复杂系统中。这是 Dempster 组合规则的主要缺陷之一。解决方法通常是对于信息源之间的冲突度任意或者试探性地选定一些阈值，据此来选择接受或者拒绝融合的结果[9]，而并不能通过理论分析的方法来对其进行可靠的证明。假设此阈值设定为一个给定值，这里以 0.70 为例，那么是否当冲突度为 0.7001 时就有理由拒绝融合的结果，而当冲突度为 0.6999 就选择接受该结果？那么，当决定拒绝融合的结果时接下来该怎么做？同时，并没有对信息源的可靠度做出评估或者信息源之间的可靠度相同的情况下也必须做出一个重要的抉择吗？到目前为止，对于这种广泛应用于实际中的方法，还没有可靠的理论来证明其合理性。

文献中关于这个问题的两种主要解释是基于应用 Shafer 模型 Θ 所用到的封闭世界的假设，而这被建议工作在开放世界的模型中，或者说证据源是不可靠的。尽管目前这些解释是可以接受的，但它必然不是唯一正确的（充分的）解释。这里注意到，总是可以通过引入一个新的假设来轻松地放宽开放世界的假设，最后得到封闭的假设。假设存在一个 θ_0 来封闭最初的框架 $\Theta=\{\theta_1,\cdots,\theta_n\}$，那么 θ_0 将代表初始假设 $\theta_1,\cdots,\theta_n$ 以外所有可能的命题（尽管仍然未知）。Yager 在文献[6]中已经间接地提出了这种观点。通过分析发现，不必要采用/遵循开放世界的假设，或者是承认信息源间的可靠性，来为这个非直观的结果给出一个正当的解释。事实上，当应用另外一种组合规则来组合两种信息源时，信息源间的等可靠性以及 Shafer 模型是可以接受的。这正是混合 DSm 规则所能达到的效果。当然，当对信息源可靠性有先验信息时，必须要通过折扣理论的方法来将这种信息合理地考虑进去。这种折扣理论的方法同样也可以应用在 DSmT 的框架结构中，在必要时（当存在很合理的理由而必须要这样做时，即存在信息源可靠性的先验信息时）将这两种方式（即折扣理论的方法以及 DSm 组合规则）融合在一起并不会出现不相容的情形。绝不能将折扣理论的方法当成是一种特殊的人工调节机制，来纠正通

过 Dempster 组合规则以及得到的错误结果。我们坚决反对这种事先通过折扣理论的方法来解决 Dempster 规则出现的所有问题。当然，适当地应用这种方法可以明显地改善对要组合的信度函数的评价，但是当冲突因子很高时，它不会从根本上解决 Dempster 组合规则本质上固有的问题。

这个问题源于这样一个事实：两个信息源仅仅根据它们各自有限的知识和经验来提供信度。而且很有可能会出现下面的情形，即这两个信息源甚至对于所考虑的同一问题的框架下的概念都没有一个统一的解释。这种情形经常出现在信息源间意思不统一时（比如电视上的争论、广播中的争论以及在大部分会议必须要作出重要的决策）。这就是日常现实生活中所发生的，而无论如何又要必须处理此类存在冲突的情况。换句话说，信息源并非指向同一事件，或者即使指向同一事件，它们也有可能持有不同的意见。Dubois 和 Prade 早已在文献[3]中（第 256 页）指出了这个问题。在 Zadeh 的这个例子中，有可能第一个医生主要是脑膜炎和脑瘤方面的专家，而第二个医生主要是脑损伤和脑瘤方面的专家，由于拥有有限的知识和经验，两个医生可以具有相同的信度。如果要求医生们仅根据框架 $\Theta=\{M,C,T\}$（而不是用一个更广义的框架）给出他们的诊断结果，那么他们的结果将被给予相同程度的重视，并且当没有充分的理由根据一种诊断结果而否定另一种诊断结果时，这里利用 Dempster 规则得到的组合诊断结果依然是很可疑的。根据 Dempster 规则得到的结果是需要一个脑外科手术（即一个危险的脑瘤切除手术），而一个理性的脑外科医生不会采取这样的措施，病人的家属同样不会同意这样做。因而根据我们的分析，文献中给出的上述两种说法（尽管在某些情形下是可能存在的并且是可接受的）并不是对异常信息源必然和充分的解释。R. Yager、D. Dubois 和 H. Prade 在文献[6]和[2]中主要针对 Dempster 规则提出了解决这种异常信息源的其他几种可供选择的方法，这一点已经在本书第 1 章中以及文献[1]中涉及过。就像前面所讲的一样，DSmT 正好提供了解决这种有争议例子的一种新的观点。总的来说，当利用完 Dempster 组合规则后，最终必须要作出决策时，特别是涉及到很重大的事情时，就必须非常小心信息源间的冲突。

如果现在采用自由 DSm 模型，即接受在命题 M、C 和 T 之间不存在空的交集的可能性，以此来代替最初的 Shafer 模型，那么直接工作在超幂集上 D^{Θ}，则最终可以根据经典的 DSm 组合规则方便快捷地得到下面的结果：

$$m(M\cap C)=0.9801\quad m(M\cap T)=0.0099$$
$$m(C\cap T)=0.0099\quad m(T)=0.0001$$

采用这样的模型是说得通的。若是基于下面定义，在细化框架 Θ_{ref} 下得到在幂集 $2^{\Theta_{\text{ref}}}$ 上的基本信度赋值函数，当利用 Dempster 组合规则时可以明显地得出相同的结果（这里的证明留给读者），即

$$\Theta_{\text{ref}} = \{\theta_1 = M \cap C \cap T, \theta_2 = M \cap C \cap \overline{T}, \theta_3 = M \cap \overline{C} \cap T,$$
$$\theta_4 = \overline{M} \cap C \cap T,\ \theta_5 = M \cap \overline{C} \cap \overline{T}, \theta_6 = \overline{M} \cap C \cap \overline{T}, \theta_7 = \overline{M} \cap \overline{C} \cap T\}$$

式中：$\overline{M}$、$\overline{C}$、$\overline{T}$分别代表M、C、T的补集。

得到这两种等价的结果（即基于自由DSm模型的经典DSm规则得到的结果与基于细化框架下的Dempster规则得到的结果相同）是很正常的，这是因为由于选择了新的模型，使得Dempster规则下的归一化因子$1-k$在这里变成了1。根据这种评述，就有人提出利用DSmT（以及自由DSm模型下的经典DSm规则）是多此一举的。这种说法明显是错的，主要有以下两个原因：DSmT并不一定是在一个更大的空间下（这里要记住$|D^{\Theta}| < |2^{\Theta_{\text{ref}}}|$）得到的结果（DSm规则正好提供了一个更简便直接的方法来得到这个结果）；在某些包含模糊/连续概念的融合问题中，不可能获得细化的框架，这样就不得不面对处理这些很不明确的概念/假设的困难（详细介绍及证明参见文献[4]）。

如果对这两个医生诊断的可靠性没有质疑（或者说没有方法来评价这种可靠性），并且确信病人的病因确实仅来源于$\Theta = \{M, C, T\}$中，而且病因是真正相互排斥的，那么必须要采用符合Shafer模型的初始鉴别框Θ。正像前面介绍的那样，在这种高度冲突的情形下，利用Dempster规则并不能得到一个合理的可以接受的结果。然而，利用混合DSm组合规则就可以很方便地处理这种情况。这里可以应用混合DSm规则，是因为包含在框架Θ中所有命题间相互排斥假设的Shafer模型仅仅是一种特殊的混合DSm模型（详见第4章）。因此将混合DSm规则应用于这种简单的情形（在第4章已经介绍了更一般和更复杂的情形），所有冲突信息源的信度质量被传递之后，就可以得到

$$m(M \cup C) = 0.9801 \quad m(M \cup T) = 0.0099$$
$$m(C \cup T) = 0.0099 \quad m(T) = 0.0001$$

凭人们的直觉知识，这种结果并不是令人惊讶的而且说得通，因为事实上它在这个问题上提供了一种一致并且合理的解决方式。该结果清楚地表明了对于假想的脑瘤做脑瘤切除的做法是不可取的，但是优先推荐对病人患脑膜炎或者脑挫伤的情形做一次更好的检查。因而，利用混合DSm规则和Dempster规则得到的结果完全不同。

5.3.2 $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$的推广

考虑$0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 < 1$是两个很小的正数（趋向于0），鉴别框为$\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$，存在两个信息源（独立的证据源$s_1$和$s_2$），它们给出的信度质量为

$$m_1(\theta_1) = 1 - \varepsilon_1 \quad m_1(\theta_2) = 0 \quad m_1(\theta_3) = \varepsilon_1$$
$$m_2(\theta_1) = 0 \quad m_2(\theta_2) = 1 - \varepsilon_2 \quad m_2(\theta_3) = \varepsilon_2$$

从现在起，优先用矩阵形式来描述信度质量，即

$$\begin{bmatrix} 1-\varepsilon_1 & 0 & \varepsilon_1 \\ 0 & 1-\varepsilon_2 & \varepsilon_2 \end{bmatrix}$$

- 利用 Dempster 组合规则，将得到

$$m(\theta_3) = \frac{(\varepsilon_1\varepsilon_2)}{(1-\varepsilon_1)\cdot 0 + 0\cdot(1-\varepsilon_2) + \varepsilon_1\varepsilon_2} = 1$$

  这个结果是很荒谬的（或者说至少是与直觉相违背的）。不论 ε_1、ε_2 取什么样的正数，利用 Dempster 规则总是能得到相同的错误结论。运用 Dempster 规则得到的唯一可接受并正确的结果，仅当 $\varepsilon_1=\varepsilon_2=1$ 这种个别的情况下才出现。也就是说，当两个信息源对于 θ_3 都明确地肯定时，结果是显而易见的。
- 基于自由 DSm 模型，利用 DSm 规则将得到：$m(\theta_3)=\varepsilon_1\varepsilon_2$，$m(\theta_1\cap\theta_2)=(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)$，$m(\theta_1\cap\theta_3)=(1-\varepsilon_1)\varepsilon_2$，$m(\theta_2\cap\theta_3)=(1-\varepsilon_2)\varepsilon_1$，其他的都为零。这种结果看起来是可信的。
- 回到 Shafer 模型并运用混合 DSm 组合规则，将得到：$m(\theta_3)=\varepsilon_1\varepsilon_2$，$m(\theta_1\cup\theta_2)=(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)$，$m(\theta_1\cup\theta_3)=(1-\varepsilon_1)\varepsilon_2$，$m(\theta_2\cup\theta_3)=(1-\varepsilon_2)\varepsilon_1$，其他的都为零。

注意到 $\varepsilon_1=\varepsilon_2=1/2$ 的特殊情况，有 $m_1(\theta_1)=1/2$，$m_1(\theta_2)=0$，$m_1(\theta_3)=1/2$ 和 $m_2(\theta_1)=0$，$m_2(\theta_2)=1/2$，$m_2(\theta_3)=1/2$。利用 Dempster 组合规则仍然得到 $m(\theta_3)=1$，然而若基于相同的 Shafer 模型，通过利用混合 DSm 规则，则得到正常的结果：$m(\theta_3)=1/4$，$m(\theta_1\cup\theta_2)=1/4$，$m(\theta_1\cup\theta_3)=1/4$，$m(\theta_2\cup\theta_3)=1/4$。

5.3.3 $\Theta=\{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\}$的推广

考虑 $0<\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3<1$ 是三个极小的正数，鉴别框是 $\Theta=\{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\}$，存在两个信息源，它们给出的信度质量矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1-\varepsilon_1-\varepsilon_2 & 0 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \\ 0 & 1-\varepsilon_3 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

当应用 Dempster 组合规则时，又一次得到了荒谬的结果 $m(\theta_4)=1$，然而，若运用基于自由 DSm 模型的 DSm 组合规则，却得到相对可靠的结果 $m(\theta_4)=\varepsilon_2\varepsilon_3$。运用经典 DSm 规则可以得到：$m(\theta_1\cap\theta_2)=(1-\varepsilon_1-\varepsilon_2)(1-\varepsilon_3)$，$m(\theta_1\cap\theta_4)=(1-\varepsilon_1-\varepsilon_3)\varepsilon_3$，$m(\theta_4)=\varepsilon_2\varepsilon_3$，$m(\theta_3\cap\theta_2)=\varepsilon_1(1-\varepsilon_3)$，$m(\theta_3\cap\theta_4)=\varepsilon_1\varepsilon_3$。假定发现所有的交集都是空集，那么应用混合 DSm 规则可以得到：$m_h(\theta_1\cup\theta_2)=(1-\varepsilon_1-\varepsilon_2)(1-\varepsilon_3)$，$m_h(\theta_1\cup\theta_4)=(1-\varepsilon_1-\varepsilon_3)\varepsilon_3$，$m_h(\theta_3\cup\theta_2)=\varepsilon_1(1-\varepsilon_3)$，$m_h(\theta_3\cup\theta_4)=\varepsilon_1\varepsilon_3$，$m_h(\theta_4)=\varepsilon_2\varepsilon_3$。

5.3.4 一般的情形

考虑 $0<\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n<1$ 是极小的正数，鉴别框为 $\Theta=\{\theta_1,\cdots,\theta_n,\theta_{n+1}\}$，存在两个信息源，它们给出的信度质量矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1-S_1^p & 0 & \varepsilon_1 & 0 & \varepsilon_2 & \cdots & 0 & \varepsilon_p \\ 0 & 1-S_{p+1}^n & 0 & \varepsilon_{p+1} & 0 & \cdots & \varepsilon_{n-1} & \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

其中，$1\leqslant p\leqslant n$，$S_1^p \triangleq \sum_{i=1}^{p}\varepsilon_i$，$S_{p+1}^n \triangleq \sum_{i=p+1}^{n}\varepsilon^i$。当应用 Dempster 组合规则时，又会得到荒谬的结果 $m(\theta_{n+1})=1$。然而，若运用基于自由 DSm 模型的 DSm 组合规则，却可以得到相对可靠的结果 $m(\theta_{n+1})=\varepsilon_p\varepsilon_n$。

5.3.5 更一般的情形

考虑 $0<\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n<1$ 是一组极小的正数(趋近于 0)，鉴别框为 $\Theta=\{\theta_1,\cdots,\theta_n,\theta_{n+1}\}$，存在 $k\geqslant 2$ 个证据源，它们给出了如下的一个 k 行 $n+1$ 列的信度质量矩阵：

- 存在一列(假设是第 j 列)，为$(\varepsilon_{j_1},\varepsilon_{j_2},\cdots,\varepsilon_{j_k})'$(向量的转置)，这里 $1\leqslant j\leqslant n+1$，并且$\{\varepsilon_{j_1},\varepsilon_{j_2},\cdots,\varepsilon_{j_k}\}$包含在$\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\}$中。
- 每一列(除了第 j 列)至少包含一个 0 元素。

利用 Dempster 组合规则可以得出荒谬的结论 $m(\theta_j)=1$，而运用经典的 DSm 规则却可以得到可靠的结果 $m(\theta_j)=\varepsilon_{j_1}\cdot\varepsilon_{j_2},\cdots,\varepsilon_{j_k}\neq 0$。

事实上，需要将 $\varepsilon_{j_1},\varepsilon_{j_2},\cdots,\varepsilon_{j_k}$ 限制为极小的正数，而不是对所有的 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$(其他的值可以是区间$[0,1)$中的任何值，只需保证每一行元素的和都为 1)进行限制。

5.4 第三类反例

第三类情形是对某些赋非空信度质量不确定命题的信度函数进行处理。

5.4.1 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4\}$的例子

考虑框架 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4\}$，存在两个独立的信息源，它们给出的信度质量矩阵为

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	$\theta_3\cup\theta_4$
$m_1(\cdot)$	0.99	0	0	0	0.01
$m_2(\cdot)$	0	0.98	0	0	0.02

如果运用 Dempster 规则，那么得到

$$m(\theta_3 \cup \theta_4) = \frac{(0.01 \cdot 0.02)}{(0+0+0+0+0.01 \cdot 0.02)} = 1$$

（总的未知集），这次信息融合没有带来任何有用的信息。这个例子看起来与 Zadeh 的例子十分相似，但由于这个例子涉及到不确定的（而不是冲突的）结果，所以两者又是不同的。运用经典的 DSm 规则可得：$m(\theta_1 \cap \theta_2)=0.9702$，$m(\theta_1 \cap (\theta_3 \cup \theta_4))=0.0198$，$m(\theta_2 \cap (\theta_3 \cup \theta_4))=0.0098$，$m(\theta_3 \cup \theta_4)=0.0002$。假设现在发现所有的交集都是空集（即采用 Shafer 模型），则运用混合 DSm 规则可得：$m_h(\theta_1 \cup \theta_2)=0.9702$，$m_h(\theta_1 \cup \theta_3 \cup \theta_4)=0.0198$，$m_h(\theta_2 \cup \theta_3 \cup \theta_4)=0.0098$，$m_h(\theta_3 \cup \theta_4)=0.0002$。

5.4.2 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\theta_5\}$的例子

考虑鉴别框 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\theta_5\}$，存在三个独立的信息源，它们给出的信度质量矩阵为

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	$\theta_4 \cup \theta_5$
$m_1(\cdot)$	0.99	0	0	0	0	0.01
$m_2(\cdot)$	0	0.98	0.01	0	0	0.01
$m_3(\cdot)$	0.01	0.01	0.97	0	0	0.01

- 如果运用 Dempster 规则，那么得到

$$m(\theta_4 \cup \theta_5) = \frac{(0.01 \cdot 0.01 \cdot 0.01)}{(0+0+0+0+0.01 \cdot 0.01 \cdot 0.01)} = 1$$

（总的未知集），这次信息融合没有带来任何有用的信息。

- 运用经典 DSm 规则，将得到

$$m(\theta_1 \cap \theta_2) = 0.99 \cdot 0.98 \cdot 0.01 + 0.99 \cdot 0.98 \cdot 0.01 = 0.019404$$

$$m(\theta_1 \cap \theta_3) = 0.99 \cdot 0.01 \cdot 0.01 + 0.99 \cdot 0.01 \cdot 0.97 = 0.009702$$

$$m(\theta_1 \cap \theta_2 \cap \theta_3) = 0.99 \cdot 0.98 \cdot 0.97 + 0.99 \cdot 0.01 \cdot 0.01 = 0.941193$$

$$m(\theta_1 \cap \theta_3 \cap (\theta_4 \cup \theta_5)) = 0.99 \cdot 0.01 \cdot 0.01 + 0.99 \cdot 0.01 \cdot 0.97 + 0.01 \cdot 0.01 \cdot 0.01 = 0.009703$$

$$m(\theta_1 \cap (\theta_4 \cup \theta_5)) = 0.99 \cdot 0.01 \cdot 0.01 + 0.99 \cdot 0.01 \cdot 0.01 + 0.01 \cdot 0.01 \cdot 0.01 = 0.000199$$

$$m((\theta_4 \cup \theta_5) \cap \theta_2 \cap \theta_1) = 0.01 \cdot 0.98 \cdot 0.01 + 0.99 \cdot 0.01 \cdot 0.01 + 0.99 \cdot 0.98 \cdot 0.01 = 0.009899$$

$$m((\theta_4 \cup \theta_5) \cap \theta_2) = 0.01 \cdot 0.98 \cdot 0.01 + 0.01 \cdot 0.98 \cdot 0.01 + 0.01 \cdot 0.01 \cdot 0.01 = 0.000197$$

$$m((\theta_4 \cup \theta_5) \cap \theta_2 \cap \theta_3) = 0.01 \cdot 0.98 \cdot 0.97 + 0.01 \cdot 0.01 \cdot 0.01 = 0.009507$$

$$m((\theta_4 \cup \theta_5) \cap \theta_3) = 0.01 \cdot 0.01 \cdot 0.97 + 0.01 \cdot 0.01 \cdot 0.01 + 0.01 \cdot 0.01 \cdot 0.97 = 0.000195$$

$$m(\theta_4 \cup \theta_5) = 0.01 \cdot 0.01 \cdot 0.01 = 0.000001$$

所有的信度质量之和为 1。

- 假设发现所有的交集是空集(采用 Shafer 模型),然后运用混合 DSm 规则,则得到

$m_h(\theta_1 \cup \theta_2) = 0.019404$ $\quad m_h(\theta_1 \cup \theta_3) = 0.009702$

$m_h(\theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3) = 0.941193$ $\quad m_h(\theta_1 \cup \theta_3 \cup \theta_4 \cup \theta_5) = 0.009703$

$m_h(\theta_1 \cup \theta_4 \cup \theta_5) = 0.000199$ $\quad m_h(\theta_4 \cup \theta_5 \cup \theta_2 \cup \theta_1) = 0.009899$

$m_h(\theta_4 \cup \theta_5 \cup \theta_2) = 0.000197$ $\quad m_h(\theta_4 \cup \theta_5 \cup \theta_2 \cup \theta_3) = 0.009507$

$m_h(\theta_4 \cup \theta_5 \cup \theta_3) = 0.000195$ $\quad m_h(\theta_4 \cup \theta_5) = 0.000001$

所有的信度质量之和为 1。

5.4.3 一般的情形

令 $\Theta = \{\theta_1, \cdots, \theta_n\}$ $(n \geqslant 2)$,存在 k 个独立的信息源($k \geqslant 2$),信度质量矩阵 $\boldsymbol{M}$ 为 k 行 $n+1$ 列,它对应于 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n$ 以及一个不确定命题(不同于总的不确定命题 $\theta_1 \cup \theta_2 \cup \cdots \cup \theta_n$),将它表示为 $\theta_{i_1} \cup \cdots \cup \theta_{i_n}$。假设以下情况发生:

- 除了最后一列,每一列至少包含一个 0 元素,而最后一列(不确定命题)的各元素为 $0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_k < 1$,它们全为极小的非零值(趋近于 0)。
- 对应于元素 $\theta_{i_1}, \cdots, \theta_{i_n}$ 的各列全为空(对应的元素值等于 0)。

如果应用 Dempster 组合规则,则可以得到 $m(\theta_{i_1} \cup \cdots \cup \theta_{i_n}) = 1$(总的未知集),这对于信息的融合没有任何有用的信息。

5.4.4 更一般的情形

可以将上述情形推广到更一般的情形,考虑有 u 个不确定命题列的情况($u \geqslant 1$)。令 $\Theta = \{\theta_1, \cdots, \theta_n\}$ $(n \geqslant 2)$,存在 k 个独立的信息源($k \geqslant 2$),信度质量矩阵 $\boldsymbol{M}$ 为 k 行 $n+u$ 列,它对应于 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n$,以及 u 个不确定命题(不同于总的不确定命题 $\theta_1 \cup \theta_2 \cup \cdots \cup \theta_n$)。假设以下情况发生:

- 除了最后 u 列中的一列,其他每一列至少包含一个 0 元素,而那一列的各元素值为 $0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_k < 1$,它们全为极小的非零值(趋近于 0)。
- 对应于所有的不确定命题元素 $\theta_{i_1}, \cdots, \theta_{i_n}, \cdots, \theta_{r_2}, \cdots, \theta_{r_n}$(当然这些元素不是全部的 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n$,而只是它们的一部分)的各列都是空的(即这些元素赋值都等于零)。

如果运用 Dempster 组合规则,则可以得到 $m(\theta_{i_1} \cup \cdots \cup \theta_{i_n}) = 1$(总的未知

集），这对于信息的融合没有任何有用的信息。

5.5　第四类反例

这类反例涉及到 Dempster 条件规则的定义[5]，即

$$\forall B \in 2^{\Theta},\ m(B \mid A) = \frac{\sum_{X,Y\in 2^{\Theta},(X\cap Y)=B} m(X)m_A(Y)}{1-\sum_{X,Y\in 2^{\Theta},(X\cap Y)=\varnothing} m(X)m_A(Y)}$$

式中：$m(\cdot)$是定义在幂集 2^{Θ} 上的任意一个信度函数；$m_A(\cdot)$是一个特别定义的信任函数，对于任意 $A\in 2^{\Theta}$，$A\neq\varnothing$，有 $m_A(A)=1$。

5.5.1　$\Theta=\{\theta_1,\cdots,\theta_6\}$的例子

考虑 $\Theta=\{\theta_1,\cdots,\theta_6\}$的情况，存在一个信息源以及一个完全肯定 θ_2 的证据源，信度质量矩阵为

	θ_1	θ_2	θ_3	$\theta_4\cup\theta_5$	$\theta_5\cup\theta_6$
$m_1(\cdot)$	0.3	0	0.4	0.2	0.1
$m_{\theta_2}(\cdot)$	0	1	0	0	0

- 运用 Dempster 条件规则，对所有的信度质量都将得到

$$m(\cdot \mid \theta_2) = 0/0$$

- 运用经典 DSm 规则将得到

$$m(\theta_1 \cap \theta_2 \mid \theta_2) = 0.3 \quad m(\theta_2 \cap \theta_3 \mid \theta_2) = 0.4$$
$$m(\theta_2 \cap (\theta_4 \cup \theta_5) \mid \theta_2) = 0.2 \quad m(\theta_2 \cap (\theta_5 \cup \theta_6) \mid \theta_2) = 0.1$$

- 如果发现所有的交集都是空集（采用 Shafer 模型），那么，运用混合 DSm 规则会得到

$$m_h(\theta_1 \cup \theta_2 \mid \theta_2) = 0.3 \quad m_h(\theta_2 \cup \theta_3 \mid \theta_2) = 0.4$$
$$m_h(\theta_2 \cup \theta_4 \cup \theta_5 \mid \theta_2) = 0.2 \quad m_h(\theta_2 \cup \theta_5 \cup \theta_6 \mid \theta_2) = 0.1$$

5.5.2　$\Theta=\{\theta_1,\cdots,\theta_6\}$的另一个例子

对前述的反例稍作改变，利用下面的信度质量矩阵：

	θ_1	θ_2	θ_3	$\theta_4\cup\theta_5$	$\theta_5\cup\theta_6$
$m_1(\cdot)$	1	0	0	0	0
$m_{\theta_2}(\cdot)$	0	1	0	0	0

- 运用 Dempster 条件规则，对所有的信度质量都将得到

$$m(\cdot \mid \theta_2) = 0/0$$

- 运用经典 DSm 规则将得到

$$m(\theta_1 \cap \theta_2 \mid \theta_2) = 1$$

而其他的值都为 0。

- 如果发现所有的交集都是空集(采用 Shafer 模型),然后使用混合 DSm 规则,则得到:$m_h(\theta_1 \cup \theta_2 \mid \theta_2)=1$,而其他的值都为 0。

5.5.3 推广

令 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n\}$ $(n\geqslant 2)$,存在两个基本信度函数/质量 $m_1(\cdot)$ 和 $m_2(\cdot)$。若存在 $1\leqslant(i\neq j)\leqslant n$,使得 $m_1(\theta_i)=m_2(\theta_j)=1$,而其他的信度赋值都为 0,那么这里不能应用 Dempster 条件规则,因为存在除数为 0 的情况。

5.5.4 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4\}$以及未知集的例子

考虑 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4\}$的情形,存在一个信息源以及一个完全肯定 $\theta_3\cup\theta_4$ 的未知证据源,信度质量矩阵为

	θ_1	θ_2	$\theta_3\cup\theta_4$
$m_1(\cdot)$	0.3	0.7	0
$m_{\theta_3\cup\theta_4}(\cdot)$	0	0	1

- 运用 Dempster 条件规则,对所有的信度质量 $m(\cdot \mid \theta_3\cup\theta_4)$都将得到 0/0 的结果。
- 运用经典 DSm 规则将得到

$$m(\theta_1 \cap (\theta_3 \cup \theta_4) \mid \theta_3 \cup \theta_4) = 0.3, m(\theta_2 \cap (\theta_3 \cup \theta_4) \mid \theta_3 \cup \theta_4) = 0.7$$

其他的值都为 0。

- 如果现在发现所有的交集都是空集(采用 Shafer 模型),那么使用混合 DSm 规则得到

$$m(\theta_1 \cup \theta_3 \cup \theta_4 \mid \theta_3 \cup \theta_4) = 0.3, m(\theta_2 \cup \theta_3 \cup \theta_4 \mid \theta_3 \cup \theta_4) = 0.7$$

其他的值则为 0。

5.5.5 推广

令 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n,\theta_{n+1},\cdots,\theta_{n+m}\}$ $(n\geqslant 2, m\geqslant 2)$。考虑一个信度质量 $m_1(\cdot)$,它表示一个行向量,它的值被赋予在 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n$ 以及元素 $\theta_{n+1},\cdots,\theta_{n+m}$ 之间的某些并集上,这些并集相互之间是不相交的。设第二个信度质量 $m_A(\cdot)$是一个条件信度质量,其中 A 属于$\{\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n\}$或者 $\theta_{n+1},\cdots,\theta_{n+m}$之间的并集,如果

使得 $m_1(A)=0$，那么这里不能应用 Dempster 条件规则，因为存在为 0 的除数。这是无定义的情形（这里没有考虑 θ_i 间的任何交集的情况，因为 Dempster 条件规则不允许出现冲突的情形），但是 DSm 条件规则却能很好地适用于此。

5.5.6 关于自相矛盾信息源的例子

这个反例是关于在一个非细化框架下存在自相矛盾（交集）的情形，这里 Dempster 条件规则并不适用，这是因为 Dempster Shafer 理论不允许鉴别框架 Θ 中基本元素 θ_i 之间存在自相矛盾/冲突的信息。

考虑鉴别框架 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2\}$，存在一个信息源以及一个完全肯定 θ_2 的证据源，信度质量矩阵为

	θ_1	θ_2	$\theta_1\cap\theta_2$	$\theta_1\cup\theta_2$
$m_1(\cdot)$	0.2	0.1	0.4	0.3
$m_{\theta_2}(\cdot)$	0	1	0	0

运用 DSm 条件规则，得到

$$m(\theta_1\mid\theta_2)=0\quad m(\theta_2\mid\theta_2)=0.1+0.3=0.4$$

$$m(\theta_1\cap\theta_2\mid\theta_2)=0.2+0.4=0.6\quad m(\theta_1\cup\theta_2\mid\theta_2)=0$$

融合结果的累加和等于 1。

假设发现所有的交集都是空集，当 $\theta_1\cap\theta_2=\varnothing$ 时，运用混合 DSm 规则，则得到

$$m_{\mathrm{h}}(\theta_1\cap\theta_2\mid\theta_2)=0$$

$$m_{\mathrm{h}}(\theta_1\mid\theta_2)=m(\theta_1\mid\theta_2)+[m_1(\theta_1)m_2(\theta_1\cap\theta_2)+m_2(\theta_1)m_1(\theta_1\cap\theta_2)]=0$$

$$\begin{aligned}m_{\mathrm{h}}(\theta_2\mid\theta_2)&=m(\theta_2\mid\theta_2)+[m_1(\theta_2)m_2(\theta_1\cap\theta_2)+m_2(\theta_2)m_1(\theta_1\cap\theta_2)]\\&=0.4+0.1(0)+1(0.4)=0.8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m_{\mathrm{h}}(\theta_1\cup\theta_2\mid\theta_2)&=m(\theta_1\cup\theta_2\mid\theta_2)+[m_1(\theta_1)m_2(\theta_2)+m_2(\theta_1)m_1(\theta_2)]\\&\quad+[m_1(\theta_1\cap\theta_2)m_2(\theta_1\cup\theta_2)+m_2(\theta_1\cap\theta_2)m_1(\theta_1\cup\theta_2)]\\&\quad+[m_1(\theta_1\cap\theta_2)m_2(\theta_1\cap\theta_2)]\\&=0+[0.2(1)+0(0.1)]+[0.4(0)+0(0.3)]+[0.4(0)]\\&=0.2+[0]+[0]+[0]=0.2\end{aligned}$$

5.6 结论

本章介绍了关于 Dempster 组合规则的几个反例，主要是为了说明在 DST 框架中该规则的局限性。这些融合问题告诉我们，必须要将 DST 推广为一个更简便易行的理论，这个新理论应该允许具有任何冲突度的信息源间的组合，并且可以工

作在包含排斥性或非排斥性命题的任何框架下。基于一种新的理论框架，DSmT以及混合 DSm 组合规则给我们提供了符合上述要求的一种新的方法。

参考文献

[1] Daniel M. , *Distribution of contradictive belief masses in combination of belief functions*, in B. Bouchon-Meunier. R. R. Yager, and L. Zadeh, editors. Information. Uncertainty and Fusion, Kluwer Academic Publishers. pp. 431-446,2000.

[2] Dubois D. , Prade H. , *On the unicity of the Demspter rule of combination*, International Journal of Intelligent System, 1,pp. 133-142,1986.

[3] Dubois D. , Prade H. , *Representation and combination of uncertainy with belief functions and possibility measures*, Computational Intelligence, 4, pp. 244-264,1988.

[4] Goodman I. R. , Mahler R. P. S. , Nguyen H. T. , *Mathematics of Data Fusion*, Kluwer Academic Press, pp. 43-44, 1997.

[5] Shafer G. , *A Mathematical Theory of Evidence*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1976.

[6] Yager R. R. , *Hedging in the combination of evidence*, Journal of Information & Optimization Sciences, Vol. 4, No. 1, pp. 73-81, 1983.

[7] Zadeh L. , *On the validity of Dempster's rule of combination*, Memo M 79/24, Univ. of California, Berkeley, 1979.

[8] Zadeh L. , *A simple view of the Dempster-Shafer theory of evidence and its implication of the rule of combination*, AI Magazine 7, pp. 85-90, 1986.

[9] Zeigler B. P. , *Some properties of modified Dempster-Shafer operators in rule based inference systems*, International Journal of General Systems, Vol. 14, no. 4, pp. 345-356, 1988.

第 6 章　不精确信度融合

Jean Dezert
ONERA
29 Av. de la Division Leclerc
92320 Châtillon, France

Florentin Smarandache
Department of Mathematics
University of New Mexico
Gallup, NM 8730, U. S. A

摘要:本章研究在 DSmT 框架下,当信息源提供的是不精确的信度函数/质量时,对 DSm 规则进行从分级融合到子单元区间的融合的推广(经典的或混合的规则)。更一般地,推广到对任何子单元区间集合的融合。本项研究对有关文献的那些仅局限在可传递信度模型框架的区间值信度结构 IBS(Interval-valued Belief Structures)进行推广。用于处理不精确信息的新的 DSm 融合规则的数字实例也会在本章进行介绍。

6.1　引言

前面的几章主要集中介绍了对于精确的不确定以及冲突/矛盾的信息源提供的广义基本信度赋值(gbba)进行的融合。这里所指的精确 gbba,就是在超幂集 D^Θ 上精确定义的基本信度函数/质量 $m(\cdot)$,其中每个 $m(X)$(X 属于 D^Θ)只是代表了区间[0,1]上的一个实数值,满足 $\sum_{X\in D^\Theta} m(X)=1$。本章通过对可接受的不精确广义基本信度赋值 $m^I(\cdot)$进行处理来扩展 DSm 的融合规则,$m^I(\cdot)$是定义在[0,1]上的实子单元区间上的,或者更一般地说,是实子单元集合上的(即这里的集合并不一定都是区间)。若定义在 D^Θ 上的不精确信度赋值 $m^I(\cdot)$满足下面的条件,即对于每个 $X\in D^\Theta$ 当且仅当至少存在一个 $m(X)\in m^I(X)$ 使得 $\sum_{X\in D^\Theta} m(X)=1$,那么这个不精确信度是可以接受的。利用[0,1]上的实子单元集合来表示不精确的信度结构的想法并不是新提出的,强烈建议读者仔细阅读先前的 Lamata 和 Moral 的著作,以及 Denoeux 在文献[5,1,2]中对这个话题的有关讨论。根据我们的知识,在以前的文献中所提出的有价值的工作,仅局限于在 Smets 提出的可传递信度模型(TBM)[12,13]的框架下组合子单元区间的信息。我

们对 Lamata、Moral 和 Denoeux 提出的基于子单元区间值的方法推广到了基于子单元集合值的方法。因而，Denoeux 用于表示不精确信度的闭区间被扩展到了包含在[0,1]内的任意集合，也就是说，所考虑的这些情形的集合可以是所有在[0,1]内的(闭的、开的或者半开/半闭的)区间和/或数值的并集。本文中，这些提出的扩展都是在 DSmT 的框架下完成的。当然，如果用户优先选用 TBM 模型，那么这些扩展也可以直接应用于 TBM 模型中 IBS 上的融合。

在很多融合问题中，似乎很难找到(如果是不重要的)产生精确基本信度赋值的精确证据源(特别是当信度函数是由人类专家提供的时候)，那么很有必要找到一个能够支持不精确信息源的更方便易行的似是而非理论。本章就将提出一个新的处理不精确、不确定以及冲突信息源的融合的理论。6.2 节简略介绍针对精确信度函数的 DSm 组合规则。6.3 节介绍一些本章独有的集合运算，它们在处理考虑问题的框架下的本质不精确信息是很有必要的。在 6.4 节提出组合简单的不精确信度赋值的方法，这些信度赋值仅对应于子单元区间，也就是在文献[1]中提到的 IBS(区间值信度结构)。6.5 节对这个新的融合规则推广到组合任意类型的不精确信度赋值，指的是包含在[0,1]上的几个子单元(半)开区间、(半)闭区间和/或点集的并集。我们同样给出几个数字实例。后面用符号(a,b)表示一个开区间，用$[a,b]$表示一个闭区间，用$(a,b]$或者$[a,b)$表示一个半开半闭区间。

6.2 精确信度的组合

6.2.1 一般 DSm 组合规则

考虑融合问题的鉴别框为 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n\}$，它的超幂集为 D^Θ(即由 Θ 中的元素 θ_i 通过$\cup$和$\cap$的运算得到的所有命题的集合(见第 2 章))，存在 k 个独立的(精确的)信息源 $\beta_1,\cdots,\beta_2,\cdots,\beta_k$ 以及与它们相关的定义在 D^Θ 上的广义基本信度赋值 $m_1(\cdot),m_2(\cdot),\cdots,m_k(\cdot)$。令信度质量矩阵为

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1d} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2d} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ m_{k1} & m_{k2} & \cdots & m_{kd} \end{bmatrix}$$

式中：$d=|D^\Theta|$表示超幂集的维数，对任意的 $1\leqslant i\leqslant k,1\leqslant j\leqslant d$，有 $m_{ij}\in[0,1]$，它是信息源 β_1 给命题 $A_j\in D^\Theta$ 分配的信度质量。根据第 3 章给出的 DSm 的排序程序，列举出超幂集 D^Θ 中的元素 $A_1,A_2,\cdots,A_d$。矩阵 $\boldsymbol{M}$ 描述了所有可用的信息，必须将其加以组合才可以解决所考虑的融合问题。因为 $m_1(\cdot),m_2(\cdot),\cdots,m_k$

(k)都是 gbba，所以矩阵中每一行的累加和必然是 1。对任何（可能是混合的）模型 $\mathcal{M}(\Theta)$而言，应用通常的 DSm 组合规则（也可称为混合 DSm 规则）来处理 $k\geqslant 2$ 个信息源，则对定义在 $A\in D^{\Theta}$ 的信度质量进行融合（参见第 4 章）的结果为

$$m_{\mathcal{M}(\Theta)}(A)\triangleq\omega(A)[S_1(A)+S_2(A)+S_3(A)] \tag{6.1}$$

式中：$\phi(A)$是集合 A 的特征非空函数，也就是说，如果 $A\notin\varnothing$，那么 $\phi(A)=1$，否则 $\phi(A)=0$。在这里$\varnothing\triangleq\{\varnothing,\varnothing_{\mathcal{M}}\}$，它表示绝对的空集和属于 D^{Θ} 的所有相对的空集（在所选择的混合模型 $\mathcal{M}(\Theta)$中被强制转化为空集的元素/命题）。如果在模型中没有提到任何约束，$\varnothing$就弱化为了$\{\varnothing\}$，这样就对应于自由 DSm 模型（参见第 4 章）。如果将元素 $\theta_i\in\Theta$ 之间的所有排斥性约束都考虑到模型中去，那么混合模型 $M(\Theta)$就转化为基于 DS 证据推理（DST）[9] 的 Shafer 模型。$S_1(A)$、$S_2(A)$、$S_3(A)$的定义如下：

$$S_1(A)\triangleq\sum_{\substack{X_1,X_2,\cdots,X_k\in D^{\Theta}\\(X_1\cap X_2\cap\cdots\cap X_k)=A}}\prod_{i=1}^{k}m_i(X_i) \tag{6.2}$$

$$S_2(A)\triangleq\sum_{\substack{X_1,X_2,\cdots,X_k\in\varnothing\\ [u=A]\vee[u\in\varnothing\wedge(A=I_t)]}}\prod_{i=1}^{k}m_i(X_i) \tag{6.3}$$

$$S_3(A)\triangleq\sum_{\substack{X_1,X_2,\cdots,X_k\in D^{\Theta}\\(X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_k)=A\\(X_1\cap X_2\cap\cdots\cap X_k)=\varnothing}}\prod_{i=1}^{k}m_i(X_i) \tag{6.4}$$

式中：$I_t\triangleq\theta_1\cup\theta_2\cup\cdots\cup\theta_n$；$u\triangleq u(X_1)\cup u(X_2)\cup\cdots\cup u(X_k)$。$u(X)$是组成 X 的所有元素 θ_i 的并集，例如：如果 X 是一个单元素，那么 $u(X)=X$；如果 $X=\theta_1\cap\theta_2$ 或者 $X=\theta_1\cup\theta_2$，那么 $u(X)=\theta_1\cup\theta_2$；如果 $X=(\theta_1\cap\theta_2)\cup\theta_3$，那么 $u(X)=\theta_1\cup\theta_2\cup\theta_3$，等等。这里规定 $u(\varnothing)\triangleq\varnothing$。

6.2.2 例子

考虑在 t 时刻鉴别框为 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}$，两个独立的证据源 β_1 和 β_2 给出的广义基本信度赋值 $m_1(\cdot)$和 $m_2(\cdot)$如表 6.1 所列。

表 6.1 精确 bba 融合输入

$A\in D^{\Theta}$	$m_1(A)$	$m_2(A)$	$A\in D^{\Theta}$	$m_1(A)$	$m_2(A)$
θ_1	0.1	0.5	θ_3	0.3	0.1
θ_2	0.2	0.3	$\theta_1\cap\theta_2$	0.4	0.1

基于自由 DSm 模型和经典 DSm 规则(6.2 节),这两个精确信息源的融合结果(用符号⊕表示(即 $m(\cdot)=[m_1 \oplus m_2](\cdot)$)如表 6.2 所列。

表 6.2 经典 DSm 规则融合结果

$A \in D^\Theta$	$m(A)=[m_1 \oplus m_2](A)$	$A \in D^\Theta$	$m(A)=[m_1 \oplus m_2](A)$
θ_1	0.05	$\theta_1 \cap \theta_3$	0.16
θ_2	0.06	$\theta_2 \cap \theta_3$	0.11
θ_3	0.03	$\theta_1 \cap \theta_2 \cap \theta_3$	0.07
$\theta_1 \cap \theta_2$	0.52		

然后,假设在 $t+1$ 时刻发现由于某些原因必须要引入约束 $\theta_1 \cap \theta_2 = \varnothing$ 来改变这个自由 DSm 模型,这个约束同时也包含了 $\theta_1 \cap \theta_2 \cap \theta_3 = \varnothing$。这就是要在其上进行工作的混合 DSm 模型的特征。这时对这些数值(即精确的信度质量 $m_1(\cdot)$ 和 $m_2(\cdot)$)利用通常的混合 DSm 组合规则,在 $t+1$ 时刻就得到了新的融合结果。根据式(6.1),得到 $m(\theta_1 \cap \theta_2 \overset{\mathscr{M}}{\equiv} \varnothing)=0$,$m(\theta_1 \cap \theta_2 \cap \theta_3 \overset{\mathscr{M}}{\equiv} \varnothing)=0$ 以及表 6.3。

表 6.3 模型 $\mathscr{M}$ 的混合 DSm 规则融合结果

$A \in D^\Theta$	$m(A)$
θ_1	0.05+[0.1(0.1)+0.5(0.4)]=0.26
θ_2	0.06+[0.2(0.1)+0.3(0.4)]=0.20
θ_3	0.3+[0.3(0.1)+0.1(0.4)]=0.10
$\theta_1 \cap \theta_3$	0.16
$\theta_2 \cap \theta_3$	0.11
$\theta_1 \cup \theta_2$	0+[0.13]+[0.04]=0.17

6.3 集合运算

为了较好地处理不精确的信息,并且使该内容包含在本章之内,需要引入如下的集合运算(区间分析与方法具体介绍参见文献[3,4,5,6,7])。这里定义的关于不精确性的集合运算与通过区间计算[10]来达到合理的区间延拓是相似的,但是它们不同于模态区间分析,后者是不满足融合的需要。我们并不关注应用在模态区间分析中区间$[a,b]$的对偶性,因为总可以认为 $a \leqslant b$,然而当区间是对偶时,$\mathrm{Du}([a,b])=[b,a]$,而这是不会发生的。这里,把区间运算推广到了任意集合的运算。当然,对于融合问题仅需要考虑实子单元集合的运算,而这些定义过的集合运算方法可以应用于任意类型的集合。

设 S_1 和 S_2 是单位区间[0,1]上的两个(一维的)标准实子集,存在一个数 $k\in[0,1]$,那么有如下定义[11]。

- 集合的加法

$$S_1 \boxplus S_2 = S_2 \boxplus S_1 \triangleq \{x \mid x = s_1 + s_2 s_1 \in S_1, s_2 \in S_2\},$$

$$\text{从而}\begin{cases}\inf(S_1 \boxplus S_2) = \inf(S_1) + \inf(S_2) \\ \sup(S_1 \boxplus S_2) = \sup(S_1) + \sup(S_2)\end{cases}$$

作为一种特例有

$$\{k\} \boxplus S_2 = S_2 \boxplus \{k\} = \{x \mid x = k + s_2, s_2 \in S_2\},$$

$$\text{从而}\begin{cases}\inf(\{k\} \boxplus S_2) = k + \inf(S_2) \\ \sup(\{k\} \boxplus S_2) = k + \sup(S_2)\end{cases}$$

例子:

[0.1,0.3]⊞[0.2,0.5]=[0.3,0.8]是因为 0.1+0.2=0.3 且 0.3+0.5=0.8;

(0.1,0.3]⊞[0.2,0.5]=(0.3,0.8];

[0.1,0.3]⊞(0.2,0.5]=(0.3,0.8];

[0.1,0.3)⊞[0.2,0.5]=[0.3,0.8);

[0.1,0.3]⊞[0.2,0.5)=[0.3,0.8);

(0.1,0.3]⊞(0.2,0.5)=(0.3,0.8);

[0.7,0.8]⊞[0.5,0.9]=[1.2,1.7];

{0.4}⊞[0.2,0.5]=[0.2,0.5]⊞{0.4}=[0.6,0.9]是因为 0.4+0.2=0.6 且 0.4+0.5=0.9;

{0.4}⊞(0.2,0.5]=(0.6,0.9];

{0.4}⊞[0.2,0.5)=[0.6,0.9);

{0.4}⊞(0.2,0.5)=(0.6,0.9)

- 集合的减法

$$S_1 \boxminus S_2 \triangleq \{x \mid x = s_1 - s_2, s_1 \in S_1, s_2 \in S_2\},$$

$$\text{从而}\begin{cases}\inf(S_1 \boxminus S_2) = \inf(S_1) - \sup(S_2) \\ \sup(S_1 \boxminus S_2) = \sup(S_1) - \inf(S_2)\end{cases}$$

作为一种特例有

$$\{k\} \boxminus S_2 = \{x \mid x = k - s_2, s_2 \in S_2\},$$

$$\text{从而}\begin{cases}\inf(\{k\} \boxminus S_2) = k - \sup(S_2) \\ \sup(\{k\} \boxminus S_2) = k - \inf(S_2)\end{cases}$$

$$S_2 \boxminus \{k\},\text{从而}\begin{cases}\inf(S_2 \boxminus \{k\}) = \inf(S_2) - k \\ \sup(S_2 \boxminus \{k\}) = \sup(S_2) - k\end{cases}$$

同样地，

例子：

$[0.3,0.7]\boxminus[0.2,0.3]=[0.0,0.5]$是因为 $0.3-0.3=0.0$ 且 $0.7-0.2=0.5$；

$[0.3,0.7]\boxminus\{0.1\}=[0.2,0.6]$；

$\{0.8\}\boxminus[0.3,0.7]=[0.1,0.5]$是因为 $0.8-0.7=0.1$ 且 $0.8-0.3=0.5$；

$[0.1,0.8]\boxminus[0.5,0.6]=[-0.5,0.3]$；

$[0.1,0.8]\boxminus[0.2,0.9]=[-0.8,0.6]$；

$[0.2,0.5]\boxminus[0.1,0.6]=[-0.4,0.4]$

- 集合的乘法

$$S_1 \boxdot S_2 \triangleq \{x \mid x = s_1 \cdot s_2, s_1 \in S_1, s_2 \in S_2\},$$

$$\text{从而}\begin{cases}\inf(S_1 \boxdot S_2) = \inf(S_1) \cdot \inf(S_2) \\ \sup(S_1 \boxdot S_2) = \sup(S_1) \cdot \sup(S_2)\end{cases}$$

作为一种特例有

$$\{k\} \boxdot S_2 = S_2 \boxdot \{k\} = \{x \mid x = k \cdot s_2, s_2 \in S_2\},$$

$$\text{从而}\begin{cases}\inf(\{k\} \boxdot S_2) = k \cdot \inf(S_2) \\ \sup(\{k\} \boxdot S_2) = k \cdot \sup(S_2)\end{cases}$$

例子：

$[0.1,0.6]\boxdot[0.8,0.9]=[0.08,0.54]$是因为 $0.1 \cdot 0.8=0.08$ 且 $0.6 \cdot 0.9=0.54$；

$[0.1,0.6]\boxdot\{0.3\}=\{0.3\}\boxdot[0.1,0.6]=[0.03,0.18]$是因为 $0.3 \cdot 0.1=0.03$ 且 $0.3 \cdot 0.6=0.18$

- 集合的除法

在我们讨论的融合问题中，集合的除法并不是必要的，因为 DSm 组合规则（经典的或混合的）不需要一个归一化的过程，因而同样也不需要除法运算。事实上，DSm 规则仅需要加法和乘法运算。这里给出除法运算的定义，读者可根据个人的兴趣和爱好对其进行了解。集合的除法运算定义如下：

如果 $0 \notin S_2$，那么 $S_1 \boxslash S_2 \triangleq \{x \mid x = s_1/s_2, s_1 \in S_1, s_2 \in S_2\}$，从而
$$\begin{cases}\inf(S_1 \boxslash S_2)=\inf(S_1)/\sup(S_2) \\ \sup(S_1 \boxslash S_2)=\sup(S_1)/\inf(S_2) \text{ if } 0\notin S_2 \\ \sup(S_1 \boxslash S_2)=+\infty \text{ if } 0\in S_2\end{cases}$$

如果 $0\in S_2$，那么 $S_1 \boxslash S_2=[\inf(S_1)/\sup(S_2),+\infty)$

在某些特殊情况下，当 $k\neq 0$ 时有

$$\{k\} \boxslash S_2 = \{x \mid x = k/s_2, s_2 \in S_2 \setminus \{0\}\},$$

$$\text{从而}\begin{cases} \inf(\{k\} \boxslash S_2) = k/\sup(S_2) \\ \sup(\{k\} \boxslash S_2) = k/\inf(S_2) \end{cases}$$

若 $0 \in S_2$，则 $\sup(\{k\} \boxslash S_2) = +\infty$。

对于 $k \neq 0$ 时仍有一些特殊情况：

$$S_2 \boxslash \{k\} = \{x \mid x = s_2/k, s_2 \in S_2\},$$

$$\text{从而}\begin{cases} \inf(S_2 \boxslash \{k\}) = \inf(S_2)/k \\ \sup(S_2 \boxslash \{k\}) = \sup(S_2)/k \end{cases}$$

例子：

$[0.4,0.6] \boxslash [0.1,0.2] = [2,6]$是因为 $0.4/0.2=2$ 且 $0.6/0.1=6$；

$[0.4,0.6] \boxslash \{0.4\} = [1,1.5]$是因为 $0.4/0.4=1$ 且 $0.6/0.4=1.5$；

$[0.8] \boxslash [0.2,0.5] = [1.6,4]$是因为 $0.8/0.2=4$ 且 $0.8/0.5=1.6$；

$[0,0.5] \boxslash [0.1,0.2] = [0,5]$；$[0,0.5] \boxslash \{0.4\} = [0,1.25]$是因为 $0/0.4=0$ 且 $0.5/0.4=1.25$；

$[0.3,0.9] \boxslash [0,0.2] = [1.5,+\infty)$是因为 $0.3/0.2=1.5$，而且由于 $0 \in (S_2 = [0,0.2])$，$\sup([0.3,0.9] \boxslash [0,0.2]) = +\infty$；

$[0,0.9] \boxslash [0,0.2] = [0,+\infty)$；

$\{0.7\} \boxslash [0,0.2] = [3.5,+\infty)$是因为 $0.7/0.2=3.5$ 且 $0 \in (S_2 = [0,0.2])$，$\sup(\{0.7\} \boxslash [0,0.2]) = +\infty$；

$\{0\} \boxslash [0,0.2] = [0,+\infty)$；$[0.3,0.9] \boxslash \{0\} = +\infty$；

$[0,0.9] \boxslash \{0\} = +\infty$；

$[0.2,0.7] \boxslash [0,0.8] = [0.25,+\infty)$

这些运算方法可以直接推广到任意类型的集合(并不必然是子单元的子集，在后面给出的一般性的例子中将会介绍)，但是为简洁起见，接下来的部分仅介绍子单元的子集的运算。

与精确信息融合的结果一样，不精确信息融合的结果也必须包含在单位区间$[0,1]$中。如果信度质量的计算结果是小于 0 的，就用 0 来取代它；类似的情况，如果它是大于 1 的，就用 1 来代替它。例如(在融合问题的特定情形下)：$[0.2, 0.4] \boxplus [0.5, 0.8] = [0.7, 1.2]$将被强制转化为$[0.7, 1]$。

6.4 定义在单个子单元区间上的信度融合

6.4.1 DSm 组合规则

假设一些给定的信息源并不能提供给一个具体的/精确的信度质量 $m_{ij} \in [0,$

1]，仅提供给一个中心①在 m_{ij} 的区间，即 $I_{ij}=[m_{ij}-\varepsilon_{ij},m_{ij}+\varepsilon_{ij}]$，这里 $0\leqslant\varepsilon_{ij}\leqslant 1$，且对所有的 $1\leqslant i\leqslant k$ 以及 $1\leqslant j\leqslant d$，有 $I_{ij}\subseteq[0,1]$。当 I_{ij} 是半闭或者半开的情况下也有相似的假设。

引理 1： 若 $A,B\subseteq[0,1]$ 且 $\alpha\in[0,1]$，则

$$\begin{cases}\inf(A\boxdot B)=\inf(A)\cdot\inf(B)\\ \sup(A\boxdot B)=\sup(A)\cdot\sup(B)\end{cases}\quad\begin{cases}\inf(A\oplus B)=\inf(A)+\inf(B)\\ \sup(A\oplus B)=\sup(A)+\sup(B)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\inf(\alpha\cdot A)=\alpha\cdot\inf(A)\\ \sup(\alpha\cdot A)=\alpha\cdot\sup(A)\end{cases}\quad\begin{cases}\inf(\alpha+A)=\alpha+\inf(A)\\ \sup(\alpha+A)=\alpha+\sup(A)\end{cases}$$

可以认为实数 α 是一个特殊的区间 $[\alpha,\alpha]$，所以对于前述引理的所有运算都可以简化为子单元区间上的乘法和加法。因此，一般用于子单元数值上的运算（乘法和加法）的一般 DSm 规则，也可以被扩展用于处理子单元区间上的运算。式（6.1）仍然保持不变，但是 $m_i(X_i)$ 变成了子单元区间，这里 $1\leqslant i\leqslant k$。那么，信度赋值矩阵 $\boldsymbol{M}$ 就被扩展为

$$\inf(\boldsymbol{M})=\begin{bmatrix}m_{11}-\varepsilon_{11} & m_{12}-\varepsilon_{12} & \cdots & m_{1d}-\varepsilon_{1d}\\ m_{21}-\varepsilon_{21} & m_{22}-\varepsilon_{22} & \cdots & m_{2d}-\varepsilon_{2d}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ m_{k1}-\varepsilon_{k1} & m_{k2}-\varepsilon_{k2} & \cdots & m_{kd}-\varepsilon_{kd}\end{bmatrix}$$

$$\sup(\boldsymbol{M})=\begin{bmatrix}m_{11}+\varepsilon_{11} & m_{12}+\varepsilon_{12} & \cdots & m_{1d}+\varepsilon_{1d}\\ m_{21}+\varepsilon_{21} & m_{22}+\varepsilon_{22} & \cdots & m_{2d}+\varepsilon_{2d}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ m_{k1}+\varepsilon_{k1} & m_{k2}+\varepsilon_{k2} & \cdots & m_{kd}+\varepsilon_{kd}\end{bmatrix}$$

说明：将用于数值的一般 DSm 组合规则和用于区间的一般 DSm 规则区别开来，前者用一般的 $m_{\mathcal{M}(\Theta)}(A)$ 或者 $m_i(X_i)$ 等来表示，后者用 $m^I_{\mathcal{M}(\Theta)}(A)$ 或者 $m^I_i(X_i)$ 等来表示。因此，区间值化信度质量的一般 DSm 规则就可以表示如下：

$$\inf(m^I_{\mathcal{M}(\Theta)}(A))\triangleq\phi(A)[S_1^{\inf}(A)+S_2^{\inf}(A)+S_3^{\inf}(A)]\tag{6.5}$$

式中

$$S_1^{\inf}(A)\triangleq\sum_{\substack{X_1,X_2,\cdots,X_k\in D^\Theta\\(X_1\cap X_2\cap\cdots\cap X_k)=A}}\prod_{i=1}^{k}\inf(m^I_i(X_i))$$

$$S_2^{\inf}(A)\triangleq\sum_{\substack{X_1,X_2,\cdots,X_k\in\varnothing\\ [u=A]\vee[(u\in\varnothing)\wedge(A=I_t)]}}\prod_{i=1}^{k}\inf(m^I_i(X_i))$$

① 事实上这个区间中心的假设并不重要，但在这里采用主要是为了符号表示的方便。

$$S_3^{\inf}(A) \triangleq \sum_{\substack{X_1, X_2, \cdots, X_k \in D^\Theta \\ (X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_k) = A \\ (X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_k) \in \varnothing}} \prod_{i=1}^{k} \inf(m_i^I(X_i))$$

以及

$$\sup(m_{\mathscr{M}(\Theta)}^I(A)) \triangleq \phi(A)[S_1^{\sup}(A) + S_2^{\sup}(A) + S_3^{\sup}(A)] \tag{6.6}$$

式中

$$S_1^{\sup}(A) \triangleq \sum_{\substack{X_1, X_2, \cdots, X_k \in D^\Theta \\ (X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_k) = A}} \prod_{i=1}^{k} \sup(m_i^I(X_i))$$

$$S_2^{\sup}(A) \triangleq \sum_{\substack{X_1, X_2, \cdots, X_k \in \varnothing \\ [u=A] \vee [(u \in \varnothing) \wedge (A = I_t)]}} \prod_{i=1}^{k} \sup(m_i^I(X_i))$$

$$S_3^{\sup}(A) \triangleq \sum_{\substack{X_1, X_2, \cdots, X_k \in D^\Theta \\ (X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_k) = A \\ (X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_k) \in \varnothing}} \prod_{i=1}^{k} \sup(m_i^I(X_i))$$

事实上，式(6.5)来自于对信度赋值矩阵 $\inf(\boldsymbol{M})$ 中的数值应用混合 DSm 规则的结果，而式(6.6)来自于对矩阵 $\sup(\boldsymbol{M})$ 中的数值应用混合 DSm 规则的结果。对于所有的 $A \in D^\Theta$，若在自由 DSm 模型下应用经典 DSm 规则，结果的边界可给定为 $S_1^{\inf}(A)$ 和 $S_1^{\sup}(A)$。根据组合式(6.5)和式(6.6)，可直接得到

$$m_{\mathscr{M}(\Theta)}^I(A) = [\inf m_{\mathscr{M}(\Theta)}^I(A), \sup m_{\mathscr{M}(\Theta)}^I(A)] \tag{6.7}$$

当然，区间左封闭性和/或右封闭性取决于被组合的区间 I_{ij}。如果所有的区间都是左闭的，则 $m_{\mathscr{M}(\Theta)}^I(A)$ 也是左闭的。但是，如果至少有一个区间是左开的，则 $m_{\mathscr{M}(\Theta)}^I(A)$ 就是左开的。对区间右边界的封闭性也有类似的结论。对于 $\forall i=1,\cdots,k$ 和 $\forall j=1,\cdots,d$，下式成立：

$$\lim_{\varepsilon_{ij} \to 0}(\inf(\boldsymbol{M})) = \lim_{\varepsilon_{ij} \to 0}(\sup(\boldsymbol{M})) = \boldsymbol{M} \tag{6.8}$$

这就产生了以下定理。

定理 1：$\forall A \in D^\Theta$，$\forall i=1,\cdots,k$ 且 $\forall j=1,\cdots,d$，有

$$\lim_{\varepsilon_{ij} \to 0} m_{\mathscr{M}(\Theta)}^I(A) = [\lim_{\inf_{ij}}(A), \lim_{\sup_{ij}}(A)],$$

$$\text{从而}\begin{cases} \lim_{\inf_{ij}}(A) \triangleq \lim_{\varepsilon_{ij} \to 0}(\inf(m_{\mathscr{M}(\Theta)}^I(A))) \\ \lim_{\sup_{ij}}(A) \triangleq \lim_{\varepsilon_{ij} \to 0}(\sup(m_{\mathscr{M}(\Theta)}^I(A))) \end{cases} \tag{6.9}$$

换句话说，如果所有的中心子单元区间都聚集到了它们相应的中点（不精确度就变为了 0），应用于区间的 DSm 规则就转变为了应用于数值的 DSm 规则。

通常会直接将经典或混合 DSm 规则应用到区间值化的信度上，但这等价于在每个信度质量的上下界应用 DSm 规则。融合之后，如果所有信度质量的下界之和小于 1（这样的情形总是会发生，因为组合不完全信度质量就会得到不完全的结果）并且上界之和大于等于 1（这样的情形也总是会发生，因为冗余的信度质量的组合自然会得到冗余的结果），那么在每个信度区间上就都存在一个点，使得它们的和为 1（根据连续性定理得出——参见 6.5.2 节）。

6.4.2 经典 DSm 规则的例子

先回顾一下前面的例子（参见 6.2.2 节），但这里假设在 t 时刻信息源给出了不精确的广义基本信度赋值，即在 6.2.2 节介绍的以数值为中心的区间值化的信度质量。表 6.4 列出了它们的不同半径。

表 6.4　不精确 bba 融合输入

$A\in D^{\Theta}$	$m_1^I(A)$	$m_2^I(A)$	$A\in D^{\Theta}$	$m_1^I(A)$	$m_2^I(A)$
θ_1	[0.05,0.15]	[0.4,0.6]	θ_3	[0.15,0.45]	[0,0.2]
θ_2	[0.1,0.3]	[0.1,0.5]	$\theta_1\cap\theta_2$	[0.2,0.6]	[0.05,0.15]

基于自由 DSm 模型，根据前面章节中所介绍的方法，将经典 DSm 规则应用到不精确的基本信度赋值上可以得到

$$m^I(\theta_1)=[0.05,0.15]\boxdot[0.4,0.6]=[0.020,0.090]$$

$$m^I(\theta_2)=[0.1,0.3]\boxdot[0.1,0.5]=[0.010,0.150]$$

$$m^I(\theta_3)=[0.15,0.45]\boxdot[0,0.2]=[0,0.090]$$

$$\begin{aligned}m^I(\theta_1\cap\theta_3)&=[[0.05,0.15]\boxdot[0,0.2]]\boxplus[[0.4,0.6]\boxdot[0.15,0.45]]\\&=[0,0.030]\boxplus[0.060,0.270]=[0.060,0.300]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m^I(\theta_2\cap\theta_3)&=[[0.1,0.3]\boxdot[0,0.2]]\boxplus[[0.1,0.5]\boxdot[0.15,0.45]]\\&=[0,0.06]\boxplus[0.015,0.225]=[0.015,0.285]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m^I(\theta_1\cap\theta_2\cap\theta_3)&=[[0.15,0.45]\boxdot[0.05,0.15]]\boxplus[[0,0.2]\boxdot[0.2,0.6]]\\&=[0.0075,0.0675]\boxplus[0,0.12]\\&=[0.0075,0.1875]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m^I(\theta_1\cap\theta_2)=&[[0.2,0.6]\boxdot[0.05,0.15]]\boxplus[[0.05,0.15]\boxdot\\&[0.05,0.15]]\boxplus[[0.4,0.6]\boxdot[0.2,0.6]]\boxplus\\&[[0.1,0.3]\boxdot[0.05,0.15]]\boxplus[[0.1,0.5]\boxdot\\&[0.2,0.6]]\boxplus[[0.05,0.15]\boxdot[0.1,0.5]]\boxplus\end{aligned}$$

$$[[0.4,0.6]\boxdot[0.1,0.3]]$$
$$=[0.010,0.90]\boxplus[0.0025,0.0225]\boxplus[0.08,0.36]\boxplus$$
$$[0.005,0.045]\boxplus[0.02,0.30]\boxplus$$
$$[0.005,0.075]\boxplus[0.04,0.18]$$
$$=[0.1625,1.0725]\equiv[0.1625,1]$$

根据融合定义的集合运算,最后一个等式是通过将[0.1625，1.0725]转化成[0.1625，1]得到的。因此,表 6.5 给出了这两个不精确证据源组合的最终结果 $m^I(\cdot)=[m_1^I\oplus m_2^I](\cdot)$。

表 6.5　自由 DSm 模型应用经典 DSm 规则的融合

$A\in D^\Theta$	$m^I(A)=[m_1^I\oplus m_2^I](A)$	$A\in D^\Theta$	$m^I(A)=[m_1^I\oplus m_2^I](A)$
θ_1	[0.020,0.090]	$\theta_1\cap\theta_3$	[0.060,0.300]
θ_2	[0.010,0.150]	$\theta_2\cap\theta_3$	[0.015,0.285]
θ_3	[0,0.090]	$\theta_1\cap\theta_2\cap\theta_3$	[0.0075,0.1875]
$\theta_1\cap\theta_2$	[0.1625,1.0725→1]		

存在这样一些点,如分别来自区间[0.020，0.090]，…,[0.0075，0.1875] 的 0.03、0.10、0.07、0.4、0.1、0.2、0.1,它们的和是 1,因此融合结果是可以接受的。这个融合过程就等价于对下界的数值和不完全信息应用经典 DSm 规则的过程(表 6.6),并且对上界和冗余信息也使用同样的规则(表 6.7)。

表 6.6　对下界应用经典 DSm 规则的融合

$A\in D^\Theta$	$m_1^{\inf}(A)$	$m_2^{\inf}(A)$	$m^{\inf}(A)$
θ_1	0.05	0.4	0.020
θ_2	0.1	0.1	0.010
θ_3	0.15	0	0
$\theta_1\cap\theta_2$	0.2	0.05	0.1625
$\theta_1\cap\theta_3$	0	0	0.060
$\theta_2\cap\theta_3$	0	0	0.015
$\theta_1\cap\theta_2\cap\theta_3$	0	0	0.0075

表 6.7　对上界应用经典 DSm 规则的融合

$A\in D^\Theta$	$m_1^{\sup}(A)$	$m_2^{\sup}(A)$	$m^{\sup}(A)$
θ_1	0.15	0.6	0.090
θ_2	0.3	0.5	0.150
θ_3	0.45	0.2	0.090
$\theta_1\cap\theta_2$	0.6	0.15	1.0725→1
$\theta_1\cap\theta_3$	0	0	0.300
$\theta_2\cap\theta_3$	0	0	0.285
$\theta_1\cap\theta_2\cap\theta_3$	0	0	0.1875

6.4.3　混合 DSm 规则的例子

假设在 $t+1$ 时刻发现由于某些原因必须要将约束 $\theta_1\cap\theta_2=\varnothing$ 加入到自由 DSm 模型中来改变这个模型,这个约束同时也包含了 $\theta_1\cap\theta_2\cap\theta_3=\varnothing$。对集合直

接应用混合 DSm 规则可以得到以下新的信度质量：

$$
\begin{aligned}
m^I(\theta_1) &= [0.020,0.090] \boxplus [[0.05,0.15] \boxdot [0.05,0.15]] \boxplus \\
&\quad [[0.4,0.6] \boxdot [0.2,0.6]] \\
&= [0.020,0.090] \boxplus [0.0025,0.0225] \boxplus [0.08,0.36] \\
&= [0.1025,0.4725] \\
m^I(\theta_2) &= [0.010,0.150] \boxplus [0.1,0.3] \boxdot [0.05,0.15]] \boxplus \\
&\quad [[0.1,0.5] \boxdot [0.2,0.6]] \\
&= [0.010,0.150] \boxplus [0.005,0.045] \boxplus [0.02,0.30] \\
&= [0.035,0.495] \\
m^I(\theta_3) &= [0,0.090] \boxplus [[0.15,0.45] \boxdot [0.05,0.15]] \boxplus \\
&\quad [[0,0.2] \boxdot [0.2,0.6]] \\
&= [0,0.090] \boxplus [0.0075,0.0675] \boxplus [0,0.12] \\
&= [0.0075,0.2775] \\
m^I(\theta_1 \cup \theta_2) &= [[02,0.6] \boxdot [0.05,0.15]] \boxplus [[0.05,0.15] \boxdot \\
&\quad [0.1,0.5]] \boxplus [[0.4,0.6] \boxdot [0.1,0.3]] \\
&= [0.010,0.090] \boxplus [0.005,0.075] \boxplus [0.04,0.18] \\
&= [0.055,0.345]
\end{aligned}
$$

通过空信度质量的定义得到 $m^I(\theta_1 \cap \theta_2) = m^I(\theta_1 \cap \theta_2 \cap \theta_3) = 0$(由于选择了混合模型 $\mathscr{M}$)。$m^I(\theta_1 \cap \theta_3) = [0.060,0.300]$，$m^I(\theta_2 \cap \theta_3) = [0.015,0.285]$，这两个结果保持不变。最后，在所选的混合模型 $\mathscr{M}$ 下，不精确信度赋值的融合结果概括在表 6.8 中。

表 6.8　模型 $\mathscr{M}$ 应用混合 DSm 规则的融合

$A \in D^\Theta$	$m^I(A)=[m^{\inf}(A),m^{\sup}(A)]$	$A \in D^\Theta$	$m^I(A)=[m^{\inf}(A),m^{\sup}(A)]$
θ_1	[0.1025,0.4725]	$\theta_1 \cap \theta_3$	[0.060,0.300]
θ_2	[0.035,0.495]	$\theta_2 \cap \theta_3$	[0.015,0.285]
θ_3	[0.0075,0.2775]	$\theta_1 \cap \theta_2 \cap \theta_3 \overset{\mathscr{M}}{\equiv} \varnothing$	[0,0]=0
$\theta_1 \cap \theta_2 \overset{\mathscr{M}}{\equiv} \varnothing$	[0,0]=0	$\theta_1 \cup \theta_2$	[0.055,0.345]

该融合结果依然可以接受，因为在区间[0.1025，0.4725]，…，[0.055，0.345]上分别存在点，例如 0.1、0.3、0.1、0、0.2、0.1、0、0.2，使得它们的和为 1。事实上，在每一个这样的例子中都存在无穷多组取自各个区间的点，使得它们的和为 1。这种情况可以推广到任意的例子当中。

6.5 DSm 规则在集合上的推广

本节对前面介绍的可接受的不精确信息融合的情形进行推广。前面仅是在单个子单元区间上对不精确信息进行定义，而这里的不精确性是定义在集合上的。换句话说，前面介绍的可接受的不精确信度质量的形式是 $m^I(A)=[a,b]\subseteq[0,1]$，而现在处理的信度质量的形式变成了 $m^I(A)=[a_1,b_1]\cup\cdots\cup[a_m,b_m]\cup(c_1,d_1)\cup\cdots\cup(c_n,d_n)\cup(e_1,f_1]\cup\cdots\cup(e_p,f_p]\cup[g_1,h_1)\cup\cdots\cup[g_q,h_q)\cup\{A_1,\cdots,A_r\}$，这里所有包含在 $m^I(A)$ 中的边界或元素都属于 $[0,1]$。

6.5.1 不精确信度的一般 DSm 规则

根据前面的结果，可以将经典 DSm 规则在数值上的应用推广到在集合上的应用，具体形式如下：

$$\forall A\neq\varnothing\in D^{\Theta},m^I(A)=\sum_{\substack{X_1,X_2,\cdots,X_k\in D^{\Theta}\\(X_1\cap X_2\cap\cdots\cap X_k)=A}}\boxed{\sum}\ \boxed{\prod_{i=1,\cdots,k}}m_i^I(X_i)\tag{6.10}$$

式中：$\boxed{\sum}$ 和 $\boxed{\prod}$ 分别表示集合的和与积。

与此相类似，可以将混合 DSm 规则从数值上的应用通过下面的方法推广到集合上的应用，即

$$m^I_{\mathscr{M}(\Theta)}(A)\triangleq\phi(A)\boxdot[S_1^I(A)\boxplus S_2^I(A)\boxplus S_3^I(A)]\tag{6.11}$$

式中：$\phi(A)$ 是集合 A 的特征非空函数；$S_1^I(A)$、$S_2^I(A)$ 和 $S_3^I(A)$ 分别定义为

$$S_1^I(A)\triangleq\boxed{\sum}_{\substack{X_1,X_2,\cdots,X_k\in D^{\Theta}\\(X_1\cap X_2\cap\cdots\cap X_k)=A}}\ \boxed{\prod}_{i=1,\cdots,k}m_i^I(X_i)\tag{6.12}$$

$$S_2^I(A)\triangleq\boxed{\sum}_{\substack{X_1,X_2,\cdots,X_k\in\varnothing\\ [u=A]\vee[(u\in\varnothing)\wedge(A=I_t)]}}\ \boxed{\prod}_{i=1,\cdots,k}m_i^I(X_i)\tag{6.13}$$

$$S_3^I(A)\triangleq\boxed{\sum}_{\substack{X_1,X_2,\cdots,X_k\in D^{\Theta}\\(X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_k)=A\\(X_1\cap X_2\cap\cdots\cap X_k)=\varnothing}}\ \boxed{\prod}_{i=1,\cdots,k}m_i^I(X_i)\tag{6.14}$$

当所有的集合都退化为点（数值）的情形出现时，集合的运算也就变成了正常的数值间的运算，因此，集合运算是数值运算的推广。

6.5.2 一些引理和一条定理

引理 2: 设数值 a, $b \geqslant 0$,区间 $I_1, I_2 \subseteq [0,1]$,且 $a \in I_1, b \in I_2$,那么显然有 $(a+b) \in I_1 \boxplus I_2$,$(a \cdot b) \in I_1 \boxdot I_2$。

因为在组合不精确信息的 DSm 规则中,我们仅利用了集合的加法和减法,根据此引理,如果从每个信度质量集合上随机地取一个点,然后利用数值上的 DSm 规则对它们进行组合,那么所得到的结果肯定也属于利用集合上的 DSm 规则对信度质量集合的融合结果。

引理 3: 设 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n\}$ 且存在 $K \geqslant 2$ 个独立的信息源,$d=\dim(D^\Theta)$。通过在 DSmT 下对不完全信息进行组合,也会得到不完全信息。

证明: 假设对于所有的 $1 \leqslant j \leqslant K$,信息源在 D^Θ 上的信度质量都用信度质量向量 $\boldsymbol{m}_j=[m_{j_1},m_{j_2},\cdots,m_{j_d}]$ 来代替,并且 $0 \leqslant \sum_{r=1}^{d} m_{j_r} < 1$,那么根据 DSm 的网络体系结构,无论采用哪一种 DSm 规则(经典的或混合的),所得到的信度质量的和都具有如下形式:

$$\prod_{j=1}^{K}(m_{j_1}+m_{j_2}+\cdots+m_{j_d}) < \underbrace{(1\times 1\times\cdots\times 1)}_{K\text{次}} = 1 \qquad (6.15)$$

引理 4: 通过对冗余信息进行组合,会得到冗余的信息结果。

证明: 利用相同的符号和同样的推理过程,可以得到对于所有的 $1 \leqslant j \leqslant k$,$m_j=[m_{j_1},m_{j_2},\cdots,m_{j_d}]$,且 $\sum_{r=1}^{d} m_{j_r} > 1$,有

$$\prod_{j=1}^{K}(m_{j_1}+m_{j_2}+\cdots+m_{j_d}) > \underbrace{(1\times 1\times\cdots\times 1)}_{K\text{次}} = 1$$

引理 5: 将不完全信息(信度质量之和小于 1)与完全信息(信度质量之和等于 1)进行组合,会得到不完全的信息。

引理 6: 将完全信息进行组合,同样会得到完全的信息。

注意:将不完全信息与冗余信息(信度质量之和大于 1)进行组合后会得到任意结果。例如:

- 如果第一个信息源的信度质量之和是 0.99(不完全),第二个信息源的信度质量之和是 1.01(冗余的),则信度质量计算结果的和是 $0.99 \times 1.01 = 0.999$(即是不完全的)。
- 但是如果第一个信息源的信度质量之和是 0.9(不完全的),第二个信息源的信度质量之和是 1.2(冗余的),则信度质量计算结果的和是 $0.9 \times 1.2 = 1.08$(即是冗余的)。

还可以得到:不完全信息与冗余信息的融合会得到完全的信息。例如:$0.8 \times$

$1.25 = 1$。

可接受的条件：一个定义在 D^Θ 上的信度质量是可接受的，也就是说，在每个信度质量集合上都至少存在一个属于区间[0,1]的点，使得它们的和为 1(也即至少有一组所选点包含完全的信息)。

注意：一组完全的数值信息是可接受的。当然，对于一组不完全的或者冗余的数值信息，就不可能存在一个可被接受的条件。这是因为，根据定义，这两种类型信息的信度质量之和不等于 1(也就是不符合完全信息的条件)。

信度质量可接受定理：

设鉴别框架为 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n\}$，这里 $n\geqslant 2$，它的超幂集为 D^Θ 并且 $\dim(D^\Theta)=d$。如果存在 $K\geqslant 2$ 个信息源，它们在 D^Θ 上提供了可接受的不精确信度质量，那么，在应用 DSm 组合规则对这些信息源提供的不精确信度质量融合之后，所得到的信度质量结果也是可接受的。

证明：设 s_j 是一个不精确信息源，其中 $1\leqslant j\leqslant K$，可被接受的不精确信度质量为 $m_j^I=[m_{j_1}^I,m_{j_2}^I,\cdots,m_{j_d}^I]$。这里强调一下，对于 $1<r<d$，所有的 $m_{j_r}^I$ 都是集合(而不是数值)；如果存在一个数值 α，则可以把它看作一个集合$[\alpha,\alpha]$。因为 m_j^I 是可接受的，就存在这样一些点([0,1]上的数值)$m_{j_1}^s\in m_{j_1}^I,m_{j_2}^s\in m_{j_2}^I,\cdots,m_{j_d}^s\in m_{j_d}^I$，使得 $\sum_{r=1}^{d} m_{j_1}^s=1$。这种特性在所有的信息源中都会出现，所以对所有的 $1\leqslant j\leqslant K$ 和 $1\leqslant r\leqslant d$，都存在这样一些点 $m_{j_r}^s$。作为一种特殊的情形，现在运用经典或混合 DSm 规则仅对这些点的信度质量进行融合，那么根据引理并且基于 DSm 网络结构，将得到完全的信息(也就是说，信度质量之和为 1)，也可以参见引理 2。

6.5.3 多区间信度质量的例子

本小节介绍关于多区间信度质量的更具一般性的例子。简单地说，这个例子只是一种特殊的情形，满足可接受条件的点仅发生在各个区间的边界上，更一般和复杂的例子(由于篇幅所限在此就不做介绍了)也可以给出并得到证明。然而这里介绍的却是一个极端的例子，因为我们想包括所有可能发生的不精确或非常不精确信息融合的情形，所以令 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2\}$，存在两个独立的信息源(表 6.9)，它们可被接受的不精确信度赋值如下：

表 6.9　不精确 bba 融合的输入

$A\in D^\Theta$	$m_1^I(A)$	$m_2^I(A)$
θ_1	$[0.1,0.2]\cup\{0.3\}$	$[0.4,0.5]$
θ_2	$(0.4,0.6)\cup[0.7,0.8]$	$[0,0.4]\cup\{0.5,0.6\}$

对集合应用经典 DSm 规则，得到

$$
\begin{aligned}
m^I(\theta_1) &= ([0.1,0.2] \cup \{0.3\}) \boxdot [0.4,0.5] \\
&= ([0.1,0.2] \boxdot [0.4,0.5]) \cup (\{0.3\} \boxdot [0.4,0.5]) \\
&= [0.04,0.10] \cup [0.12,0.15] \\
m^I(\theta_2) &= ((0.4,0.6) \cup [0.7,0.8]) \boxdot ([0,0.4] \cup \{0.5,0.6\}) \\
&= ((0.4,0.6) \boxdot [0,0.4]) \cup ((0.4,0.6) \boxdot \{0.5,0.6\}) \cup \\
&\quad ([0.7,0.8] \boxdot [0,0.4]) \cup ([0.7,0.8] \boxdot \{0.5,0.6\}) \\
&= (0,0.24) \cup (0.20,0.30) \cup (0.24,0.36) \cup [0,0.32] \cup \\
&\quad [0.35,0.40] \cup [0.42,0.48] \\
&= [0,0.40] \cup [0.42,0.48] \\
m^I(\theta_1 \cap \theta_2) &= [([0.1,0.2] \cup \{0.3\}) \boxdot ([0,0.4] \cup \{0.5,0.6\})] \boxplus \\
&\quad [[0.4,0.5] \boxdot ((0.4,0.6) \cup [0.7,0.8])] \\
&= [([0.1,0.2] \boxdot [0,0.4]) \cup ([0.1,0.2] \boxdot \{0.5,0.6\}) \cup \\
&\quad (\{0.3\} \boxdot [0,0.4]) \cup (\{0.3\} \boxdot \{0.5,0.6\})] \\
&\quad \boxplus [([0.4,0.5] \boxdot (0.4,0.6)) \cup ([0.4,0.5] \boxdot [0.7,0.8])] \\
&= [[0,0.08] \cup [0.05,0.10] \cup [0.06,0.12] \cup [0,0.12] \cup \\
&\quad \{0.15,0.18\}] \boxplus [(0.16,0.30) \cup [0.28,0.40]] \\
&= [[0,0.12] \cup \{0.15,0.18\}] \boxplus (0.16,0.40] \\
&= (0.16,0.52] \cup (0.31,0.55] \cup (0.34,0.58] \\
&= (0.16,0.58]
\end{aligned}
$$

最终可接受的融合结果见表 6.10。

若发现 $\theta_1 \cap \theta_2 \overset{\mathcal{M}}{\equiv} \varnothing$（这就是要处理的混合模型 $\mathcal{M}$），则对集合应用混合 DSm 规则(6.11)可得 $m^I_{\mathcal{M}}(\theta_1 \cap \theta_2)=0$ 以及 $m^I_{\mathcal{M}}(\theta_1 \cup \theta_2)=(0.16,0.58]$，其他的不精确信度值保持不变。换句话说，对不精确信度应用混合 DSm 规则就可以得到表 6.11 中的结果。

表 6.10　应用经典 DSm 规则的融合结果

$A \in D^\Theta$	$m^I(A)=[m_1^I \oplus m_2^I](A)$
θ_1	$[0.04,0.10] \cup [0.12,0.15]$
θ_2	$[0,0.40] \cup [0.42,0.48]$
$\theta_1 \cap \theta_2$	$(0.16,0.58]$
$\theta_1 \cup \theta_2$	0

表 6.11　对模型 $\mathcal{M}$ 应用混合 DSm 规则的融合结果

$A \in D^\Theta$	$m^I_{\mathcal{M}}(A)=[m_1^I \oplus m_2^I](A)$
θ_1	$[0.04,0.10] \cup [0.12,0.15]$
θ_2	$[0,0.40] \cup [0.42,0.48]$
$\theta_1 \cap \theta_2 \overset{\mathcal{M}}{\equiv} \varnothing$	0
$\theta_1 \cup \theta_2$	$(0.16,0.58]$

现在来检查一下可接受条件和可接受定理。对信息源 1 而言，存在精确的信度质量 $(m_1(\theta_1)=0.3) \in ([0.1,0.2] \cup \{0.3\})$ 以及 $(m_1(\theta_2)=0.7) \in ((0.4,0.6) \cup$

[0.7,0.8])使得 0.3+ 0.7=1。对于信息源 2,存在精确的信度质量($m_1(\theta_1)=0.4$)∈([0.4,0.5])和($m_2(\theta_2)=0.6$)∈([0,0.4]∪{0.5,0.6})使得 0.4 + 0.6 = 1。因此,关于 $m_1^I(\cdot)$和 $m_2^I(\cdot)$的两个信息源都是可被接受的不精确信息源。

可以很容易得出,对 $m_1^I(\cdot)$和 $m_2^I(\cdot)$应用经典 DSm 规则进行融合,产生了冲突的基本信度赋值 $m(\theta_1)=[m_1\oplus m_2](\theta_1)=0.12$,$m(\theta_2)=[m_1\oplus m_2](\theta_2)=0.42$ 和 $m(\theta_1\cap\theta_2)=[m_1\oplus m_2](\theta_1\cap\theta_2)=0.46$,可以看出这是满足可接受理论的,这是因为存在($m(\theta_1)=0.12$)∈($m^I(\theta_1)=[0.04,0.10]\cup[0.12,0.15]$),($m(\theta_2)=0.42$)∈($m^I(\theta_2)=[0,0.40]\cup[0.42,0.48]$)使得 0.12 + 0.42 + 0.46=1。与此相类似,若发现 $\theta_1\cap\theta_2=\varnothing$,则应用混合 DSm 规则将得到 $m(\theta_1\cap\theta_2)=0$ 以及 $m(\theta_1\cup\theta_2)=0.46$,其他的值保持不变,可接受理论依然成立。

6.6 结论

本章基于 DSmT 框架提出了一种新的组合不精确、不确定和可能相互矛盾的信息源的方法,它涵盖了更广类型的融合问题。在大多数实际的和真正的融合问题中,很少能够出现确切地知道某一信息的情形,对于所考虑问题的超幂集中的每个元素,它们可被接受的信度赋值如果被赋予在子单位区间(或者子单位集合)上,而不是一个单纯的简单数值,那么反而会更合理。正是上面的事实激发了我们完成本文。本章是对以前有价值工作(主要是仅局限在 TBM 框架下的 IBS)的一个推广。我们发现,直接利用本文定义的集合算子应用 DSm 规则(经典的或混合的)对区间值的信度赋值进行融合是可行的。本章给出的一些例子说明了这种新方法的应用。该方法也可以对不完全和冗余的不精确、不确定以及冲突的信息源进行组合。我们还将该方法(虽然这里只是集中在对不精确基本信度赋值的推导上)毫不困难地推广到对不精确信度函数与不精确似真函数的推导上,以及不精确 Pignistic 概率的推导上,后者是基于第 7 章介绍的广义 Pignistic 变换。本文工作可将 DSmT 应用于一类更广泛的融合问题。

参 考 文 献

[1] Denoeux T, *Reasoning with imprecise belief structures*, Technical Report Heudiasys 97/44, available at http://www.hds. utc. fr/~tdenoeux/.

[2] Denoeux T, *Reasoning with imprecise belief structures*, International Journal of Approximate Reasoning, 20, pp. 79-111,1999.

[3] Hayes B., *A lucid interval*, American Scientist, Vol. 91, No. 6,Nov. -Dec. 2003,pp. 484-488.

[4] Jaulin E., Kieffer M., Didrit O., Walter E., *Applied Interval Analysis*, Springer Verlag, 384 pages, Dec. 2001.

[5] Lamata M., Moral S., *Calculus with linguistic probabilities and beliefs*, In R. R. Yager, M. Fedrizzi, and J. Kacprzyk, editors, Advances in Dempster-Shafer Theory of Evidence, pp. 133-152, Wiley.

[6] Moore R. E., *Interval Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1966.

[7] Moore R. E., *Methods and Applications of Interval Analysis*, Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1979.

[8] Neumaier A., *Interval Methods for Systems of Equations*, Cambridge University Press. Cambridge, 1990.

[9] Shafer G., *A Mathematical Theory of Evidence*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1976.

[10] SIGLA/X Group, *Modal Interval Analysis: An Introduction*, http://ima.udg.es/SIGLA/X/mod_interval/.

[11] Smarandache F. (Editor), *Proceedings of the First International Conference on Neutrosophics*, Univ. of New Mexico, Gallup Campus, NM, USA, 1-3 Dec. 2001, Xiquan, Phoenix, 2002.

[12] Smets Ph., Kennes R., *The Tranferable Belief Model*, Artificial Intelligence, 66, pp. 191-243, 1994.

[13] Smets Ph., *Data Fusion in the Transferable Belief Model*, Proc. of Third Int. Conf. on Information Fusion, Fusion 2000, Paris, July 2000.

第 7 章　广义 Pignistic 变换

Jean Dezert
ONERA
29 Av. de la Division Leclerc
92320 Châtillon, France

Florentin Smarandache
Department of Mathematics
University of New Mexico
Gallup, NM 8730, U. S. A

Milan Daniel①
Institute of Computer Science
Academy of Sciences of the Czech Republic
Pod vodárenskou věži2, CZ—182 07 Prague 8
Czech Republic

摘要: 本章介绍在 DSmT 框架下发展的一种广义 Pignistic 变换(GPT),来作为 Pignistic 层的系统决策工具。GPT 允许根据由任何证据源提供的广义基本信度赋值来构建一种非常简便易行的主观概率测度方法。我们仅重点介绍三维情形,并最终给出通过 GPT 获得的所有结果,该结果得到概率论的支持。

7.1　DSm 势的简介

在定义广义 Pignistic 变换(GPT)的过程中用到的一个非常重要的概念就是 DSm 势,它在本书第 3 章(3.2.2 节)以及文献[1]均有介绍。我们用 $C_{\mathcal{M}}(A)$ 表示任意命题 $A \in D^{\Theta}$ 的 DSm 势,它相当于所考虑模糊/含糊命题(模型 $\mathcal{M}$)的维恩图中组成 A 部分的个数。这里的模型(在必要的情况下)应将完全约束的情况考虑进去,也就是根据命题 θ_i 的本质得出的所有可能的交叉情况。这个内在的势取决于模型 $\mathcal{M}$(自由、混合或 Shafer 模型),而这个包含集合 A 的模型 $\mathcal{M}$ 不仅取决于维恩图的维数 $n=|\Theta|$,还取决于维恩图中非空交集的数目。也就是说,DSm 势由集合

① 本章内容出自文献[3],已得到国际信息学会的许可。Milan Daniel 感谢 COST action 274 TARSKI 对本研究工作的支持。

$\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n\}$的势与超幂集 D^Θ 的模型(Θ 中各个命题间交集的数目,总而言之就是结构)共同得出。每个命题 θ_i 并不是必然都具有相同的 DSm 势,因为每个命题都具有不同的结构,如果这种结构是最简单的那种形式(这个命题与其他命题没有交集),那么 $\mathscr{C}_{\mathscr{M}}(\theta_i)=1$;如果结构很复杂(命题间有很多交集),那么 $\mathscr{C}_{\mathscr{M}}(\theta_i)>1$。我们令某一命题为 θ_i:若它与其他命题仅含有一个交集,则 $\mathscr{C}_{\mathscr{M}}(\theta_i)=2$;若仅含有两个交集,则 $\mathscr{C}_{\mathscr{M}}(\theta_i)$根据模型 $\mathscr{M}$ 的具体情况等于 3 或 4 ;若含有 m 个交集,则根据模型,DSm 势在 $m+1$ 与 2^m 之间;DSm 势的最大值是 2^{n-1},发生在自由模型 $\mathscr{M}^f$ 的集合 $\theta_1\cup\theta_2\cup\cdots\cup\theta_n$ 上。与此类似,对于 D^Θ 上的任何集合,结构越复杂,其 DSm 势越大。因而,DSm 势可以作为 D^Θ 中命题复杂度的一种度量单位,这是一个非常好的特性。命题 θ_i 不仅依赖于$|\Theta|$,还依赖于它的结构(也就是有多少个其他命题与 θ_i 相交)。第 3 章已经介绍了关于 DSm 势的一些简单事例,可以得出 $1\leqslant\mathscr{C}_{\mathscr{M}}(A)\leqslant 2^n-1$。这里不能将 $\mathscr{C}_{\mathscr{M}}(A)$与一个给定集合 A 的经典势$|A|$(也就是它所含有的不同命题的个数)相混淆——这就是我们在这里介绍这个新的概念的原因。

文献[1]已经介绍了,$\mathscr{C}_{\mathscr{M}}(A)$与命题 A 在基 $\boldsymbol{u}_n$ 下的矩阵 $\boldsymbol{D}_n$ 中对应行的命题之和完全相等(参见第 2 章)。事实上,可以很容易地通过第 2 章以及文献[2]中给出的 D^Θ 的生成法则,将 $\mathscr{C}_{\mathscr{M}}(A)$通过程序计算出来。

如果对系统强加一个约束使得 D^Θ 中的集合 B 为空集(也就是说,选择一个混合 DSm 模型),那么必须要去掉组成集合 B 的部分在 D^Θ 中所对应的列,以及集合 B 和它在 D^Θ 中的所有子集所对应的行,这样便得到了表示新模型 $\mathscr{M}'$的一个新矩阵 $\boldsymbol{D}'_n$。在基向量 $\boldsymbol{u}_n$ 上,同样要去掉组成集合 B 的部分,最后得到新基的维数为 $2^n-1-C_{\mathscr{M}}(B)$。

7.2 经典 Pignistic 变换(CPT)

这里援引 Smets 的观点[8],假设信度存在于两个不同的层面上——信度层和 Pignistic 层,对于前者直接进行考虑信度值,对于后者,通过 Pignistic 变换将信度函数转化为概率函数用来进行系统的决策。Philippe Smets 提出的“Pignistic”术语是源于拉丁文“pignus”(赌博),通常用在两个层次上量化信度值的概率函数。在这里,当真的有必要进行决策时它仅用于量化不确定性,否则,就可以像 Philippe Smets 那样不用信度函数代替信度值了。为了进行合理的决策,我们提出一种通过广义 Pignistic 变换(GPT)将广义信度值转化为 Pignistic 概率函数的方法,后面将会对其进行详细介绍。首先来介绍一下经典 Pignistic 变换(CPT),它是在 DST 的基础上进行的,而后在 DSmT 的框架下对其进行扩展,得到 GPT。

当系统必须要作出决策时,我们利用期望效用理论,根据基本信度赋值 $m(\cdot)$

来构造一个概率函数 $P\{\cdot\}$[8]。它是通过经典 Pignistic 变换来实现的。在开放世界的假设下，利用文献[8]中介绍的可传递信仰模型（TBM），Philippe Smets 根据非归一化的基本信度赋值 $m(\cdot)$（也就是说，这种情况下 $m(\varnothing)\geqslant 0$）推导了 Pignistic 概率函数，即[8]

$$P\{A\}=\sum_{X\subseteq\Theta}\frac{|X\cap A|}{|X|}\frac{m(X)}{1-m(\varnothing)} \tag{7.1}$$

式中：$|A|$表示集合 A 的势（这里规定$|\varnothing|/|\varnothing|=1$ 来定义 $P\{\varnothing\}$），$P\{A\}$对应于 Smets 符号系统[8]中的 Bet$P\{A\}$。通过计算行动的期望效用值来作出决策，而这个期望值是通过利用主观的/Pignistic $P\{\cdot\}$作为概率函数来获得的。通常情况下，将 Pignistic 概率的最大值作为决策的标准。$P\{\cdot\}$ 的最大值通常处于两个值（最大似然值和最大信度值，它们一个表现得相对乐观，一个相对悲观）之间，通常作为一种谨慎的决策标准。可以很容易地验证 $P\{\cdot\}$的确是一个概率函数（参见文献[7]）。

这里有必要指出，当信度质量 $m(\cdot)$是由两个独立证据源组合形成（也就是 $m(\cdot)=[m_1\oplus m_2](\cdot)$）的时候，在 Pignistic 层利用 Dempster 规则或者 Smets 规则（在 TBM 模型开放世界的假设下，$m(\varnothing)>0$）得到的经典 Pignistic 概率 $P\{\cdot\}$ 保持不变。因而，虽然在利用 Dempster 规则处理高度冲突的问题（参见第 5 章）时，可以通过根据 TBM 模型转化到信度层中进行解决，但是核心问题仍然工作于 Pignistic 层。只是在利用 TBM 模型时，问题由信度层转化到 Pignistic 层。TBM 模型并不能帮助提高基于 Dempster 组合规则的决策能力，因为它们的 Pignistic 概率是严格等价的。换句话说，当冲突因子 $m(\varnothing)$非常大时，其组合结果就会出错或者至少是存在疑问或非直观的，那么基于 Pignistic 概率进行的决策也不可避免地会出现错误或受到质疑。

根据前面的论述，从现在开始，我们更愿意采用 Shafer 关于基本信度赋值的经典定义：$m(\cdot):2^{\Theta}\to[0,1]$，并令 $m(\varnothing)=0$，$\sum_{X\in 2^{\Theta}}m(X)=1$。因此我们得出下面的经典 Pignistic 变换（CPT）形式：

$$P\{A\}=\sum_{X\in 2^{\Theta}}\frac{|X\cap A|}{|X|}m(X) \tag{7.2}$$

7.3 广义 Pignistic 变换(GPT)

7.3.1 定义

为了在 DSmT 框架下对系统进行合理的决策，必须对经典的 Pignistic 变换进

行扩展,来构建一个合适的 Pignistic 概率函数。它建立在通过 DSm 组合规则(经典的或混合的,参见第 1 章)得到的任意广义基本信度赋值 $m(\cdot)$的基础之上。这里对 CPT 进行一种最简单直接的扩展,得到一种广义 Pignistic 变换如下:

$$\forall A \in D^{\Theta}, \quad P\{A\} = \sum_{X \in D^{\Theta}} \frac{\mathscr{C}_{\mathscr{M}}(X \cap A)}{\mathscr{C}_{\mathscr{M}}(X)} m(X) \tag{7.3}$$

式中:$\mathscr{C}_{\mathscr{M}}(X)$表示所考虑问题的 DSm 模型 $\mathscr{M}$下命题 X 的 DSm 势。

问题的决策通常是通过计算 Pignistic 概率函数 $P\{\cdot\}$的最大值来进行的。现在来比较一下这两个 Pignistic 变换式——式(7.2)和式(7.3),可以看出当采用 Shafer 模型时,超幂集 D^{Θ} 退化为经典的幂集 2^{Θ},此时式(7.3)变成了式(7.2)。但是式(7.3)是式(7.2)的广义化,因为前者可用于计算任何模型(包括 Shafer 模型)下的 Pignistic 概率。

7.3.2 $P\{\cdot\}$是一个概率测度

由 GPT 得出的 $P\{\cdot\}$被证明确实是一个(主观的/Pignistic)概率函数,这一点非常重要。它可以通过判断是否符合下面概率论中的公理[4,5]而得到。

- 公理 1(非负性):任何事件 A 的(广义 Pignistic)概率都以 0 与 1 为边界,即 $0 \leqslant P\{A\} \leqslant 1$。
- 公理 2(规范性):任何必然事件(样本空间)都具有一致的(广义 Pignistic)概率 $P\{S\}=1$。
- 公理 3(互斥事件的可加性):如果事件 A 和 B 是不相交的(也就是 $A \cap B = \varnothing$),那么 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$。

公理 1 是合适的,因为根据广义基本信度赋值 $m(\cdot)$的定义,有 $\forall \alpha_i \in D^{\Theta}, 0 \leqslant m(\alpha_i) \leqslant 1, \sum_{\alpha_i \in D^{\Theta}} m(\alpha_i) = 1$。又因为它们在 GPT 中的系数都介于 0 和 1 之间,所以可以直接得出它们的 Pignistic 概率也都介于 0 和 1 之间。

公理 2 是合适的,对于必然事件 $S \triangleq \theta_1 \cup \theta_2 \cup \cdots \cup \theta_n$,它在式中的所有系数都等于 1,因为 $\mathscr{C}_{\mathscr{M}}(X \cap S)/\mathscr{C}_{\mathscr{M}}(X) = \mathscr{C}_{\mathscr{M}}(X)/\mathscr{C}_{\mathscr{M}}(X) = 1$,所以 $P\{S\} \equiv \sum_{\alpha_i \in D^{\Theta}} m(\alpha_i) = 1$。

公理 3 也是合适的。事实上,根据 GPT 的定义,可得

$$P\{A \cup B\} = \sum_{X \in D^{\Theta}} \frac{\mathscr{C}_{\mathscr{M}}(X \cap (A \cup B))}{\mathscr{C}_{\mathscr{M}}(X)} m(X) \tag{7.4}$$

如果令 A 和 B 是相互排斥的(即 $A \cap B = \varnothing$),则

$$\mathscr{C}_{\mathscr{M}}(X \cap (A \cup B)) = \mathscr{C}_{\mathscr{M}}((X \cap A) \cup (X \cap B)) = \mathscr{C}_{\mathscr{M}}(X \cap A) + \mathscr{C}_{\mathscr{M}}(X \cap B)$$

在式(7.4)中将 $\mathscr{C}_{\mathscr{M}}(X \cap (A \cup B))$用 $\mathscr{C}_{\mathscr{M}}(X \cap A) + \mathscr{C}_{\mathscr{M}}(X \cap B)$代替,可以得到

$$P\{A \cup B\} = \sum_{X \in D^{\Theta}} \frac{\mathscr{C}_{\mathscr{M}}(X \cap A) + \mathscr{C}_{\mathscr{M}}(X \cap B)}{\mathscr{C}_{\mathscr{M}}(X)} m(X)$$

$$= \sum_{X \in D^{\Theta}} \frac{\mathscr{C}_{\mathscr{M}}(X \cap A)}{\mathscr{C}_{\mathscr{M}}(X)} m(X) + \sum_{X \in D^{\Theta}} \frac{\mathscr{C}_{\mathscr{M}}(X \cap B)}{\mathscr{C}_{\mathscr{M}}(X)} m(X)$$
$$= P\{A\} + P\{B\}$$

这样就完成了整个证明过程。根据式(7.3)中的系数$\frac{\mathscr{C}_{\mathscr{M}}(X \cap A)}{\mathscr{C}_{\mathscr{M}}(X)}$,也可以很容易地验证 $A \subset B \Rightarrow P\{A\} \leqslant P\{B\}$。也容易证明 Poincaré 等式:$P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{A \cap B\}$,是因为 $\mathscr{C}_{\mathscr{M}}(X \cap (A \cup B)) = \mathscr{C}_{\mathscr{M}}((X \cap A) \cup (X \cap B)) = \mathscr{C}_{\mathscr{M}}(X \cap A) + \mathscr{C}_{\mathscr{M}}(X \cap B) - \mathscr{C}_{\mathscr{M}}(X \cap (A \cap B))$(必须要减去一个 $\mathscr{C}_{\mathscr{M}}(X \cap (A \cap B))$,也就是维恩图中 $X \cap (A \cap B)$ 所含部分的个数,这是因为事实上这个数字被加了两次:一次在 $\mathscr{C}_{\mathscr{M}}(X \cap A)$ 中,一次在 $\mathscr{C}_{\mathscr{M}}(X \cap B)$ 中)。

7.4 GPT 的一些例子

7.4.1 二维情形的例子

1. 采用自由 DSm 模型

令 $\Theta = \{\theta_1, \theta_2\}$ 以及超幂集 $D^{\Theta} = \{\varnothing, \theta_1 \cap \theta_2, \theta_1, \theta_2, \theta_1 \cup \theta_2\}$ 上的广义基本信度赋值函数为 $m(\cdot)$,这样可以很容易地构造出 Pignistic 概率 $P\{\cdot\}$。根据式(7.3)中 GPT 的定义可以得到

$$P\{\varnothing\} = 0$$
$$P\{\theta_1\} = m(\theta_1) + \frac{1}{2}m(\theta_2) + m(\theta_1 \cap \theta_2) + \frac{2}{3}m(\theta_1 \cup \theta_2)$$
$$P\{\theta_2\} = m(\theta_2) + \frac{1}{2}m(\theta_1) + m(\theta_1 \cap \theta_2) + \frac{2}{3}m(\theta_1 \cup \theta_2)$$
$$P(\theta_1 \cap \theta_2) = \frac{1}{2}m(\theta_2) + \frac{1}{2}m(\theta_1) + m(\theta_1 \cap \theta_2) + \frac{1}{3}m(\theta_1 \cup \theta_2)$$
$$P\{\theta_1 \cup \theta_2\} = P\{\Theta\} = m(\theta_1) + m(\theta_2) + m(\theta_1 \cap \theta_2) + m(\theta_1 \cup \theta_2) = 1$$

容易证明 $0 \leqslant P\{\cdot\} \leqslant 1$ 且 $P\{\theta_1 \cup \theta_2\} = P\{\theta_1\} + P\{\theta_2\} - P\{\theta_1 \cap \theta_2\}$。

2. 采用 Shafer 模型

如果采用 Shafer 模型(假设 $\theta_1 \cap \theta_2 \overset{\mathscr{M}^0}{\equiv} \varnothing$),那么当应用混合 DSm 组合规则后,在基本信度函数上只有 θ_1、θ_2 和 $\theta_1 \cup \theta_2$ 具有非空的信度质量。则利用 GPT 可以得到

$$P\{\varnothing\} = 0$$
$$P\{\theta_1 \cap \theta_2\} = 0$$

$$P\{\theta_1\} = m(\theta_1) + \frac{1}{2}m(\theta_1 \cup \theta_2)$$

$$P\{\theta_2\} = m(\theta_2) + \frac{1}{2}m(\theta_1 \cup \theta_2)$$

$$P\{\theta_1 \cup \theta_2\} = m(\theta_1) + m(\theta_2) + m(\theta_1 \cup \theta_2) = 1$$

这正好与根据经典 Pignistic 变换式(7.2)得到的 Pignistic 概率是相对应的。

7.4.2 三维情形的例子

1. 采用自由 DSm 模型(见表 7.1)

令 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}$，它的超幂集是 $D^\Theta=\{\alpha_0,\cdots,\alpha_{18}\}$，其中 $\alpha_i(i=0,\cdots,18)$对应于第 3 章表 3.1 中的命题，超幂集上的广义基本信度赋值定义为 $m(\cdot)$。根据 GPT 式(7.3)可以计算出所有的广义 Pignistic 概率 $P\{\alpha_i\}(i=0,\cdots,18)$(这里定义 $P\{\varnothing\}=0$)，详细的计算过程参见附录中的六个表格。

表 7.1 系数 $\frac{\mathscr{C}_\mathscr{M}(X\cap\alpha_6)}{\mathscr{C}_\mathscr{M}(X)}$ 和 $\frac{\mathscr{C}_\mathscr{M}(X\cap\alpha_{10})}{\mathscr{C}_\mathscr{M}(X)}$

X	$\frac{\mathscr{C}_\mathscr{M}(X\cap\alpha_6)}{\mathscr{C}_\mathscr{M}(X)}$	$\leqslant$	$\frac{\mathscr{C}_\mathscr{M}(X\cap\alpha_{10})}{\mathscr{C}_\mathscr{M}(X)}$	X	$\frac{\mathscr{C}_\mathscr{M}(X\cap\alpha_6)}{\mathscr{C}_\mathscr{M}(X)}$	$\leqslant$	$\frac{\mathscr{C}_\mathscr{M}(X\cap\alpha_{10})}{\mathscr{C}_\mathscr{M}(X)}$
α_1	1	$\leqslant$	1	α_{10}	(3/4)	$\leqslant$	1
α_2	1	$\leqslant$	1	α_{11}	(2/4)	$\leqslant$	(2/4)
α_3	(1/2)	$\leqslant$	(1/2)	α_{12}	(3/5)	$\leqslant$	(3/5)
α_4	1	$\leqslant$	1	α_{13}	(3/5)	$\leqslant$	(4/5)
α_5	(2/3)	$\leqslant$	(2/3)	α_{14}	(3/5)	$\leqslant$	(3/5)
α_6	1	$\leqslant$	1	α_{15}	(3/6)	$\leqslant$	(4/6)
α_7	(2/3)	$\leqslant$	(2/3)	α_{16}	(3/6)	$\leqslant$	(3/6)
α_8	(3/4)	$\leqslant$	(3/4)	α_{17}	(3/6)	$\leqslant$	(4/6)
α_9	(2/4)	$\leqslant$	(2/4)	α_{18}	(3/7)	$\leqslant$	(4/7)

注意到 $P\{\alpha_{18}\}=1$，这是因为$(\theta_1\cup\theta_2\cup\theta_3)$相当于主观概率空间中的必然事件，而基于 D^Θ 上定义的广义基本信度赋值 $m(\cdot)$，有 $\sum_{\alpha_i\in D^\Theta} m(\alpha_i) = 1$。

这个例子还可以验证(虽然过程很繁琐)下面的 Poincaré 等式

$$P\{A_1 \cup \cdots \cup A_n\} = \sum_{\substack{I\subset\{1,\cdots,n\} \\ I\neq\varnothing}} (-1)^{|I|+1} P\{\bigcap_{i\in I} A_i\} \tag{7.5}$$

同样可以很容易地验证 $\forall A\subset B\Rightarrow P\{A\}\leqslant P\{B\}$。这里给出一个例子，对于

$\alpha_6 \triangleq (\theta_1 \cup \theta_3) \cap \theta_2 \subset \alpha_{10} \triangleq \theta_2$，根据 $P\{\alpha_6\}$ 和 $P\{\alpha_{10}\}$ 在附录中的表达式，可以直接计算出 $P\{\alpha_6\} \leqslant P\{\alpha_{10}\}$，因为由表 7.1 可知下式完全成立：

$$\forall X \in D^{\Theta}, \frac{\mathscr{C}_{\mathscr{M}}(X \cap \alpha_6)}{\mathscr{C}_{\mathscr{M}}(X)} \leqslant \frac{\mathscr{C}_{\mathscr{M}}(X \cap \alpha_{10})}{\mathscr{C}_{\mathscr{M}}(X)} \tag{7.6}$$

2. 一个给定的混合 DSm 模型的例子

现在来考虑一种混合 DSm 模型 $\mathscr{M} \neq \mathscr{M}^f$，假设除了 $\theta_1 \cap \theta_2$ 之外所有可能的交集都是空集，这相当于第 3 章的第二个维恩图，如图 3.2 所示。在这种情况下超幂集中的命题减少为 9 个，具体参见第 3 章表 3.2 中的 $\{\alpha_0, \cdots, \alpha_8\}$。将 GPT 式(7.3)应用在此混合 DSm 模型上，即得到表 7.2 和表 7.3 给出的 Pignistic 概率 $P\{\alpha_i\}(i=0,\cdots,8)$ 的详细计算过程。

表 7.2　$P\{\alpha_1 \triangleq \theta_1 \cap \theta_2\}$、$P\{\alpha_1 \triangleq \theta_2\}$、$P\{\alpha_3 \triangleq \theta_1\}$ 和 $P\{\alpha_4 \triangleq \theta_2\}$ 的计算过程

$P\{\alpha_1\}=$	$P\{\alpha_2\}=$	$P(\alpha_3)=$	$P\{\alpha_4\}=$
$(1/1)m(\alpha_1)$	$(0/1)m(\alpha_1)$	$(1/1)m(\alpha_1)$	$(1/1)m(\alpha_1)$
$+(0/1)m(\alpha_2)$	$+(1/1)m(\alpha_2)$	$+(0/2)m(\alpha_2)$	$+(0/1)m(\alpha_2)$
$+(1/2)m(\alpha_3)$	$+(0/2)m(\alpha_3)$	$+(2/2)m(\alpha_3)$	$+(1/2)m(\alpha_3)$
$+(1/2)m(\alpha_4)$	$+(0/2)m(\alpha_4)$	$+(1/2)m(\alpha_4)$	$+(2/2)m(\alpha_4)$
$+(1/3)m(\alpha_5)$	$+(0/3)m(\alpha_5)$	$+(2/3)m(\alpha_5)$	$+(2/3)m(\alpha_5)$
$+(1/3)m(\alpha_6)$	$+(1/3)m(\alpha_6)$	$+(2/3)m(\alpha_6)$	$+(1/3)m(\alpha_6)$
$+(1/3)m(\alpha_7)$	$+(1/3)m(\alpha_7)$	$+(1/3)m(\alpha_7)$	$+(2/3)m(\alpha_7)$
$+(1/4)m(\alpha_8)$	$+(1/4)m(\alpha_8)$	$+(2/4)m(\alpha_8)$	$+(2/4)m(\alpha_8)$

表 7.3　$P\{\alpha_5 \triangleq \theta_1 \cup \theta_2\}$、$P\{\alpha_6 \triangleq \theta_1 \cup \theta_3\}$、$P\{\alpha_7 \triangleq \theta_2 \cup \theta_3\}$ 和 $P\{\alpha_8 \triangleq \theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3\}$ 的计算过程

$P\{\alpha_5\}=$	$P\{\alpha_6\}=$	$P(\alpha_7)=$	$P\{\alpha_8\}=$
$(1/1)m(\alpha_1)$	$(1/1)m(\alpha_1)$	$(1/1)m(\alpha_1)$	$(1/1)m(\alpha_1)$
$+(0/1)m(\alpha_2)$	$+(1/1)m(\alpha_2)$	$+(2/2)m(\alpha_2)$	$+(2/2)m(\alpha_2)$
$+(2/2)m(\alpha_3)$	$+(2/2)m(\alpha_3)$	$+(1/2)m(\alpha_3)$	$+(2/2)m(\alpha_3)$
$+(2/2)m(\alpha_4)$	$+(1/2)m(\alpha_4)$	$+(2/2)m(\alpha_4)$	$+(2/2)m(\alpha_4)$
$+(3/3)m(\alpha_5)$	$+(2/3)m(\alpha_5)$	$+(2/3)m(\alpha_5)$	$+(3/3)m(\alpha_5)$
$+(2/3)m(\alpha_6)$	$+(3/3)m(\alpha_6)$	$+(2/3)m(\alpha_6)$	$+(3/3)m(\alpha_6)$
$+(2/3)m(\alpha_7)$	$+(2/3)m(\alpha_7)$	$+(3/3)m(\alpha_7)$	$+(3/3)m(\alpha_7)$
$+(3/4)m(\alpha_8)$	$+(3/4)m(\alpha_8)$	$+(3/4)m(\alpha_8)$	$+(4/4)m(\alpha_8)$

3. 采用 Shafer 模型的例子

对于 Shafer 模型 $\mathcal{M}^0 \neq \mathcal{M}^f$，假设所有可能的交集都是空集，这相当于第 3 章的第三个维恩图。在这种情况下超幂集 D^Θ 退化为经典幂集 2^Θ，包括八个命题，参见第 3 章表 3.3 中的$\{\alpha_0,\cdots,\alpha_7\}$。根据 GPT 式(7.3)便可得到 Pignistic 概率 $P\{\alpha_i\}$ $(i=0,\cdots,7)$，在这种特定情形下，它得到的结果与通过经典 Pignistic 变换式(7.2)得到的结果完全一致。相应的计算结果见表 7.4 和表 7.5。

表 7.4　$P\{\alpha_1 \triangleq \theta_1\}$、$P\{\alpha_2 \triangleq \theta_2\}$和 $P\{\alpha_3 \triangleq \theta_3\}$的计算过程

$P\{\alpha_1\}=$	$P\{\alpha_2\}=$	$P(\alpha_3)=$
$(1/1)m(\alpha_1)$	$(0/1)m(\alpha_1)$	$(0/1)m(\alpha_1)$
$+(0/1)m(\alpha_2)$	$+(1/1)m(\alpha_2)$	$+(0/1)m(\alpha_2)$
$+(0/1)m(\alpha_3)$	$+(0/1)m(\alpha_3)$	$+(1/1)m(\alpha_3)$
$+(1/2)m(\alpha_4)$	$+(1/2)m(\alpha_4)$	$+(0/2)m(\alpha_4)$
$+(1/2)m(\alpha_5)$	$+(0/2)m(\alpha_5)$	$+(1/2)m(\alpha_5)$
$+(0/2)m(\alpha_6)$	$+(1/2)m(\alpha_6)$	$+(1/2)m(\alpha_6)$
$+(1/3)m(\alpha_7)$	$+(1/3)m(\alpha_7)$	$+(1/3)m(\alpha_7)$

表 7.5　$P\{\alpha_4 \triangleq \theta_1 \cup \theta_2\}$、$P\{\alpha_5 \triangleq \theta_1 \cup \theta_3\}$、$P\{\alpha_6 \triangleq \theta_2 \cup \theta_3\}$和 $P\{\alpha_7 \triangleq \theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3\}=1$ 的计算过程

$P\{\alpha_4\}=$	$P\{\alpha_5\}=$	$P(\alpha_6)=$	$P\{\alpha_7\}=$
$(1/1)m(\alpha_1)$	$(1/1)m(\alpha_1)$	$(0/1)m(\alpha_1)$	$(1/1)m(\alpha_1)$
$+(1/1)m(\alpha_2)$	$+(0/1)m(\alpha_2)$	$+(1/1)m(\alpha_2)$	$+(1/1)m(\alpha_2)$
$+(0/1)m(\alpha_3)$	$+(1/1)m(\alpha_3)$	$+(1/1)m(\alpha_3)$	$+(1/1)m(\alpha_3)$
$+(2/2)m(\alpha_4)$	$+(1/2)m(\alpha_4)$	$+(1/2)m(\alpha_4)$	$+(2/2)m(\alpha_4)$
$+(1/2)m(\alpha_5)$	$+(2/2)m(\alpha_5)$	$+(1/2)m(\alpha_5)$	$+(2/2)m(\alpha_5)$
$+(1/2)m(\alpha_6)$	$+(1/2)m(\alpha_6)$	$+(2/3)m(\alpha_6)$	$+(2/2)m(\alpha_6)$
$+(2/3)m(\alpha_7)$	$+(2/3)m(\alpha_7)$	$+(2/3)m(\alpha_7)$	$+(3/3)m(\alpha_7)$

7.5　结论

本章提出了一种基于 DST 框架的经典 Pignistic 变换扩展方法。这种广义方法是以一种新的似是而非和自相矛盾推理(DSmT)为基础的，它为处理不确定或高度冲突的信息源的决策机制提供了新的数学方法。这里提出的广义 Pignistic 变换，实际上就是在所考虑的模型的超幂集上构建一个主观/Pignistic 概率方法，

该模型可以是任意模型(自由的、混合的或 Shafer 模型)。当采用 Shafer 模型时，GPT 就自然而然地与经典的 Pignistic 变换完全一致了，这与经典的 Pignistic 变换的假设扩展到自由 DSm 模型上完全对应。一般的混合 DSm 模型下的 GPT 与 CPT 的假设之间的关系仍是一个正在研究的课题。本章还介绍了不同模型下二维和三维情形的几个例子，用以证明 GPT 的有效性。

参 考 文 献

[1] Dezert J., Smarandache F., *Partial ordering of hyper－power sets and matrix representation of belief functions within DSmT*, Proc. of Fusion 2003 Conf. pp. 1230－1238, Cairns, Australia, July, 2003.

[2] Dezert J., Smarandache F., *On the generation of hyper－power sets for the DSmT*, Proceedings of the 6th Int. Conf. on Information Fusion. Cairns, Australia, pp. 1118－1125, July, 2003.

[3] Dezert J., Smarandache F., Daniel M., *The Generalized Pignistic Transformation*, Proceedings of 7th International Conference on Information Fusion, Fusion 2004, Stockholm, Sweden, June, 2004.

[4] Li X.－R., *Probability, Random Signals and Statistics*, CRC Press, 1999.

[5] Papoulis A., *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, McGraw－Hill series in electrical engineering (6th printing), 1989.

[6] Shafer G., *A Mathematical Theory of Evidence*, Princeton Univ. Press Princeton, NJ, 1976.

[7] Smets Ph., Kennes R., *The Transferable Belief Model*, Artificial Interlligence, 66, pp. 191－234, 1994.

[8] Smets Ph., *Data Fusion in the transferable Belief Model*, Proc. of 3rd Int. Conf. on Inf. Fusion, Fusion 2000, pp. PS21－PS33, Paris, France, July 10－13. 2000.

[9] Tchamova A., Semerdjiev T., Dezert J., *Estimation of Target Behavior Tendencies using Dezert－Smarandache Theory*, Proc. of Fusion 2003 Conf., pp. 1230－1238, Cairns, Australia, July 8－11, 2003.

附录：三维自由 DSm 模型 GPT 的计算过程

$P\{\alpha_1\}$、$P\{\alpha_2\}$和 $P\{\alpha_3\}$的计算过程

$P\{\alpha_1\}=$	$P\{\alpha_2\}=$	$P\{\alpha_3\}=$
$m(\alpha_1)$	$m(\alpha_1)$	$m(\alpha_1)$
$+(1/2)m(\alpha_2)$	$+m(\alpha_2)$	$+(1/2)m(\alpha_2)$
$+(1/2)m(\alpha_3)$	$+(1/2)m(\alpha_3)$	$+m(\alpha_3)$
$+(1/2)m(\alpha_4)$	$+(1/2)m(\alpha_4)$	$+(1/2)m(\alpha_4)$
$+(1/3)m(\alpha_5)$	$+(1/3)m(\alpha_5)$	$+(2/3)m(\alpha_5)$
$+(1/3)m(\alpha_6)$	$+(2/3)m(\alpha_6)$	$+(1/3)m(\alpha_6)$
$+(1/3)m(\alpha_7)$	$+(2/3)m(\alpha_7)$	$+(2/3)m(\alpha_7)$
$+(1/4)m(\alpha_8)$	$+(2/4)m(\alpha_8)$	$+(2/4)m(\alpha_8)$
$+(1/4)m(\alpha_9)$	$+(2/4)m(\alpha_9)$	$+(2/4)m(\alpha_9)$
$+(1/4)m(\alpha_{10})$	$+(2/4)m(\alpha_{10})$	$+(1/4)m(\alpha_{10})$
$+(1/4)m(\alpha_{11})$	$+(1/4)m(\alpha_{11})$	$+(2/4)m(\alpha_{11})$
$+(1/5)m(\alpha_{12})$	$+(2/5)m(\alpha_{12})$	$+(2/5)m(\alpha_{12})$
$+(1/5)m(\alpha_{13})$	$+(2/5)m(\alpha_{13})$	$+(2/5)m(\alpha_{13})$
$+(1/5)m(\alpha_{14})$	$+(2/5)m(\alpha_{14})$	$+(2/5)m(\alpha_{14})$
$+(1/6)m(\alpha_{15})$	$+(2/6)m(\alpha_{15})$	$+(2/6)m(\alpha_{15})$
$+(1/6)m(\alpha_{16})$	$+(2/6)m(\alpha_{16})$	$+(2/6)m(\alpha_{16})$
$+(1/6)m(\alpha_{17})$	$+(2/6)m(\alpha_{17})$	$+(2/6)m(\alpha_{17})$
$+(1/7)m(\alpha_{18})$	$+(2/7)m(\alpha_{18})$	$+(2/7)m(\alpha_{18})$

$P\{\alpha_{10}\}$、$P\{\alpha_{11}\}$和 $P\{\alpha_{12}\}$的计算过程

$P\{\alpha_{10}\}=$	$P\{\alpha_{11}\}=$	$P\{\alpha_{12}\}=$
$m(\alpha_1)$	$m(\alpha_1)$	$m(\alpha_1)$
$+m(\alpha_2)$	$+(1/2)m(\alpha_2)$	$+m(\alpha_2)$
$+(1/2)m(\alpha_3)$	$+m(\alpha_3)$	$+m(\alpha_3)$
$+m(\alpha_4)$	$+m(\alpha_4)$	$+m(\alpha_4)$
$+(2/3)m(\alpha_5)$	$+m(\alpha_5)$	$+m(\alpha_5)$
$+m(\alpha_6)$	$+(2/3)m(\alpha_6)$	$+m(\alpha_6)$
$+(2/3)m(\alpha_7)$	$+(2/3)m(\alpha_7)$	$+m(\alpha_7)$
$+(3/4)m(\alpha_8)$	$+(3/4)m(\alpha_8)$	$+m(\alpha_8)$
$+(2/4)m(\alpha_9)$	$+(2/4)m(\alpha_9)$	$+(3/4)m(\alpha_9)$
$+m(\alpha_{10})$	$+(2/4)m(\alpha_{10})$	$+(3/4)m(\alpha_{10})$
$+(2/4)m(\alpha_{11})$	$+m(\alpha_{11})$	$+m(\alpha_{11})$
$+(3/5)m(\alpha_{12})$	$+(4/5)m(\alpha_{12})$	$+m(\alpha_{12})$
$+(4/5)m(\alpha_{13})$	$+(3/5)m(\alpha_{13})$	$+(4/5)m(\alpha_{13})$
$+(3/5)m(\alpha_{14})$	$+(3/5)m(\alpha_{14})$	$+(4/5)m(\alpha_{14})$
$+(4/6)m(\alpha_{15})$	$+(3/6)m(\alpha_{15})$	$+(4/6)m(\alpha_{15})$
$+(3/6)m(\alpha_{16})$	$+(4/6)m(\alpha_{16})$	$+(4/6)m(\alpha_{16})$
$+(4/6)m(\alpha_{17})$	$+(4/6)m(\alpha_{17})$	$+(5/6)m(\alpha_{17})$
$+(4/7)m(\alpha_{18})$	$+(4/7)m(\alpha_{18})$	$+(5/7)m(\alpha_{18})$

$P\{\alpha_4\}$、$P\{\alpha_5\}$和 $P\{\alpha_6\}$的计算过程

$P\{\alpha_4\}=$	$P\{\alpha_5\}=$	$P\{\alpha_6\}=$
$m(\alpha_1)$	$m(\alpha_1)$	$m(\alpha_1)$
$+(1/2)m(\alpha_2)$	$+(1/2)m(\alpha_2)$	$+m(\alpha_2)$
$+(1/2)m(\alpha_3)$	$+m(\alpha_3)$	$+(1/2)m(\alpha_3)$
$+m(\alpha_4)$	$+m(\alpha_4)$	$+m(\alpha_4)$
$+(2/3)m(\alpha_5)$	$+m(\alpha_5)$	$+(2/3)m(\alpha_5)$
$+(2/3)m(\alpha_6)$	$+(2/3)m(\alpha_6)$	$+m(\alpha_6)$
$+(1/3)m(\alpha_7)$	$+(2/3)m(\alpha_7)$	$+(2/3)m(\alpha_7)$
$+(2/4)m(\alpha_8)$	$+(3/4)m(\alpha_8)$	$+(3/4)m(\alpha_8)$
$+(1/4)m(\alpha_9)$	$+(2/4)m(\alpha_9)$	$+(2/4)m(\alpha_9)$
$+(2/4)m(\alpha_{10})$	$+(2/4)m(\alpha_{10})$	$+(3/4)m(\alpha_{10})$
$+(2/4)m(\alpha_{11})$	$+(3/4)m(\alpha_{11})$	$+(2/4)m(\alpha_{11})$
$+(2/5)m(\alpha_{12})$	$+(3/5)m(\alpha_{12})$	$+(3/5)m(\alpha_{12})$
$+(2/5)m(\alpha_{13})$	$+(3/5)m(\alpha_{13})$	$+(3/5)m(\alpha_{13})$
$+(2/5)m(\alpha_{14})$	$+(3/5)m(\alpha_{14})$	$+(3/5)m(\alpha_{14})$
$+(2/6)m(\alpha_{15})$	$+(3/6)m(\alpha_{15})$	$+(3/6)m(\alpha_{15})$
$+(2/6)m(\alpha_{16})$	$+(3/6)m(\alpha_{16})$	$+(3/6)m(\alpha_{16})$
$+(2/6)m(\alpha_{17})$	$+(3/6)m(\alpha_{17})$	$+(3/6)m(\alpha_{17})$
$+(2/7)m(\alpha_{18})$	$+(3/7)m(\alpha_{18})$	$+(3/7)m(\alpha_{18})$

$P\{\alpha_{13}\}$、$P\{\alpha_{14}\}$和 $P\{\alpha_{15}\}$的计算过程

$P\{\alpha_{10}\}=$	$P\{\alpha_{11}\}=$	$P\{\alpha_{12}\}=$
$m(\alpha_1)$	$m(\alpha_1)$	$m(\alpha_1)$
$+m(\alpha_2)$	$+(1/2)m(\alpha_2)$	$+m(\alpha_2)$
$+(1/2)m(\alpha_3)$	$+m(\alpha_3)$	$+m(\alpha_3)$
$+m(\alpha_4)$	$+m(\alpha_4)$	$+m(\alpha_4)$
$+(2/3)m(\alpha_5)$	$+m(\alpha_5)$	$+m(\alpha_5)$
$+m(\alpha_6)$	$+(2/3)m(\alpha_6)$	$+m(\alpha_6)$
$+(2/3)m(\alpha_7)$	$+(2/3)m(\alpha_7)$	$+m(\alpha_7)$
$+(3/4)m(\alpha_8)$	$+(3/4)m(\alpha_8)$	$+m(\alpha_8)$
$+(2/4)m(\alpha_9)$	$+(2/4)m(\alpha_9)$	$+(3/4)m(\alpha_9)$
$+m(\alpha_{10})$	$+(2/4)m(\alpha_{10})$	$+(3/4)m(\alpha_{10})$
$+(2/4)m(\alpha_{11})$	$+m(\alpha_{11})$	$+m(\alpha_{11})$
$+(3/5)m(\alpha_{12})$	$+(4/5)m(\alpha_{12})$	$+m(\alpha_{12})$
$+(4/5)m(\alpha_{13})$	$+(3/5)m(\alpha_{13})$	$+(4/5)m(\alpha_{13})$
$+(3/5)m(\alpha_{14})$	$+(3/5)m(\alpha_{14})$	$+(4/5)m(\alpha_{14})$
$+(4/6)m(\alpha_{15})$	$+(3/6)m(\alpha_{15})$	$+(4/6)m(\alpha_{15})$
$+(3/6)m(\alpha_{16})$	$+(4/6)m(\alpha_{16})$	$+(4/6)m(\alpha_{16})$
$+(4/6)m(\alpha_{17})$	$+(4/6)m(\alpha_{17})$	$+(5/6)m(\alpha_{17})$
$+(4/7)m(\alpha_{18})$	$+(4/7)m(\alpha_{18})$	$+(5/7)m(\alpha_{18})$

$P\{\alpha_7\}$、$P\{\alpha_8\}$和 $P\{\alpha_9\}$的计算过程

$P\{\alpha_7\}=$	$P\{\alpha_8\}=$	$P\{\alpha_9\}=$
$m(\alpha_1)$	$m(\alpha_1)$	$m(\alpha_1)$
$+m(\alpha_2)$	$+m(\alpha_2)$	$+m(\alpha_2)$
$+m(\alpha_3)$	$+m(\alpha_3)$	$+m(\alpha_3)$
$+(1/2)m(\alpha_4)$	$+m(\alpha_4)$	$+(1/2)m(\alpha_4)$
$+(2/3)m(\alpha_5)$	$+m(\alpha_5)$	$+(2/3)m(\alpha_5)$
$+(2/3)m(\alpha_6)$	$+m(\alpha_6)$	$+(2/3)m(\alpha_6)$
$+m(\alpha_7)$	$+m(\alpha_7)$	$+m(\alpha_7)$
$+(3/4)m(\alpha_8)$	$+m(\alpha_8)$	$+(3/4)m(\alpha_8)$
$+(3/4)m(\alpha_9)$	$+(3/4)m(\alpha_9)$	$+m(\alpha_9)$
$+(2/4)m(\alpha_{10})$	$+(3/4)m(\alpha_{10})$	$+(2/4)m(\alpha_{10})$
$+(2/4)m(\alpha_{11})$	$+(3/4)m(\alpha_{11})$	$+(2/4)m(\alpha_{11})$
$+(3/5)m(\alpha_{12})$	$+(4/5)m(\alpha_{12})$	$+(3/5)m(\alpha_{12})$
$+(3/5)m(\alpha_{13})$	$+(4/5)m(\alpha_{13})$	$+(3/5)m(\alpha_{13})$
$+(3/5)m(\alpha_{14})$	$+(4/5)m(\alpha_{14})$	$+(4/5)m(\alpha_{14})$
$+(3/6)m(\alpha_{15})$	$+(4/6)m(\alpha_{15})$	$+(4/6)m(\alpha_{15})$
$+(3/6)m(\alpha_{16})$	$+(4/6)m(\alpha_{16})$	$+(4/6)m(\alpha_{16})$
$+(3/6)m(\alpha_{17})$	$+(4/6)m(\alpha_{17})$	$+(3/6)m(\alpha_{17})$
$+(3/7)m(\alpha_{18})$	$+(4/7)m(\alpha_{18})$	$+(4/7)m(\alpha_{18})$

$P\{\alpha_{16}\}$、$P\{\alpha_{17}\}$和 $P\{\alpha_{18}\}$的计算过程

$P\{\alpha_{16}\}=$	$P\{\alpha_{17}\}=$	$P\{\alpha_{18}\}=$
$m(\alpha_1)$	$m(\alpha_1)$	$m(\alpha_1)$
$+m(\alpha_2)$	$+m(\alpha_2)$	$+m(\alpha_2)$
$+m(\alpha_3)$	$+m(\alpha_3)$	$+m(\alpha_3)$
$+m(\alpha_4)$	$+m(\alpha_4)$	$+m(\alpha_4)$
$+m(\alpha_5)$	$+m(\alpha_5)$	$+m(\alpha_5)$
$+m(\alpha_6)$	$+m(\alpha_6)$	$+m(\alpha_6)$
$+m(\alpha_7)$	$+m(\alpha_7)$	$+m(\alpha_7)$
$+m(\alpha_8)$	$+m(\alpha_8)$	$+m(\alpha_8)$
$+m(\alpha_9)$	$+(3/4)m(\alpha_9)$	$+m(\alpha_9)$
$+(3/4)m(\alpha_{10})$	$+m(\alpha_{10})$	$+m(\alpha_{10})$
$+m(\alpha_{11})$	$+m(\alpha_{11})$	$+m(\alpha_{11})$
$+m(\alpha_{12})$	$+m(\alpha_{12})$	$+m(\alpha_{12})$
$+(4/5)m(\alpha_{13})$	$+m(\alpha_{13})$	$+m(\alpha_{13})$
$+m(\alpha_{14})$	$+(4/5)m(\alpha_{14})$	$+m(\alpha_{14})$
$+(5/6)m(\alpha_{15})$	$+(5/6)m(\alpha_{15})$	$+m(\alpha_{15})$
$+m(\alpha_{16})$	$+(5/6)m(\alpha_{16})$	$+m(\alpha_{16})$
$+(5/6)m(\alpha_{17})$	$+m(\alpha_{17})$	$+m(\alpha_{17})$
$+(6/7)m(\alpha_{18})$	$+(6/7)m(\alpha_{18})$	$+m(\alpha_{18})$

第 8 章　DSmT 和贝叶斯推理的概率化逻辑

Frédéric Dambreville
Délégation Générale pour I'Armement，DGA/CTA/DT/GIP/PRO
16 Bis，Avenue Prieur de la Côte d'Or
94114，Arcueil Cedex France

摘要：本章提出一种非混合 DSmT 的逻辑解释。由于概率与经典语义学密切相关，DSmT 的结果也就依赖于决策语义的选择，而语义学是以一种概率化的多模态逻辑为特征的。值得注意的是，本章的解释明确地证实了融合规则中的某些常用假设(即传感器的相互独立性)成立。最后形成的结论是：可能存在很多融合规则，它们取决于所选择的决策语义，而语义的选择取决于实际问题的解决方式。本章列举的实例阐明了作为本章结论的贝叶斯推理的逻辑解释。

8.1　引言

对于一个不确定问题，当它的模型难于建立时，对它应用一致的概率模型也是非常困难的。一个常被忽视的难题是如何对原始数据进行解释。原始数据本应具有很好的概率模型，但是通常情况下这些信息毫无用处，所以必须要对它进行解释。确立它的解释模型以及概率化法则，才是真正要处理的问题。根据遗忘/未知这种本质存在的特性，并不能将整个模型完全构建出来，而在某些情形下，建立一个相对弱的近似模型是可行的，当然它得到的结果也是近似的。上述情形是信息融合中一个确实存在的问题。

为解决这种问题，人们已经提出了许多新的理论。DS 证据推理[1,5]就是其中之一，而本章着重探讨 DSmT[3]，它与 DST 密切相关。这些理论(特别是 DSmT)能够巧妙地处理模型间的矛盾。但是这里仍然存在一个难题：对多个理论建立联系看来是很不容易的。特别是它们与概率理论间的关系看起来很不明确。正如某些学者说的那样，这种联系很可能是不存在的，但这又是必须要得到的——因为有

时要对不同的理论方法和运算法则进行组合。本章旨在建立这种联系,因此构建一种概率化的多模态逻辑。这种用于信息融合的概率化逻辑,推导出与 DSmT 一致的合取融合操作算子(即算子$\oplus$);另一方面,它也证实了应用融合操作算子$\oplus$时的信息源间的独立性假设。更重要的是,这种概率化逻辑给出了 DSmT 一种可能的语义学解释,从某种意义上增强了理论的直观性。在本章结尾,我们同样对贝叶斯推理进行类似的解释。尽管贝叶斯推理与 DSmT 毫不相关,但是根据最后的结果,也许可以将概率化逻辑作为多个不确定性理论的共同框架。

本章从 8.2 节开始,首先对概率进行介绍,通过介绍可以得出概率建模有时存在很大的疑问,根据这些知识,我们介绍两种证据理论——以往的 Dempster Shafer 理论和 Smets 的可传递信度模型[8]。8.3 节对 DSmT 进行简要介绍。8.4 节对在一系列逻辑命题上的概率(以及局部概率)进行定义,而这些通常的定义在后续几节中都会用到。8.5 节通过一个小例子对 DSmT 进行逻辑解释,这一节并没有进行深入的理论介绍,因为用于解释的模态逻辑是用实际的语言而非公式进行描述的。8.6 节将此结果推广到任意情形,这一节带有更多的理论性,因为这里的模态逻辑是用数学方式定义的。8.7 节对贝叶斯推理进行相似的逻辑解释。8.8 节给出结论。

8.2 信度理论模型

8.2.1 预备知识:概率

本小节指出,要对任何事件都利用概率的方式进行模型化是很困难的。对一个抽象事件(命题)给定一个可量测的空间 $\Omega=\{\omega_i, i\in I\}$,则可以定义概率 P 作为空间 Ω 的一个有界归一化测度。我们着重讨论有限维模型(I 是有限的)。

概率 P 也可以通过基本事件 $\omega\in\Omega$ 的概率 $\rho(\omega)$ 进行定义,而对于 ρ 的概率密度(有限的情形),有如下定义:

$$\rho:\Omega \mapsto IR^{+} \text{ 且} \sum_{\omega\in\Omega}\rho(\omega)=1$$

概率 P 可通过下面的可加性原理得到:

$$\forall A\in\Omega, P(A)=\sum_{\omega\in A}\rho(\omega)$$

但是有一点非常重要,必须明确这些抽象定义是如何与实际空间中真实的“可能性”概念相联系的。形式与抽象事件背后是现实的世界,通过抽象空间 Ω 介绍的形式仅仅是实际空间的一个模型。正如我们期望的那样,这个模型非常适合数学运算与推理,但是并没有理由来说明抽象事件与实际事件是兼容的。概率理论假

定这种兼容性是存在的，更确切地说，它认为它们是相同的，或者存在一个从实际事件到抽象事件的映射(图 8.1)。当对于某一观测实验作了映射的假设后，密度函数的概念才有意义。事实上，在频率论者看来，可以通过下面的方式对 ρ 进行实际的构建。

(1) 对于所有的 $\omega \in \Omega$，令 $\rho(\omega)=0$。

(2) 对一个实际事件做 N 次投币试验，对于每一个试验结果 a：

① 选择 $\omega \in \Omega$，使得 ω 与 a 相对应；

② 令 $\rho(\omega)=\rho(\omega)+1$。

(3) 对于所有的 $\omega \in \Omega$，令 $\rho(\omega) \simeq \frac{1}{N}\rho(\omega)$。

下一节将解释为什么从实际事件到抽象事件上的映射并不都是一定可行的，以及如何解决这个问题。

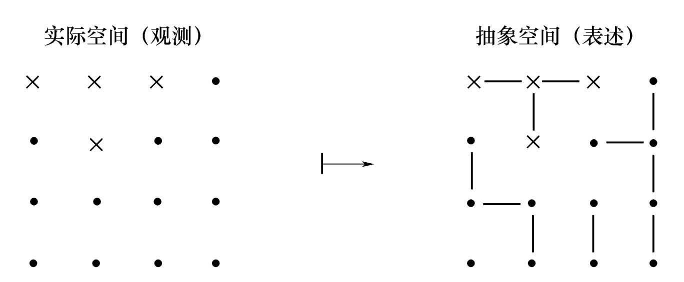


图 8.1　概率情形下的事件映射

完备空间的不可达性

常常可以假设存在一个完备空间，所有的问题在它上面都能建立模型，但是实际上并不能够构建这样的模型，并在完备空间上进行处理。然而，可以用这种方式进行考虑。令 $\mathscr{A}$ 表示实际空间，Ω 表示抽象空间，$\mathscr{L}$ 表示完备空间。

Ω 的结构完全明确，它描述了人类对现实世界建构的模型，这也就是人类如何对观测试验进行解释的过程。实际上，由于原始数据可能没用，这样的解释通常是很有必要的。但是 Ω 也仅仅是一个假设：要进行一种确切的解释，从观测试验得到的信息往往是不充分的。

被观测空间 $\mathscr{A}$ 与空间 $\mathscr{L}$ 一样，它的确切结构并不明确：尽管观测试验是可以进行的，但是要明白它的含义(也就是真正的确切解释)并不一定是行得通的。例如，若一个观测试验的结果从没出现过，那么它是什么意思？

空间 $\mathscr{L}$ 是完备的也是未知的，它包括其他两个部分。这里，“包括”一词具有一种逻辑含义，即空间 $\mathscr{A}$ 或者 Ω 上的事件/命题是空间 $\mathscr{L}$ 上的宏观事件/命题(图

8.2)：

$$\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(\mathscr{Z}) \text{ 且 } \Omega \subset \mathscr{P}(\mathscr{Z})$$

对于空间 $\mathscr{A}$ 和 Ω，具有如下的完备性(x)与一致性(c)假设：

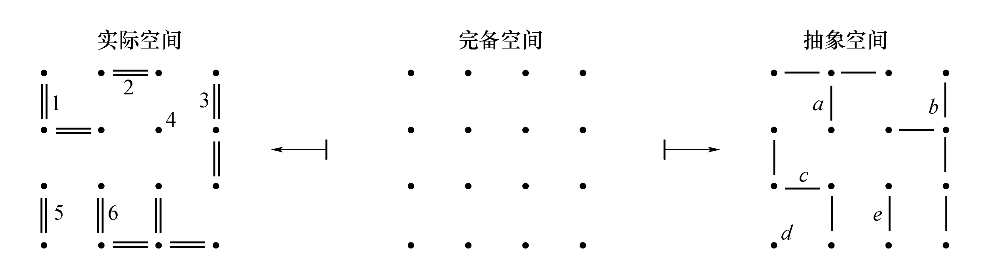
x. $\mathscr{Z} = \bigcup_{a \in \mathscr{A}} a = \bigcup_{w \in \Omega} \omega$，

c1. $[a_1, a_2 \in \mathscr{A}, a_1 \neq a_2] \Rightarrow a_1 \cap a_2 = \varnothing$，

c2. $[\omega_1, \omega_2 \in \Omega, \omega_1 \neq \omega_2] \Rightarrow \omega_1 \cap \omega_2 = \varnothing$。

上述完备性假设和一致性假设都饱受争议，后面将会介绍，当进行信息融合时，这些假设将会推出矛盾的结论。

当然，当任一事件 $a \in \mathscr{A}$ 都是某一抽象事件 $\omega \in \Omega$ 的子事件时，抽象空间 Ω 就是观测试验的一致性解释。但由于对 $\mathscr{A}$ 的解释不可避免会出现片面性和主观性，因此这种性质通常情况下并不能够得到保持。图 8.2 给出了一个对观测结果作出错误解释的例子：实际事件 5 与抽像事件 d 和 c 都相交。更精确地说，如果一个事件 $a \in \mathscr{A}$ 发生了，就相当于一个完备事件 $z \in a$ 发生了；由于 $\mathscr{Z}$ 包括(就是能够映射到)Ω，就会存在唯一的抽象事件 $\omega \in \Omega$，使得它与 z 相符合，即 $z \in \omega$。可以得出结论，若一个给定的实际事件 a 发生时，满足条件 $w \cap a \neq \varnothing$ 的任一抽象事件 $\omega \in \Omega$ 都很可能发生。实际上，这种情况很容易作出决策，因为只有当疑问发生在可量测的分类上才会出现这种情况。根据图 8.2 给出的例子，表 8.1 对于每一次投币试验的结果给出了可能对应的抽象事件。



每一个抽象事件（即 a、b、c、d、e）用—相互连接

每一个实际事件（即 1、2、3、4、5、6）用＝相互连接

图 8.2　一般情形下的事件映射

表 8.1　图 8.2 所示事件的多重映射

投 币 观 测	可能的抽象事件
1	a　c

（续）

投 币 观 测	可能的抽象事件
2	a
3	b
4	b
5	c ， d
6	b ， c ， e

最后，根据只能做局部决策的观测试验来得到唯一抽象事件的概率密度，这看起来似乎不太可能。但是，根据它却可以对复合事件进行定义。所以根据频率论者的观点，还可以构建如下函数（仍将它记为 ρ）。

（1）对于所有的 $\phi\subset\Omega$，令 $\rho(\phi)=0$。

（2）对一个实际事件作 N 次投币试验，对于每一个试验结果 a：

① 定义一个集合 $\phi(a)=\{\omega\in\Omega/\omega\cap a\neq\varnothing\}$；

② 令 $\rho(\phi(a))=\rho(\phi(a))+1$。

(3) 对于所有的 $\phi\subset\Omega$,令 $\rho(\phi)\simeq\frac{1}{N}\rho(\phi)$。

特殊情况下,$\rho(\varnothing)=0$。

根据表 8.1 中的具体情形,与观测试验相关的概率密度如下:

$$\rho\{a,c\}=p(1),\rho\{a\}=p(2),\rho\{b\}=p(3)+p(4),$$
$$\rho\{c,d\}=p(5),\rho\{b,c,e\}=p(6)$$

由前面的讨论可知,当对一个观测试验的解释是近似的时候,概率密度在每一个抽象事件上的定义就变得不合理,然而它却可以在复合事件上进行定义。这种定义看起来和下一节对 DST 中基本信度赋值的定义非常相似。

8.2.2 Dempster Shafer 理论

1. 定义

Dempster Shafer 模型[1, 2, 5]是通过一对(Ω,m)来描述的,其中 Ω 为抽象事件的集合,基本信度赋值(bba)m 是一个已经在 $\mathscr{P}(\Omega)$(Ω 的所有子集的集合)上给予赋值的非负函数,存在结论:

$$m(\varnothing)=0\text{ 且}\sum_{\phi\subset\Omega}m(\phi)=1$$

Dempster Shafer 模型(Ω,m)可以看成是对事实的一个不确定性解释。典型情况下,它可以作为传感器提供信息的一个工具。

2. 命题的信度

令 $\phi\subset\Omega$ 为一个命题,假定基本信度赋值为 m。ϕ 的可信程度 $\mathrm{Bel}(\phi)$以及它的似真函数 $\mathrm{Pl}(\phi)$可定义为

$$\mathrm{Bel}(\phi)=\sum_{\psi\subset\phi}m(\psi),\mathrm{Pl}(\phi)=\sum_{\psi\cap\phi\neq\varnothing}m(\psi)$$

Bel 和 Pl 并不满足概率的可加性。$\mathrm{Bel}(\phi)$与 $\mathrm{Pl}(\phi)$分别是命题 ϕ 的最低和最高信度衡量方法。这些方法有时也被认为是量测命题 ϕ 概率的下界和上界的方法,即

$$\mathrm{Bel}(\phi)\leqslant P(\phi)\leqslant\mathrm{Pl}(\phi)$$

这种解释是非常危险的,因为通常情况下人们认为概率理论和 DST 是极为不同的理论。

3. 融合规则

假设定义在相同框架 Ω 上的两个基本信度赋值 m_1、m_2 是由两个不同的信息源获得的。通常情况下,认为这两个信息源是相互独立的,那么可以定义 $m_1\oplus m_2$

为

$$\begin{cases} m_1 \oplus m_2(\varnothing) = 0 \\ m_1 \oplus m_2(\varnothing) = \dfrac{1}{Z} \sum\limits_{\psi_1 \cap \psi_2 = \varnothing} m_1(\psi_1) m_2(\psi_2) \quad (Z = 1 - \sum\limits_{\psi_1 \cap \psi_2 = \varnothing} m_1(\psi_1) m_2(\psi_2)) \end{cases}$$

操作算子⊕表示两个基本信度赋值的信息融合（合取）。

由于 bba 在空集$\varnothing$上被强制为零，所以归一化因子 Z 是不可缺少的。除了某些特殊的情形，下列情况是确实可能存在的：

$$m_1(\psi_1) m_2(\psi_2) > 0 \tag{8.1}$$

$$\psi_1 \cap \psi_2 = \varnothing \tag{8.2}$$

特别是性质(8.2)，它与一个隐含的一致性假设密切相关；更确切地说，由于空间 Ω 定义为一个事件的集合，那么不同元素的交集为空集。

$$\forall \{\omega_1\}, \{\omega_2\} \subset \Omega, \{\omega_1\} \neq \{\omega_2\} \Rightarrow \{\omega_1\} \cap \{\omega_2\} = \varnothing$$

可以注意到，这个假设与 8.2.1 节的假设 c2. 非常相似。这个一致性假设可以看成是信息融合时抽象模型冲突的来源。最后，$Z<1$ 表示抽象空间 Ω 定义得不够正确，因而它不适合这两个传感器。Z 衡量了解释模型的偏差程度。与概率规则相比，利用规则⊕得到的结果确实非常有新意。

8.2.3 可传递信度模型

Smets 对 TBM 模型[8]进行了广泛的解释，本小节只是简单地介绍这个模型。

1. 定义

TBM 模型是通过一对(Ω,m)来描述的，其中 Ω 为抽象事件的集合，基本信度赋值 m 是一个已经在 $\mathscr{P}(\Omega)$（Ω 的所有子集的集合）上给予赋值的非负函数，存在如下结论：

$$\sum_{\phi \subset \Omega} m(\phi) = 1$$

在这个定义中，假设 $m(\varnothing)=0$ 不再成立。

2. 融合规则

Smets 的规则看起来像是对 Dempster Shafer 规则的细化，即

$$m_1 \oplus m_2(\varnothing) = \sum_{\psi_1 \cap \psi_2 = \varnothing} m_1(\psi_1) m_2(\psi_2)$$

注意到这里不再含有归一化因子，而对冲突的衡量已经被转移到了 $m(\varnothing)$，融合规则的公理化过程已经对这个理论进行了证明。

3. TBM 将 DST 推广

首先，对于 DST 的任何一个 bba，它在 TBM 模型上都是一个有效的 bba，但

是反之则不成立，这是由于空集$\varnothing$的存在。现在，根据 TBM 的任意 bbam$_{\mathrm{T}}$，有$m_{\mathrm{T}}(\varnothing)<1$，它可以构建 DST 的 bba$\Delta(m_{\mathrm{T}})$如下：

$$\Delta(m_{\mathrm{T}})(\varnothing)=0,\ \forall\phi\subset\Omega:\phi\neq\varnothing,\Delta(m_{\mathrm{T}})(\phi)=\frac{m_{\mathrm{T}}(\phi)}{1-m_{\mathrm{T}}(\varnothing)}$$

Δ 是一个自我映射。也就是说，DST 的任一 bbam_{D} 都是 TBM 的一个 bba，并且 $\Delta(m_{\mathrm{D}})=m_{\mathrm{D}}$。

Δ 是对$\oplus$的映射。即 $\Delta(m_{\mathrm{T},1}\oplus m_{\mathrm{T},2})=\Delta(m_{\mathrm{T},1})\oplus\Delta(m_{\mathrm{T},2})$。

证明：根据定义，可以明确得出 $\Delta(m_{\mathrm{T},1})\oplus\Delta(m_{\mathrm{T},2})(\varnothing)=0=\Delta(m_{\mathrm{T},1}\oplus m_{\mathrm{T},2})(\varnothing)$。

现在，对于任何 $\phi\subset\Omega$ 并且 $\phi\neq\varnothing$，可得

$$\begin{aligned}\Delta(m_{\mathrm{T},1})\oplus\Delta(m_{\mathrm{T},2})(\phi)&=\frac{\sum\limits_{\psi_1\cap\psi_2=\phi}\Delta(m_{\mathrm{T},1})(\psi_1)\Delta(m_{\mathrm{T},2})(\psi_2)}{\sum\limits_{\phi\neq\varnothing}\sum\limits_{\psi_1\cap\psi_2=\phi}\Delta(m_{\mathrm{T},1})(\psi_1)\Delta(m_{\mathrm{T},2})(\psi_2)}\\&=\frac{\sum\limits_{\psi_1\cap\psi_2=\phi}\frac{m_{\mathrm{T},1}(\psi_1)}{1-m_{\mathrm{T},1}(\varnothing)}\times\frac{m_{\mathrm{T},2}(\psi_2)}{1-m_{\mathrm{T},2}(\varnothing)}}{\sum\limits_{\phi\neq\varnothing}\sum\limits_{\psi_1\cap\psi_2=\phi}\frac{m_{\mathrm{T},1}(\psi_1)}{1-m_{\mathrm{T},1}(\varnothing)}\times\frac{m_{\mathrm{T},2}(\psi_2)}{1-m_{\mathrm{T},2}(\varnothing)}}\\&=\frac{\sum\limits_{\psi_1\cap\psi_2=\phi}m_{\mathrm{T},1}(\psi_1)m_{\mathrm{T},2}(\psi_2)}{\sum\limits_{\phi\neq\varnothing}\sum\limits_{\psi_1\cap\psi_2=\phi}m_{\mathrm{T},1}(\psi_1)m_{\mathrm{T},2}(\psi_2)}\\&=\frac{m_{\mathrm{T},1}\oplus m_{\mathrm{T},2}(\phi)}{\sum\limits_{\phi\neq\varnothing}m_{\mathrm{T},1}\oplus m_{\mathrm{T},2}(\phi)}=\frac{m_{\mathrm{T},1}\oplus m_{\mathrm{T},2}(\phi)}{1-m_{\mathrm{T},1}\oplus m_{\mathrm{T},2}(\varnothing)}\\&=\Delta(m_{\mathrm{T},1}\oplus m_{\mathrm{T},2})(\phi)\end{aligned}$$

由于 Δ 是一个自我映射，那么 TBM 可以看成是 DST 的广义化。更确切地说，TBM 的一个 bba 比 DST 的一个 bba 包含更多的信息，也就是冲突 $m(\varnothing)$的量测方法。但是这个补充的信息依然与 DST 的融合规则相一致。

下一节将介绍 DSmT，它与 TBM 有很多共同点。但是这个理论有一个最主要且最基本的贡献，即它不再给出一致性假设，并且能够利用不同的方式解决冲突：这里的抽象模型更易于解释，并且当传感器间存在冲突时不必再重建模型。

8.3　Dezert Smarandache 理论(DSmT)

不管是 DST 还是 TBM，当用于处理信息间的冲突时，在模型的定义上都会出

现困难。但是对于不精确的信息来说，这种冲突又是不可避免的，可以通过下面的例子来说明这种情况。

黑和白的例子：假定传感器 s_1 能够识别出一个目标是白的（W）或者不是白的（NW），当对目标不确定时，s_1 不给出结果（NA_1），则这个传感器的实际空间可定义为 $\mathscr{A}_1=\{W,NW,NA_1\}$。同样假定传感器 s_2 能够识别出一个目标是黑的（B）或者不是黑的（NB），当对目标不确定时，s_2 不给出结果（NA_2）。则这个传感器的实际空间可定义为 $\mathscr{A}_2=\{B,NB,NA_2\}$。传感器的特性并不知道，但是已经在其上对黑的和白的目标进行了测试，根据这种情形，可以很自然地构建模型 $\Omega=\{\text{black},\text{white}\}$。当出现不确定的情形时，在空间上可解释为{black，white}，另外，我们期待更好的解释结果，从而可以证实下面的性质：

$$B,NW \subset \text{black} \text{ 且 } W,NB \subset \text{white}$$

假定存在下面的一致性假设：black⊂white$=\varnothing$。也就是说，事件 black∩white 是不可能同时发生。只要传感器能够独立地工作，并且目标是黑的或白的，此模型就能很好地符合。然而毫无疑问，在实际的空间中存在着很多目标，它们既不是白的也不是黑的，例如灰色的物体。假定这两个传感器都能正常工作，那么对于上述信息的融合结果为 NW∩NB，可被解释为 black∩white，因而它与一致性假设就产生了冲突。

结论：在构建决策系统时，上述出现的情形只是现实中的一个缩影。要应用多个信息源（这里是两个），并且它们具有不同的区分能力。事实上，并不是真的知道它们的区分能力，但是通过对这些信息源在一些样本上（这里是黑的和白的目标物）进行测试，就可获得它们的区分能力模型（这里是通过在空间 Ω 上对传感器进行区分黑白目标的训练）。当然，并不能确定这个模型就是完整的，实际上根据信息源仍有可能辨别出更多的新的未知情形。在这个例子中，传感器的组合使得它们对一类新的目标（既不黑又不白的目标）的区分成为可能。但是，当对传感器进行融合时，辨别出来的新的情形与开始的一致性假设出现了矛盾，所以必须要去掉这个一致性假设，不仅是因为它使模型出现矛盾冲突，还因为它限制了我们对新的情形的发现。Dezert 和 Smarandache 提出了一种不存在一致性假设的模型。

8.3.1 Dezert Smarandache 模型

DST 和 TBM 隐含了一致性假设，因为它们用一个集合 Ω 作为其抽象空间。而且，它们用集合算子∩、∪和 c（也就是补集）来表示各个命题 $\phi\subset\Omega$ 之间的相互作用。实际上，命题的概念与布尔代数的概念是相关的，集合以及集合算子在一起就构成了一种特殊的布尔代数模型。因为 DSmT 没有作出一致性假设，所以它不能依靠集合的形式，然而我们却需要某些布尔关系来解释命题之间的关系。另外一个非常基本的布尔代数是命题逻辑，此模型可用于代表 DSmT 中的命题。然

而，我们必须要从这个逻辑中去掉否定操作算子，因为它关于其自身存在某些一致性假设，例如 $\phi\wedge\neg\phi\equiv\perp$。为了验证逻辑结果的等价命题，我们获得了命题的超幂集，并将其作为用于 DSmT 空间的模型。

1. 超幂集

令 $\Phi=\{\phi_i/i\in I\}$ 为一系列命题。超幂集 $\langle\Phi\rangle$ 是由 Φ 以及布尔算子 $\wedge$、$\vee$ 产生的自由准布尔代数，即

$$\Phi,\langle\Phi\rangle\wedge\langle\Phi\rangle,\langle\Phi\rangle\vee\langle\Phi\rangle\subset\langle\Phi\rangle$$

可以证明 $\wedge$、$\vee$ 具有以下性质。

交换率：$\phi\wedge\psi\equiv\psi\wedge\phi$ 且 $\phi\vee\psi\equiv\psi\vee\phi$。

结合率：$\phi\wedge(\psi\wedge\eta)\equiv(\phi\wedge\psi)\wedge\eta$ 且 $\phi\vee(\psi\vee\eta)\equiv(\phi\vee\psi)\vee\eta$。

分配率：$\phi\wedge(\psi\vee\eta)\equiv(\phi\wedge\psi)\vee(\phi\wedge\eta)$ 且 $\phi\vee(\psi\wedge\eta)\equiv(\phi\vee\psi)\wedge(\phi\vee\eta)$。

幂等率：$\phi\wedge\psi\equiv\phi$ 且 $\phi\vee\phi\equiv\phi$。

吸收率：$\phi\wedge(\phi\vee\psi)\equiv\phi$ 且 $\phi\vee(\phi\wedge\psi)\equiv\phi$。

上述性质对于任意的 ϕ、ψ、$\eta\in\langle\mathit{\Phi}\rangle$ 都成立。

除非对自由准布尔代数作更详细地说明，这里的定义不允许命题是相互排斥的（没有一致性假设）或是完备的。特别地，否定算子 $\neg$ 以及从不发生/总是发生事件 $\perp$/T 都被排除在这里的形式之外。事实上，否定算子和一致性假设是相关的，T 和完备性假设是相关的。

性质：根据定义可以很容易地证明：

$$\forall\phi,\psi\in\langle\Phi\rangle,\phi\wedge\psi\equiv\phi\Leftrightarrow\phi\vee\psi\equiv\psi$$

符号 $\leqslant$ 表示一个定义在 $\langle\Phi\rangle$ 上的次序算子，即

$$\phi\leqslant\psi\Leftrightarrow\phi\wedge\psi\equiv\phi\Leftrightarrow\phi\vee\psi\equiv\psi$$

符号 $<$ 也表示一个定义在 $\langle\Phi\rangle$ 上的次序算子，即

$$\phi<\psi\Leftrightarrow[\phi\leqslant\psi\text{ 且 }\phi\not\equiv\psi]$$

超幂集中的符号 $\leqslant$ 与集合中的符号 $\subset$ 类似。

2. Dezert Smarandache 模型

Dezert Smarandache 模型（DSmm）是通过一对 (Φ,m) 来描述的，其中（抽象）空间 Φ 为一系列命题，基本信度赋值 m 是一个已经在 $\langle\Phi\rangle$ 上给予赋值的非负函数，存在如下结论：

$$\sum_{\phi\in\langle\Phi\rangle}m(\phi)=1$$

3. 信度函数

信度函数 Bel 定义为

$$\forall \phi \in \langle \Phi \rangle, \mathrm{Bel}(\phi) = \sum_{\psi \in \langle \Phi \rangle; \psi \leqslant \phi} m(\psi) \tag{8.3}$$

由于$\langle \Phi \rangle$中的命题不相互排斥的，所以（经典的）似真函数正好等于1。将式(8.3)颠倒过来可表示为

$$\forall \phi \in \langle \Phi \rangle, m(\phi) = \mathrm{Bel}(\phi) - \sum_{\psi \in \langle \Phi \rangle; \psi < \phi} m(\psi)$$

8.3.2 融合规则

对于一个给定的空间Φ，以及由不同传感器得到的两个基本信度赋值m_1、m_2，可以将融合后的基本信度赋值$m_1 \oplus m_2$定义为

$$m_1 \oplus m_2(\phi) = \sum_{\psi_1 \wedge \psi_2 \equiv \phi} m_1(\psi_1) m_2(\psi_2) \tag{8.4}$$

1. Dezert 和 Smarandache 的例子

假设一个小偷(45岁)被爷孙俩看到。这两个目击者要回答这个问题：这个小偷是年轻的还是年老的？那么这个空间就可定义为$\Phi = \{\text{young}, \text{old}\}$。爷爷回答说，这个小偷非常年轻。他的描述可以用下面的 bba 表示：

$$m_1(\text{young}) = 0.9, m_1(\text{young} \vee \text{old}) = 0.1(\text{稍许不肯定})$$

当然，他的孙子认为这个小偷相当年老：

$$m_2(\text{old}) = 0.9, m_2(\text{young} \vee \text{old}) = 0.1(\text{稍许不肯定})$$

怎样解释他们两个的证词呢？融合规则如下：

$$\begin{cases} m_1 \oplus m_2(\text{young} \wedge \text{old}) = 0.9801(\text{高度矛盾} \neg \text{ 第三种情形}) \\ m_1 \oplus m_2(\text{young}) = m_1 \oplus m_2(\text{old}) = 0.0099 \\ m_1 \oplus m_2(\text{young} \vee \text{old}) = 0.0001 \end{cases}$$

我们的假设存在矛盾，因为还存在第三种情形：这个小偷是个中年人。

2. 注释

在 DSmT 中，合取的概念$\wedge$(也就是第三种情形)与冲突的概念并没有一个明确的区分。这个模型并没有作出什么决策，只是最后解释两者的区别。我们的解释使它产生了区别。因而，利用 DSm 模型避免了对实际空间的进一步细化。所以，利用此模型不会失败，尽管在最后解释的时候会出现失败。利用 DSmT 的另外一个好处是，它可以对冲突/第三种情形进行具体说明：冲突$\phi \wedge \psi$并不只是一个矛盾，矛盾只存在于ϕ与ψ之间。

8.4 逻辑命题的概率

经典的概率是定义在可量测的集合上，然而，这只是概率模型的一种构建方

式，这种概率本质上是对逻辑命题信度的量测。概率也可以不根据可量测理论进行定义，至少当命题的数量有限时可以这样定义。在本节中，概率的概念是通过一种严格的逻辑形式定义的，这种形式在后面将经常用到。

我们直观上认为定义在一系列逻辑命题上的概率是对具有可加性（不相交的命题将它们的可能性进行相加）的信度的一种量测方式，并且随着命题的增加而增加（弱命题具有更大的概率）。根据这种方式，不可能的命题应该赋予零，真的命题应被赋予完全值。而且，独立命题的概率具有相乘的形式。命题的独立性决定命题间具有一种先后的因果关系，它通常依赖于具体的问题本身。

这种直觉性现在已经被形式化了，现在假定读者已经了解了关于逻辑的相关概念。

8.4.1 定义

令 L 至少是对经典逻辑命题的扩展，它包括算子 $\wedge$、$\vee$、$\neg$（与、或、非）以及命题 $\perp$、$\top$（常假、常真）。而且我们假设 L 上的某些成对的命题是相互独立的（这并不是一个与逻辑本身必然相关的先后关系）。概率 p 是定义在 L 上的一个正的赋值函数 IR^+，对于 L 的任意命题 ϕ 和 ψ，可得到如下结论。

可加性：$p(\phi\wedge\psi)+p(\phi\vee\psi)=p(\phi)+p(\psi)$。

一致性：$p(\perp)=0$。

有限性：$\rho(\top)=1$。

相乘性：当 ϕ 和 ψ 是相互独立的命题时，$p(\phi\wedge\psi)=p(\phi)p(\psi)$。

8.4.2 性质

一致性与可加性的性质隐含了 p 的递增性，即

$$p(\phi \wedge \psi) \leqslant p(\phi)$$

证明：由于 $\phi\equiv(\phi\wedge\psi)\vee(\phi\wedge\neg\psi)$ 且 $(\phi\wedge\psi)\vee(\phi\wedge\neg\psi)\equiv\perp$，根据可加性原理，有

$$p(\phi)+p(\perp) = p(\phi \wedge \psi)+p(\phi \wedge \neg\psi)$$

而根据一致性原理 $p(\perp)=0$，可推断出 $p(\phi)=p(\phi\wedge\psi)+p(\phi\wedge\neg\psi)$。又由于 p 是一个非负值，所以 $p(\phi)\geqslant p(\phi\wedge\psi)$。

8.4.3 局部概率的定义

最后，通过一个逻辑系统部分可知的概率可以替代原来信息的描述。典型的情况是，只能获知命题的一个子集 $l\subset L$ 的概率。

其他的一些著作[9]也已经对局部概率进行了研究，来表示信息局部情况。在这些著作中，概率是通过约束来刻画的。我们相信这个领域还没有被充分地研究。

尽管前面的介绍都是集中在知识表示的逻辑层面上，但也应注意到它与局部概率的概念密切相关。特别地，命题子集的概率信息隐含了对于整个逻辑系统概率约束的定义。例如，这个信息 $\pi = p(\phi \wedge \psi)$ 也确定了 $p(\phi)$ 和 $p(\psi)$ 的一个下界：$p(\phi) \geqslant \pi, p(\psi) \geqslant \pi$。

下一节介绍一个小例子，通过概率化逻辑给 DSmT 提供一个新的解释。

8.5 DSmT 的逻辑解释：一个例子

考虑一个二元命题的 DSm 模型 $\Delta = (\{\phi_1, \phi_2\}, m)$。本节通过概率化模态命题对于 DSm 模型给出一种解释。

8.5.1 一种可能的模态解释

考虑下面的模态命题。

U：在 ϕ_i 之间不能作出决定。

α_i：命题 ϕ_i 是必然的；没有其他信息（NOI）。

I：ϕ_i 之间存在着冲突。

很显然，这些命题都是相互排斥的，即

$$\forall a, b \in \{U, \alpha_1, \alpha_2, I\}, a \not\equiv b \Rightarrow a \wedge b \equiv \perp \tag{8.5}$$

这些命题都明显与命题 ϕ_i 是相关的，即

$$\begin{cases} I \leqslant \phi_1 \wedge \phi_2, \phi_1, \phi_2, \phi_1 \vee \phi_2 & [\text{冲突 } I \text{ 暗含所有的情况}] \\ \alpha_i \leqslant \phi_i, \phi_1 \vee \phi_2 (i = 1, 2) & [\alpha_i \text{ 暗含 } \phi_i \text{ 和 } \phi_1 \vee \phi_2] \\ U \leqslant \phi_1 \vee \phi_2 & [U \text{ 仅暗含 } \phi_1 \vee \phi_2] \end{cases} \tag{8.6}$$

这些命题同时也是完备的，即在空间 Φ 上，根据 I、α_1、α_2、U 上的任何一个命题都可证明：

$$I \vee \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee U \equiv \phi_1 \vee \phi_2 \tag{8.7}$$

由于命题 α_i、U、I 表示 ϕ_i（没有其他的信息）、不确定或者冲突的信息，很自然地就可将这些命题与信度 $m(\phi_i)$、$m(\phi_1 \vee \phi_2)$ 以及 $m(\phi_1 \wedge \phi_2)$ 联系在一起，这些信度会被解释成在 I、U 以及 α_i 上的概率，即

$$p(I) = m(\phi_1 \wedge \phi_2), p(U) = m(\phi_1 \vee \phi_2),$$
$$p(\alpha_i) = m(\phi_i) (i = 1, 2) \tag{8.8}$$

这些概率的解释是很自然的，但也是很有疑问的——它将概率与 bba 混在了一起。由于命题 ϕ_i 并没有被直接处理，这种解释仍可以理解。事实上，后面将会

介绍这种解释隐含了融合规则$\oplus$,并且它将在后面得到证明。

8.5.2 融合规则的推导

本节将会介绍从前述的概率化模态解释推导出的一种融合规则,而此规则恰好是 DSmT 中的(合取)融合规则。

令 $\Delta_j=(\{\phi_1,\phi_2\},m_j)$为与传感器 $j=1,2$ 相关的 DSm 模型,这两个传感器工作在相同的抽象空间$\{\phi_1,\phi_2\}$下。定义模态命题的集合为 $S_j=\{I_j,\alpha_{j1},\alpha_{j2},U_j\}$。

U_j:根据传感器 j,在 ϕ_i 之间不能作出决定。

α_i:根据传感器 j,命题 ϕ_i 是必然的,并且没有其他的信息(NOI)。

I:根据传感器 j,认为 ϕ_i 之间存在着冲突。

S_j 中的命题当然符合性质(8.5)、性质(8.6)、性质(8.7)和性质(8.8),当需要时,可以将下标 j 加上,定义

$$S=S_1\wedge S_2=\{a_1\wedge a_2/a_1\in S_1\text{ 且 }a_2\in S_2\}$$

考虑到 $a\equiv a_1\wedge a_2$、$b\equiv b_1\wedge b_2$ 为 S 中的两个不同的元素,那么,$a_1\neq b_1$ 或者 $a_2\neq b_2$。由于 S_j 满足性质(8.5),则有 $a_1\wedge b_1\equiv\bot$或者 $a_2\wedge b_2\equiv\bot$,因而可以得到

$$(a_1\wedge a_2)\wedge(b_1\wedge b_2)\equiv(a_1\wedge b_1)\wedge(a_2\wedge b_2)\equiv\bot$$

所以 S 是由相互排斥的元素组成的。通过性质(8.7),还可以得出 $\phi_1\vee\phi_2\equiv\bigvee_{a_j\in S_j}a_j$,即 S_j 是完备的,可以得到

$$\phi_1\vee\phi_2\equiv(\phi_1\vee\phi_2)\wedge(\phi_1\vee\phi_2)\equiv\bigwedge_{j=1}^{2}\bigvee_{a_j\in S_j}a_j\equiv\bigvee_{a\in S}a$$

所以 S 也是完备的。实际上,S 能够列举出观测结果的所有可能情形,因而我们有理由相信这些传感器的融合信息能够通过 S 构建出来。问题接着就出来了:命题 $a_1\wedge a_2\in S$ 的含义是什么?我们知道根据 S_j 中的命题,只能获知通过传感器 j 得到的信息,但是通过组合确定的和不确定的命题而得到的语义是很自然的[①]:

- 不确定+不确定=不确定
- 不确定+确定=确定
- 确定+确定=确定或冲突
- 任意情况+冲突=冲突

特别是当两种信息是确定的,并且我们得知它们是相互排斥的时候,就会出现冲突。这样可以推导出 S 的一种通用解释:

① 事实上,在这种组合规则(涉及到下一节)中隐含了传感器间的独立性假设。

$\wedge$	I_2	α_{21}	α_{22}	U_2
I_1	冲突	冲突	冲突	冲突
α_{11}	冲突	ϕ_1 是确定的	冲突	ϕ_1 是确定的
α_{12}	冲突	冲突	ϕ_2 是确定的	ϕ_2 是确定的
U_1	冲突	ϕ_1 是确定的	ϕ_2 是确定的	不确定

最后可得到，S 中的任一命题都是命题 I、α_1、α_2 或者 U 的一个子事件，可定义如下。

U：根据传感器，在 ϕ_i 之间不能作出决定。

α_i：根据传感器，可知命题 ϕ_i 是必然的，其他一无所知。

I：传感器间存在着冲突。

由于 S 是完备的，所以命题 U、α_i、I 完全由 S 决定：

- $I \equiv (I_1 \wedge I_2) \vee (I_1 \wedge \alpha_{21}) \vee (I_1 \wedge \alpha_{22}) \vee (I_1 \wedge U_2) \vee (\alpha_{11} \wedge I_2) \vee (\alpha_{12} \wedge I_2) \vee (U_1 \wedge I_2) \vee (\alpha_{12} \wedge \alpha_{21}) \vee (\alpha_{11} \wedge \alpha_{22})$，
- $\alpha_i \equiv (\alpha_{1i} \wedge \alpha_{2i}) \vee (U_1 \wedge \alpha_{2i}) \vee (\alpha_{1i} \wedge U_2)$，
- $U \equiv U_1 \wedge U_2$。

所以命题 I、α_i、U 完全被具体化了，又由于 S 是由相互排斥的元素组成的，因此它们的概率可以通过下面的式子给定：

- $p(I) = p(I_1 \wedge I_2) + p(I_1 \wedge \alpha_{21}) + p(I_1 \wedge \alpha_{22}) + p(I_1 \wedge U_2) + \cdots + p(\alpha_{11} \wedge \alpha_{22})$，
- $p(\alpha_i) = p(\alpha_{1i} \wedge \alpha_{2i}) + p(U_1 \wedge \alpha_{2i}) + p(\alpha_{1i} \wedge U_2)$，
- $p(U) = p(U_1 \wedge U_2)$。

这时需要应用传感器间的独立性假设，它隐含了 $p(a_1 \wedge a_2) \equiv p(a_1)p(a_2)$。根据每个传感器 j 所给出的约束(8.8)，可以得到如下各式：

- $p(I) = m_1(\phi_1 \wedge \phi_2)m_2(\phi_1 \wedge \phi_2) + m_1(\phi_1 \wedge \phi_2)m_2(\phi_1) + \cdots + m_1(\phi_1)m_2(\phi_2)$，
- $p(\alpha_i) = m_1(\phi_i)m_2(\phi_i) + m_1(\phi_1 \vee \phi_2)m_2(\phi_i) + m_1(\phi_i)m_2(\phi_1 \vee \phi_2)$，
- $p(U) = m_1(\phi_1 \vee \phi_2)m_2(\phi_1 \vee \phi_2)$。

最终，它们隐含了 $m_1 \oplus m_2$ 的定义，即

$$p(I) = m_1 \oplus m_2(\phi_1 \wedge \phi_2),\ p(\alpha_i) = m_1 \oplus m_2(\phi_i),$$
$$p(U) = m_1 \oplus m_2(\phi_1 \vee \phi_2)$$

通过概率化模态命题对于 DSmT 的解释已经隐含了融合规则$\oplus$，对于这个结果将在下一节中进行更严格和更普遍的研究。

8.6 多模态逻辑与信息融合

本节是对上一节所得结果的推广，这里的介绍更加形式化。特别地，我们构建

了用于信息融合的多模态逻辑。这里并没有进行深入的介绍，它假设读者已经对某些逻辑概念比较熟悉。

8.6.1 模态逻辑

在这个介绍性的小节中，我们仅对模态逻辑感兴趣，特别是T系统。这里没有必要去考虑一个更好的系统，因为我们只关注模态$\Box$、$\neg\Box$、$\Diamond$和$\neg\Diamond$的操作。

在Φ上给定一系列原子命题，经典的命题集合$C(\Phi)$简写为C，可以如下定义：

- $\Phi\subset C$，$\bot\in C$且$\top\in C$；
- 如果$\phi,\psi\in C$，则$\neg\phi\in C$，$\phi\wedge\psi\in C$，$\phi\vee\psi\in C$且$\phi\rightarrow\psi\in C$。

模态命题的集合$M(\Phi)$简写为M，可以用如下方式构成：

- $C\subset M$；
- 如果$\phi\in M$，则$\Box\phi\in M$且$\Diamond\phi\in M$；
- 如果$\phi,\psi\in M$，则$\neg\phi\in M$，$\phi\wedge\psi\in M$，$\phi\vee\psi\in M$且$\phi\rightarrow\psi\in M$。

命题$\Box\phi$表示命题ϕ必然是真的，$\Diamond\phi$表示命题ϕ可能是真的。

最后，符号$\vdash\phi$表示在T系统中可以证明ϕ是真的。对于一个命题ϕ来说，$\vdash\phi$也称为一个公理。关系式$\phi\equiv\psi$表示$\vdash\phi\rightarrow\psi$和$\vdash\psi\rightarrow\phi$同时成立。

所有的公理通过假设推演规则和初始公理而递归定义。

假言定理(MP)：对于任意命题$\phi,\psi\in M$，若$\vdash\phi$和$\vdash\phi\rightarrow\psi$同时成立，就可以推断出$\vdash\psi$。

经典公理：对于任意的命题$\phi,\psi,\eta\in M$，假定存在下面的公理。

(1) $\vdash\top$；

(2) $\vdash\phi\rightarrow(\psi\rightarrow\phi)$；

(3) $\vdash(\eta\rightarrow(\phi\rightarrow\psi))\rightarrow((\eta\rightarrow\phi)\rightarrow(\eta\rightarrow\psi))$；

(4) $\vdash(\neg\phi\rightarrow\neg\psi)\rightarrow((\neg\phi\rightarrow\psi)\rightarrow\phi)$；

(5) $\bot\equiv\neg\top$；

(6) $\phi\rightarrow\psi\equiv\neg\phi\vee\psi$；

(7) $\phi\wedge\psi\equiv\neg(\neg\phi\vee\neg\psi)$。

通过这些公理可以推断出：

- 关系式$\vdash\phi\rightarrow\psi$是关于最小关系$\bot$以及最大关系$\top$的一个前置命题，$\bot$是最强的命题，$\top$是最弱的命题；
- 符号$\equiv$表示等价的关系。

模态公理与规则：令$\phi,\psi\in M$，则有如下结论。

ⅰ. 从$\vdash\phi$可以推断出$\vdash\Box\phi$；这个公理是必然的。而这并不意味着$\vdash\phi\rightarrow\Box\phi$，因为它是错误的。

ⅱ. $\vdash\Box(\phi\rightarrow\psi)\rightarrow(\Box\phi\rightarrow\Box\psi)$。如果推论和前提是必然的,那么结论也是必然的。

ⅲ. $\vdash\Box\phi\rightarrow\psi$。必然的命题必然是真的。

ⅳ. $\Diamond\phi\equiv\neg\Box\neg\phi$。不确定的命题并不必然是假的。

可以推断出命题$\Box\phi$强于ϕ,而后者又强于$\Diamond\phi$。

符号:最后,$\psi\leqslant\phi$表示$\vdash\psi\rightarrow\phi$,而$\psi<\phi$表示$\psi\leqslant\phi$且$\phi\not\equiv\psi$。

与$\equiv$相匹配的逻辑算子:定义$\phi_{/\equiv}=\{\psi\in M/\psi\equiv\phi\}$作为$\phi$的等价命题。令$\phi$,$\psi\in M$,$\hat{\phi}\in\phi_{/\equiv}$且$\hat{\psi}\in\psi_{/\equiv}$,则可以得到

- $\hat{\phi}\rightarrow\hat{\psi}\in(\phi\rightarrow\psi)_{/\equiv}$
- $\neg\hat{\phi}\in(\neg\phi)_{/\equiv}$
- $\hat{\phi}\wedge\hat{\psi}\in(\phi\wedge\psi)_{/\equiv}$
- $\hat{\phi}\vee\hat{\psi}\in(\phi\vee\psi)_{/\equiv}$
- $\Box\hat{\phi}\in(\Box\phi)_{/\equiv}$
- $\Diamond\hat{\phi}\in(\Diamond\hat{\psi})_{/\equiv}$

M上的逻辑操作因而可以很自然推广到M的等价命题上,即

- $\phi_{/\equiv}\rightarrow\psi_{/\equiv}\triangleq(\phi\rightarrow\psi)_{/\equiv}$
- $\neg\phi_{/\equiv}\triangleq(\neg\phi)_{/\equiv}$
- $\phi_{/\equiv}\wedge\psi_{/\equiv}\triangleq(\phi\wedge\psi)_{/\equiv}$
- $\phi_{/\equiv}\vee\psi_{/\equiv}\triangleq(\phi\vee\psi)_{/\equiv}$
- $\Box\phi_{/\equiv}\triangleq(\Box\phi)_{/\equiv}$
- $\Diamond\phi_{/\equiv}\triangleq(\Diamond\phi)_{/\equiv}$

从现在起,将$\phi_{/\equiv}$简记为ϕ。

超幂集:根据性质,$\Phi\subset F(\Phi)$并且$\forall\phi,\psi\in F(\Phi)$,$[\phi\wedge\psi\in F(\Phi)$且$\phi\vee\psi\in F(\Phi)]$,可以递归地构建经典命题$F(\Phi)$的子集。将$\Phi$的超幂集表示成$\langle\Phi\rangle$,它是$F(\Phi)$基于关系式$\equiv$的等价命题的集合,即

$$\langle\Phi\rangle=F(\Phi)_{/\equiv}=\{\phi_{/\equiv}/\phi\in F(\Phi)\}$$

有用的定理

令$\phi,\psi\in M$,则:

(1) $\vdash(\Box\phi\wedge\Box\psi)\rightarrow\Box(\phi\wedge\psi)$且$\vdash\Box(\phi\wedge\psi)\rightarrow(\Box\phi\wedge\Box\psi)$;

(2) $\vdash(\Diamond\phi\vee\Diamond\psi)\rightarrow\Diamond(\phi\vee\psi)$且$\vdash\Diamond(\phi\vee\psi)\rightarrow(\Diamond\phi\vee\Diamond\psi)$;

(3) $\vdash(\Box\phi\vee\Box\psi)\rightarrow\Box(\phi\vee\psi)$但$\nvdash\Box(\phi\vee\psi)\rightarrow(\Box\phi\vee\Box\psi)$;

(4) $\vdash\Diamond(\phi\wedge\psi)\rightarrow(\Diamond\phi\wedge\Diamond\psi)$但$\nvdash(\Diamond\phi\wedge\Diamond\psi)\rightarrow\Diamond(\phi\wedge\psi)$。

证明:由于定理(1)和定理(2)是对偶的,因此它们是等价的(规则(7)以及ⅳ.)。定理(3)和定理(4)完全类同。

对于$\vdash(\Box\phi\wedge\Box\psi)\rightarrow\Box(\phi\wedge\psi)$的证明如下。

根据经典的规则可以得到下面的公理:

$\vdash\phi\rightarrow(\psi\rightarrow(\phi\wedge\psi))$

规则ⅰ. 隐含了

$\vdash\Box(\phi\rightarrow(\psi\rightarrow(\phi\wedge\psi)))$

应用规则ⅱ. 两次可以推理出:

$\vdash\Box\phi\rightarrow\Box(\psi\rightarrow(\phi\wedge\psi))$

$\vdash\Box\phi\rightarrow(\Box\psi\rightarrow\Box(\phi\wedge\psi))$

然后应用经典的规则就可得出结论。

对于$\vdash \Box(\phi \wedge \psi) \to (\Box\phi \wedge \Box\psi)$的证明如下。

根据经典的规则可以得到下面的公理：

$\vdash (\phi \wedge \psi) \to \phi$ 且 $\vdash (\phi \wedge \psi) \to \psi$

规则 i. 隐含了

$\vdash \Box((\phi \wedge \psi) \to \phi)$ 且 $\vdash \Box((\phi \wedge \psi) \to \psi)$

应用规则 ii. 可以推理出

$\vdash \Box(\phi \wedge \psi) \to \Box\phi$ 且 $\vdash \Box(\phi \wedge \psi) \to \Box\psi$

然后应用经典的规则就可得出结论。

对于$\vdash (\Box\phi \vee \Box\psi) \to \Box(\phi \vee \psi)$的证明如下。

根据经典的规则可以得到下面的公理：

$\vdash \phi \to (\phi \vee \psi)$ 且 $\vdash \psi \to (\phi \vee \psi)$

规则 i. 隐含了

$\vdash \Box(\phi \to (\phi \vee \psi))$ 且 $\vdash \Box(\psi \to (\phi \vee \psi))$

应用规则 ii. 可以推理出

$\vdash \Box\phi \to \Box(\phi \vee \psi)$ 且 $\vdash \Box\psi \to \Box(\phi \vee \psi)$

然后应用经典的规则就可得出结论。

为什么$\nvdash \Box(\phi \vee \psi) \to (\Box\phi \vee \Box\psi)$?

要准确地回答这个问题，需要介绍 Kripke 语义学的概念，这种讨论已经超出了本章的研究范围。然而，根据经验考虑就可以判定这种结果。当$\phi \vee \psi$必然是真的时候是否就意味着ϕ必然是真的或者ψ必然是真的？事实并非如此，因为我们知道ϕ或者ψ是真的，但是我们并不知道哪一个是真的。而且可能会发生这种情况，某些时刻ϕ是真的，而在另一些时刻ψ是真的。所以可以得出结论：对ϕ和ψ都不确定。

这个例子是$\vdash \Box(\phi \vee \psi) \to (\Box\phi \vee \Box\psi)$的一个反例。

8.6.2 多模态逻辑

假设根据几个不同的信息源得到了不同的信息。典型的情况是，利用模态命题可以将这些信息表示成"根据信息源σ，命题ϕ必然是正确的"的形式。这种形式很自然地可以表示成$\Box_\sigma\phi$（依赖于σ的一种形式），不过我们更喜欢采用另一种更易读的符号$[\phi|\sigma] \triangleq \Box_\sigma\phi$来表示。这里应该注意$[\phi|\sigma]$与贝叶斯推理$[\phi|\sigma]$是没有关系的。现在，存在一个这样的问题：如何组合这些模态？例如，从$[\phi_1|\sigma_1] \wedge [\phi_2|\sigma_2]$可能会推断出哪些情况？当然，若各个不同的模态形式没有任何关系，那么对于上述问题无能为力。然而，这种关系却是可以得知的。假定信息源τ包括信息源σ，即$\tau \to \sigma$。现在假设根据信息源σ可以得知命题ϕ，即$[\phi|\sigma]$。由于信息源

τ包括σ，因而我们可以很自然地作出判定：根据信息源τ也可以得知命题ϕ，即$[\phi|\tau]$。上述自然推断可以根据下面的规则进行形式化：

$$\vdash \tau \rightarrow \sigma \text{ 隐含 } \vdash [\phi|\sigma] \rightarrow [\phi|\tau]$$

有了上述规则，才可以对逻辑进行定义。

对于多模态命题的集合$mM(\Phi)$，也可以简记成mM，可采用下面递归的形式进行定义：

- $C \subset mM$；
- 如果$\phi, \sigma \in mM$，则$[\phi|\sigma] \in mM$；
- 如果$\phi, \psi \in mM$，则$\neg \phi \in mM, \phi \wedge \psi \in mM, \phi \vee \psi \in mM, \phi \rightarrow \psi \in mM$。

多模态逻辑遵循下面的规则和公理：

假言定理（MP）。

经典的公理：公理（1）至公理（7）。

模态公理与规则：令$\sigma, \tau, \phi, \psi \in mM$，则

m. ⅰ. 由$\vdash \phi$可以推断出$\vdash [\phi|\sigma]$：对于任意信息源，这些公理都是必然的。

m. ⅱ. $\vdash [\phi \rightarrow \psi|\sigma] \rightarrow ([\phi|\sigma] \rightarrow [\psi|\sigma])$：如果根据一个信息源断定了某个命题，并且公认为更弱的命题，那么由此信息源也可以断定此更弱的命题。

m. ⅲ. $\vdash [\phi|\sigma] \rightarrow \phi$，信息源总是能断定出真实的结果，如果由某个信息源能够断定某个命题，那么此命题确实是真的。

m. ⅳ. $\vdash \tau \rightarrow \sigma$ 隐含 $\vdash [\phi|\sigma] \rightarrow [\phi|\tau]$，信息源越可靠，所能获得的知识量越多。

公理 m. ⅲ. 存在着疑问，它可能会被改变。但本章中所进行的操作是限定在这个公理上的。

这里也可以考虑一些其他的规则，比如$\phi \equiv [\phi|\bot]$，即通过一个理想的信息源可以得到命题ϕ的一个理想的信息。与此相类似，模态命题$[\phi|\top]$可被解释为下面的命题："ϕ是一个绝对的事实"或者"ϕ是可被证明的"。断定一个绝对的事实不需要任何信息源。

8.6.3 一些多模态定理

1. 模态定理映射为多模态逻辑

令$\mu \in M$是一个模态命题，$\sigma \in mM$是一个多模态命题。令$\mu[\sigma] \in mM$为一个多模态命题，它是通过将命题μ上的□和◇分别替换为$[\cdot|\sigma]$和$\neg[\neg \cdot|\sigma]$而得到的。那么可以得到：$\vdash \mu$ 隐含 $\vdash \mu[\sigma]$。

2. 有用的多模态定理

如果根据信息源σ与τ可以分别断定命题ϕ与ψ，那么融合后的信息源可以断定命题$\phi \wedge \psi$，即

$$\boxed{\vdash([\phi|\sigma]\wedge[\psi|\tau])\rightarrow[\phi\wedge\psi|\sigma\wedge\tau]}$$

证明：根据公理 $\vdash(\sigma\wedge\tau)\rightarrow\sigma$ 以及 $\vdash(\sigma\wedge\tau)\rightarrow\tau$，可以推断出

$$\vdash[\phi\mid\sigma]\rightarrow[\phi\mid\sigma\wedge\tau]$$

和

$$\vdash[\psi\mid\tau]\rightarrow[\psi\mid\sigma\wedge\tau]$$

根据用于证明模态逻辑的有用定理，可以推出

$$[\phi\mid\sigma\wedge\tau]\wedge[\psi\mid\sigma\wedge\tau]\equiv[\phi\wedge\psi\mid\sigma\wedge\tau]$$

然后应用经典的规则就可得出结论。

如果根据信息源 σ 或者 τ 其中的一个可以断定命题 ϕ，那么融合后的信息源可以断定命题 ϕ，即

$$\vdash([\phi\mid\sigma]\vee[\phi\mid\tau])\rightarrow[\phi\mid\sigma\wedge\tau]$$

证明：可以直接通过 $\vdash[\phi|\sigma]\rightarrow[\phi|\sigma\wedge\tau]$ 和 $\vdash[\phi|\tau]\rightarrow[\phi|\sigma\wedge\tau]$ 来得到这个结论。

将上述结果倒过来却并不一定是真的，即

$$\nvdash[\phi\mid\sigma\wedge\tau]\rightarrow([\phi\mid\sigma]\vee[\phi\mid\tau])$$

事实上，当传感器不是相互独立并且可能会互相影响时，融合后的传感器 $\sigma\wedge\tau$ 可能会比单独依靠传感器 σ 与 τ 工作得到更好的结果。另一方面，这个逆向的结论可以被认为是传感器独立性的一个必要条件。上述讨论引出了一个新的公理，即独立性公理：

$$\text{m. indep.}\quad\vdash[\phi\mid\sigma\wedge\tau]\rightarrow([\phi\mid\sigma]\vee[\phi\mid\tau])$$

8.6.4 传感器融合

1. 前后联系

σ 和 τ 为两个传感器，根据它们能够得到关于一系列原子命题 Φ 的信息。更确切地说，这些传感器将独立地量测每个命题 $\phi\in\langle\Phi\rangle$ 为真的概率。本节将介绍如何融合这些信息源。

我们将明确应用多模态逻辑的形式来解决这个问题。典型的情况是，$[\cdot|\sigma]$ 表征了信息源 σ 关于整个空间 $\langle\Phi\rangle$ 的信息。更确切地说，命题 $[\phi|\sigma]$ 表示根据信息源 σ 的真假决定命题 ϕ。这里的信息是概率化了的，即我们所用到的数据都是 $p([\phi|\sigma])$ 和 $p([\phi|\tau])$，其中 $\phi\in\langle\Phi\rangle$。下一节所给出的问题将更加形式化。

符号：从现在起，用 $p([\phi|\sigma])$ 来代替 $p([\phi|\sigma])$。这里要注意 $p([\phi|\sigma])$ 并不是指条件概率 $p(\phi|\sigma)$。

2. 传感器模型与相关问题

由集合 $\Theta=\Phi\cup\{\sigma,\tau\}$ 可以构建多模态命题的集合 $mM(\Theta)$。这里命题 σ 和 τ

与两个独立的传感器是相关的，而$\sigma\wedge\tau$是与融合后的传感器相关的。这里假定命题$\vee_{\phi\in\Phi}\phi$必然是真的，即$\vee_{\phi\in\Phi}\phi$，从而可得

$$[\bigvee_{\phi\in\Phi}\phi\mid\sigma\wedge\tau]\equiv[\bigvee_{\phi\in\Phi}\phi\mid\sigma]\equiv[\bigvee_{\phi\in\Phi}\phi\mid\tau]\equiv[\bigvee_{\phi\in\Phi}\phi\mid\top]\equiv\top$$

以及

$$p[\bigvee_{\phi\in\Phi}\phi\mid\sigma\wedge\tau]=p[\bigvee_{\phi\in\Phi}\phi\mid\sigma]=p[\bigvee_{\phi\in\Phi}\phi\mid\tau]=1$$

通过传感器σ和τ可以得出关于其他命题的确切概率信息，确切地说，就是我们所知的$p([\phi|\sigma])$和$p[\phi|\tau]$，其中$\phi\in\langle\Phi\rangle$。

由于命题σ和τ是关于两个独立传感器的，我们假定：

- 对于σ和τ，公理 m. indep. 成立；
- 对于任意的$\phi,\psi\in\langle\Phi\rangle$，$p([\phi|\sigma]\wedge[\psi|\tau])=p[\phi|\sigma]p[\psi|\tau]$。

我们希望得到融合后传感器的相关信息：对于任意$\phi\in\langle\Phi\rangle$，如何计算$p[\phi|\sigma\wedge\tau]$?

3. 融合信度的构建

定义方法：对于任意的$\phi\in\langle\Phi\rangle$，我们定义如下非常有用的命题$\phi^{(\sigma)}$：

$$\phi^{(\sigma)}\triangleq[\phi\mid\sigma]\wedge\neg([\bigvee_{\varphi\in\langle\Phi\rangle:\psi<\phi}[\psi\mid\sigma])$$

对于τ可以定义同样的命题$\phi^{(\tau)}$：

$$\phi^{(\tau)}\triangleq[\phi\mid\tau]\wedge\neg(\bigvee_{\varphi\in\langle\Phi\rangle:\psi<\phi}[\psi\mid\tau])$$

性质：命题$\phi^{(\sigma)}$是相互排斥的，即对于任意的$\phi\neq\psi$，$\phi^{(\sigma)}\wedge\psi^{(\sigma)}\equiv\bot$。

证明：由于$[\phi|\sigma]\wedge[\psi|\sigma]\equiv[\phi\wedge\psi|\sigma]$，则可以推断出

$$\phi^{(\sigma)}\wedge\psi^{(\sigma)}\equiv[\phi\wedge\psi\mid\sigma]\wedge\neg(\bigvee_{\eta:\eta<\psi}[\eta\mid\sigma])\wedge\neg(\bigvee_{\eta:\eta<\psi}[\eta\mid\sigma])$$

则

$$\phi^{(\sigma)}\wedge\psi^{(\sigma)}\equiv[\phi\wedge\psi\mid\sigma]\wedge(\bigwedge_{\eta:\eta<\psi}\neg[\eta\mid\sigma])\wedge(\bigwedge_{\eta:\eta<\psi}\neg[\eta\mid\sigma])$$

由于当$\phi\neq\psi$时，有$\phi\wedge\psi<\phi$或者$\phi\wedge\psi<\psi$，所以可以推出上述性质。

引理：$\bigvee_{\psi:\psi<\phi}[\psi|\sigma]\leqslant[\phi|\sigma]$。

证明：通过性质$\psi<\phi$可以依次推出$\vdash\psi\to\phi$，$\vdash[\psi\to\phi|\sigma]$且$\vdash[\psi|\sigma]\to[\phi|\sigma]$，最后就可以推断出该引理。

命题$\phi^{(\sigma)}$是完备的，即

$$\bigvee_{\psi:\psi\leqslant\phi}\psi^{(\sigma)}\equiv[\phi\mid\sigma]\text{，特殊的情形是}\bigvee_{\phi\in\langle\Phi\rangle}\phi^{(\sigma)}\equiv\top\text{。}$$

证明：这里是利用递归的证明方法。首先，$\langle\Phi\rangle$中最小的元素是$\mu\equiv\wedge_{\phi\in\langle\Phi\rangle}\phi$，可以验证$\mu^{(\sigma)}\equiv[\phi|\sigma]$。

其次

$$\bigvee_{\psi:\psi\leqslant\phi}\psi^{(\sigma)}\equiv\phi^{(\sigma)}\vee(\bigvee_{\psi:\psi<\phi}\psi^{(\sigma)})\equiv\phi^{(\sigma)}\vee(\bigvee_{\psi:\psi<\phi}\bigvee_{\eta:\eta\leqslant\psi}\eta^{(\sigma)})\equiv\phi^{(\sigma)}\vee(\bigvee_{\psi:\psi<\phi}[\psi\mid\sigma])$$

由于 $\phi^{(\sigma)}\equiv[\phi|\sigma]\wedge\neg(\bigvee_{\psi:\psi<\phi}[\psi|\sigma])$ 且 $\bigvee_{\psi:\psi<\phi}[\psi|\sigma]\leqslant[\phi|\sigma]$，则可以得到

$$\bigvee_{\psi:\psi\leqslant\phi}\psi^{(\sigma)}\equiv[\phi\mid\sigma]$$

性质的第二部分可以直接从下面的式子得到：

$$\bigvee_{\phi\in\langle\Phi\rangle}\phi^{(\sigma)}\equiv\bigvee_{\psi:\psi\leqslant\bigvee_{\phi:\phi\in\Phi}\phi}\psi^{(\sigma)}\text{ 且}[\bigvee_{\phi\in\Phi}\phi\mid\sigma]\equiv\top$$

命题 $\phi^{(\tau)}$ 也是相互排斥和完备的，即对于任意的 $\phi\not\equiv\psi$，有

$$\phi^{(\tau)}\wedge\psi^{(\tau)}\equiv\bot$$

并且

$$\bigvee_{\phi\in\langle\Phi\rangle}\phi^{(\tau)}\equiv\top$$

那么也可以推断出命题 $\phi^{(\sigma)}\wedge\psi^{(\tau)}$ 是相互排斥和完备的①，即

$$\forall\phi_1,\psi_1,\phi_2,\psi_2\in\langle\Phi\rangle,(\phi_1,\psi_1)\not\equiv(\phi_2,\psi_2)\Rightarrow(\phi_1^{(\sigma)}\wedge\psi_1^{(\tau)})\wedge(\phi_2^{(\sigma)}\wedge\psi_2^{(\tau)})\equiv\bot\tag{8.9}$$

以及

$$\bigvee_{\phi,\psi\in\langle\Phi\rangle}(\phi^{(\sigma)}\wedge\psi^{(\tau)})\equiv\top\tag{8.10}$$

根据性质(8.9)和性质(8.10)，可以得到下面的集合：

$$\sum=\{\phi^{(\sigma)}\wedge\psi^{(\tau)}/\phi,\psi\in\langle\Phi\rangle\}$$

此集合是⊤的一个划分。这个性质非常有趣，因为它使得计算任意由 Σ 因子构成的命题的概率成为可能，即

$$\forall\Lambda\subset\sum,p(\bigvee_{\phi\in\Lambda}\phi)=\sum_{\phi\in\Lambda}p(\phi)\tag{8.11}$$

分解 $\phi^{(\sigma\wedge\tau)}$：根据已经得到的式子 $\vdash([\phi|\sigma]\wedge[\psi|\tau])\rightarrow[\phi\wedge\psi|\sigma\wedge\tau]$，可以得到

$$\vdash\bigvee_{\phi\wedge\psi\leqslant\eta}([\phi\mid\sigma]\wedge[\psi\mid\tau])\rightarrow[\eta\mid\sigma\wedge\tau]\tag{8.12}$$

结合独立性定理 $\vdash[\eta|\sigma\wedge\tau]\rightarrow([\eta|\sigma]\vee[\eta|\tau])$，由于 $[\bigvee_{\phi\in\Phi}\phi|\sigma]\equiv[\bigvee_{\phi\in\Phi}\phi|\tau]\equiv\top$，可以推断出

$$\vdash[\eta\mid\sigma\wedge\tau]\rightarrow(([\eta\mid\sigma]\wedge[\bigvee_{\phi\in\Phi}\phi\mid\tau])\vee([\bigvee_{\phi\in\Phi}\phi\mid\sigma]\wedge[\eta\mid\tau]))$$

最终可以得到

$$[\eta\mid\sigma\wedge\tau]\equiv\bigvee_{\phi\wedge\psi\leqslant\eta}([\phi\mid\sigma]\wedge[\psi\mid\hat{\tau}])\tag{8.13}$$

然后可以推出

① 符号 $(\phi_1,\psi_1)\equiv(\phi_2,\psi_2)$ 意味着 $\phi_1\equiv\phi_2$ 且 $\psi_1\equiv\psi_2$。

$$\phi^{(\sigma\wedge\tau)} \equiv [\phi \mid \sigma \wedge \tau] \wedge \neg(\bigvee_{\psi<\phi} \mid \psi \mid \sigma \wedge \tau)$$

$$\equiv (\bigvee_{\eta\wedge\zeta\leqslant\phi}([\eta \mid \sigma] \wedge [\zeta \mid \tau])) \wedge \neg(\bigvee_{\psi<\phi}\bigvee_{\eta\wedge\zeta\leqslant\psi}([\eta \mid \sigma] \wedge [\zeta \mid \tau]))$$

则

$$\bigvee_{\eta\wedge\zeta\leqslant\phi}([\eta \mid \sigma] \wedge [\zeta \mid \tau]) \equiv \bigvee_{\eta\wedge\zeta\leqslant\phi}((\bigvee_{\xi\leqslant\eta}\xi^{(\sigma)}) \wedge (\bigvee_{\chi\leqslant\zeta}\chi^{(\tau)}))$$

$$\equiv \bigvee_{\eta\wedge\zeta\leqslant\phi}\bigvee_{\xi\leqslant\eta}\bigvee_{\chi\leqslant\zeta}(\xi^{(\sigma)} \wedge \chi^{(\tau)}) \equiv \bigvee_{\eta\wedge\zeta\leqslant\phi}(\eta^{(\sigma)} \wedge \zeta^{(\tau)})$$

最后

$$\phi^{(\sigma\wedge\tau)} \equiv (\bigvee_{\eta\wedge\zeta\leqslant\phi}(\eta^{(\sigma)} \wedge \zeta^{(\tau)})) \wedge \neg(\bigvee_{\psi<\phi}\bigvee_{\eta\wedge\zeta\leqslant\psi}(\eta^{(\sigma)} \wedge \zeta^{(\tau)}))$$

$$\equiv (\bigvee_{\eta\wedge\zeta\leqslant\phi}(\eta^{(\sigma)} \wedge \zeta^{(\tau)})) \wedge \neg(\bigvee_{\eta\wedge\zeta<\phi}(\eta^{(\sigma)} \wedge \zeta^{(\tau)}))$$

由于 Σ 是一个划分，所以可以推出最后的结果为

$$\boxed{\phi^{(\sigma\wedge\tau)} \equiv \bigvee_{\eta\wedge\zeta\equiv\phi}\eta^{(\sigma)} \wedge \zeta^{(\tau)}} \tag{8.14}$$

以及

$$p(\phi^{(\sigma\wedge\tau)}) = \sum_{\eta\wedge\zeta\equiv\phi} p(\eta^{(\sigma)} \wedge \zeta^{(\tau)}) \tag{8.15}$$

只要能够计算出在 Σ 上命题的概率，利用上述最后的结果就可以推导出 $p[\phi|\sigma\wedge\tau]$，下面将解释计算过程。

计算 $p(\phi^{(\sigma)})$ 与 $p(\phi^{(\tau)})$：这些概率可以通过 $p[\phi|\sigma]$ 与 $p[\phi|\tau]$ 递归地计算出来。更确切地说，根据定义 $\phi^{(\sigma)}\equiv[\phi|\sigma]\wedge\neg(\bigvee_{\psi<\phi}[\psi|\sigma])$ 以及性质 $[\phi|\sigma]\equiv\bigvee_{\psi\leqslant\phi}\psi^{(\sigma)}$，可推导出

$$\phi^{(\sigma)} \equiv [\phi \mid \sigma] \wedge \neg(\bigvee_{\psi<\phi}\psi^{(\sigma)})$$

由于命题 $\phi^{(\sigma)}$ 是相互排斥的并且 $\bigvee_{\psi<\phi}\psi^{(\sigma)}<[\psi|\sigma]$，则可以得到

$$p(\phi^{(\sigma)}) = p[\phi \mid \sigma] - \sum_{\psi<\phi} p(\psi^{(\sigma)}) \tag{8.16}$$

这个等式与 Moebius 变换有关，根据它，可以充分地利用递归的方式将 $p(\phi^{(\sigma)})$ 计算出来。

推导 $p(\phi^{(\sigma\wedge\tau)})$：首先，利用递归的方式给出下面的结论：

$$p(\phi^{(\sigma)} \wedge \psi^{(\tau)}) = p(\phi^{(\sigma)})p(\psi^{(\tau)}) \tag{8.17}$$

证明步骤 1：对于最小的元素 $\mu\equiv\bigwedge_{\phi\in\langle\Phi\rangle}\phi$，存在 $\mu(\sigma)\equiv[\mu|\sigma]$ 以及 $\mu^{(\tau)}\equiv[\mu|\tau]$，又因为 $[\mu|\sigma]$ 和 $[\mu|\tau]$ 是独立的命题，所以 $p(\mu^{(\sigma)}\wedge\mu^{(\tau)})=p(\mu^{(\sigma)})p(\mu^{(\tau)})$。

证明步骤 2：给定命题 $\phi,\psi\in\langle\Phi\rangle$，假定对于任意的 η、$\zeta\in\langle\Phi\rangle$（($\eta\leqslant\phi$ 且 $\zeta<\psi$) 或者 ($\eta<\phi$ 且 $\zeta\leqslant\psi$)）存在 $p(\eta^{(\sigma)}\wedge\zeta^{(\tau)})=p(\eta^{(\sigma)})p(\zeta^{(\tau)})$。根据 $[\phi|\sigma]\equiv\bigvee_{\eta\leqslant\phi}\eta^{(\sigma)}$ 以及 $[\psi|\tau]\equiv\bigvee_{\zeta\leqslant\psi}\zeta^{(\tau)}$，则可以推出

$$[\phi \mid \sigma] \wedge [\psi \mid \tau] \equiv (\bigvee_{\eta\leqslant\phi}\eta^{(\sigma)}) \wedge (\bigvee_{\eta\leqslant\psi}\zeta^{(\tau)}) \equiv \bigvee_{\eta\leqslant\phi}\bigvee_{\zeta\leqslant\psi}(\eta^{(\sigma)} \wedge \zeta^{(\tau)})$$

则

$$\begin{cases} p([\phi \mid \sigma] \wedge [\psi \mid \tau]) = \sum_{\eta \leqslant \phi} \sum_{\zeta \leqslant \psi} p(\eta^{(\sigma)} \wedge \zeta^{(\tau)}) \\ p[\phi \mid \sigma] = \sum_{\eta \leqslant \phi} p(\eta^{(\sigma)}) \\ p[\psi \mid \tau] = \sum_{\zeta \leqslant \psi} p(\zeta^{(\tau)}) \end{cases}$$

现在，$[\phi|\sigma]$和$[\psi|\tau]$是相互独立的，并且 $p([\phi|\sigma] \wedge [\psi|\tau]) = p[\phi|\sigma]p[\psi|\tau]$，那么有

$$\sum_{\eta \leqslant \phi} \sum_{\zeta \leqslant \psi} p(\eta^{(\sigma)} \wedge \zeta^{(\tau)}) = \sum_{\eta \leqslant \phi} \sum_{\zeta \leqslant \psi} p(\eta^{(\sigma)}) p(\zeta^{(\tau)})$$

根据上面递归的假设可以推断出 $p(\phi^{(\sigma)} \wedge \psi^{(\tau)}) = p(\phi^{(\sigma)}) p(\psi^{(\tau)})$。

根据分解式(8.15)，可以推断出

$$\boxed{p(\phi^{(\sigma \wedge \tau)}) = \sum_{\eta \wedge \zeta \equiv \phi} p(\eta^{(\sigma)}) p(\zeta^{(\tau)})} \tag{8.18}$$

上述结果强烈地依赖于传感器间的独立性假设。

返回到$[\phi|\sigma \wedge \tau]$：根据等式$[\phi|\sigma \wedge \tau] \equiv \bigvee_{\psi \leqslant \phi} \psi^{(\sigma \wedge \tau)}$，利用这个关系可以由 $p(\psi^{(\sigma \wedge \tau)})$推导出融合后的概率 $p(\psi^{(\sigma \wedge \tau)})$，即

$$p[\phi \mid \sigma \wedge \tau] = \sum_{\psi \leqslant \phi} p(\psi^{(\sigma \wedge \tau)}) \tag{8.19}$$

结论：根据两个独立的传感器 σ 和 τ 获得的 $p[\phi|\sigma]$，$\phi \in \langle \Phi \rangle$ 以及 $p[\phi|\tau]$，$\phi \in \langle \Phi \rangle$，从而得到精确的融合信息 $p[\phi|\sigma \wedge \tau]$，$\phi \in \langle \Phi \rangle$。推导出上述结果的过程是通过下面三个步骤实现的：

- 根据式(8.16)计算 $p(\phi^{(\sigma)})$与 $p(\phi^{(\tau)})$；
- 根据式(8.18)计算 $p(\phi^{(\sigma \wedge \tau)})$；
- 根据式(8.19)计算 $p[\phi|\sigma \wedge \tau]$。

4. 与 DSmT 的联系

值得注意的是，关系式(8.18)看起来非常像 DSmT 的融合规则(8.4)，尽管这两个结果是通过十分不同的方式得到的。事实上，这里的相似性不仅仅局限在融合规则上，整个构建过程也是很类似的。为了更确切地了解这种情况，先利用 DSmT 的观点考虑这个问题。

分别定义 m_σ 与 m_τ 来表示传感器 σ 和 τ 在$\langle \Phi \rangle$上的 bba，与这两个 bba 相关的信度函数分别表示为 Bel_σ 与 Bel_τ，可以验证

$$\mathrm{Bel}_\sigma(\phi) = \sum_{\psi \leqslant \phi} m_\sigma(\psi), \mathrm{Bel}_\tau(\phi) = \sum_{\psi \leqslant \phi} m_\tau(\psi)$$

反过来，通过递归的方式也可以得到 bba m_σ，即

$$\forall \phi \in \langle \Phi \rangle, m_\sigma(\phi) = \mathrm{Bel}_\sigma(\phi) - \sum_{\psi < \phi} m_\sigma(\psi)$$

融合后的 bba$m_\sigma \oplus m_\tau$ 定义为

$$m_\sigma \oplus m_\tau(\phi) = \sum_{\psi \wedge \eta \equiv \phi} m_\sigma(\psi) m_\tau(\eta)$$

现在假设对于任意的 $\phi \in \langle \Phi \rangle$，将 $p[\phi|\sigma]$和 $p[\phi|\tau]$初始化为

$$p[\phi \mid \sigma] = \mathrm{Bel}_\sigma(\phi),\ p[\phi \mid \tau] = \mathrm{Bel}_\tau(\phi)$$

那么，可以很明显地得到下面的结果：

- $p(\phi^{(\sigma)}) = m_\sigma(\phi)$，$p(\phi^{(\tau)}) = m_\tau(\phi)$；
- $p(\phi^{(\sigma \wedge \tau)}) = m_\sigma \oplus m_\tau(\phi)$；
- $p[\phi|\sigma \wedge \tau] = \mathrm{Bel}_\sigma \oplus \mathrm{Bel}_\tau(\phi)$，其中的 $\mathrm{Bel}_\sigma \oplus \mathrm{Bel}_\tau$ 是与 $m_\sigma \oplus m_\tau$ 相关的信度函数。

根据上面的讨论，可以很自然地将概率化多模态逻辑 mM 作为 DSmT 一个可能的逻辑解释。对独立性公理重要性的评价：通过用独立性公理，可以证明式(8.13)，否则只可能证明式(8.12)。这种情况与独立传感器的情形相比，意味着可能将更多的信度赋予最小的命题上。根据这种性质，可以更好、更精确地表达整个世界的信息。根据 DSmT 的解释 mM，可以看出仅对于融合独立(严格)可靠的信息源，融合规则$\oplus$才表现出其最优性。

8.7 贝叶斯推理的逻辑解释

符号：在后文中，$\phi \leftrightarrow \psi$ 与$(\psi \rightarrow \phi) \wedge (\phi \rightarrow \psi)$是相等价的符号。

一般性讨论：贝叶斯推理研究的是在已知命题 ϕ 的情况下，命题 ψ 发生的概率。这个概率可以用 $p(\psi|\phi)$表示为 $p(\phi \wedge \psi) = p(\phi) p(\psi|\phi)$。

根据上面概率的含义，这个本质上的逻辑算子$(\psi|\phi)$看起来更像是一个数学运算。然而，$(\psi|\phi)$有一个清晰的先后逻辑意义，尽管它很直观并且隐含了当已知先验信息 ϕ 时关于命题 ψ 的信息。本节尽力将贝叶斯算子$(|)$解释为一个逻辑操作。我们承认，这个观点看起来很不可信：贝叶斯推理意味着对概率化空间的改变，因而也就表示着真值的改变！将条件概率和非条件概率用同样的方式看待是毫无意义的。但实际存在处理复合事实的逻辑——模态逻辑，更精确地说是多模态逻辑。然而，这里定义的模型与通常的模态模型是非常不一样的。

从现在起，假设上述逻辑包含所有的算子，即 $\wedge$、$\neg$、$\vee$、$\rightarrow$和$(|)$，并且定义在所有结果命题上相同的概率函数为 p。

当定义一个逻辑时，第一步很可能就是列举出这个新的逻辑所应有的直观性

质，而后推导出它的新形式语言与规则。由于概率是在布尔代数的基础上建立起来的，因此这个逻辑也将包含经典的逻辑。这样就出现了第一个问题：贝叶斯推理($|$)与经典的逻辑是不是相同的模型？更确切地说，$(\psi|\phi)\equiv\phi\rightarrow\psi$是否成立？如果我们的逻辑模型与经典的概率是一致的，则隐含

$$p(\psi \mid \phi) = p(\phi \rightarrow \psi) = p(\neg \phi \vee \psi)$$

然后应用贝叶斯规则，就可以推断出

$$p(\phi \wedge \psi) = p(\phi)p(\neg \phi \vee \psi) = [p(\phi \wedge \psi) + p(\phi \wedge \neg \psi)][1 - p(\phi \wedge \neg \psi)]$$

这明显是错的，例如令$p(\phi\wedge\neg\psi)=\frac{1}{4}$，$p(\phi\wedge\psi)=\frac{1}{2}$，那么结果为$\frac{1}{2}=\frac{9}{16}$！所以贝叶斯推理$(\psi|\phi)$并不是一个经典的推理，由于它是新的，因此必须要解释这种推理的意义。

贝叶斯推理要依赖于下面原理：

- 任何命题ϕ都可以引出一个子空间，它完全由贝叶斯算子$(\cdot|\phi)$来刻画。所以，$(\cdot|\phi)$可以被看作一个条件模态，但这个模态拥有一个奇特的性质：隐含的子空间本质上是经典的。从现在起，$(\cdot|\phi)$不仅与模态相关，还与它所引出的子空间相关。
- 子空间$(\cdot|\top)$正好是整个空间。空集空间$(\cdot|\top)$是一个在其上不能进行操作的特殊空间。
- 子空间$(\cdot|\phi)$是一个映射（可以看作另外一个子空间）到ϕ的超空间。特别地，在$(\cdot|\phi)$上作为公理的命题就相当于在子空间ϕ范围内作为公理的命题。而且，假言定理应该作用在子空间上。
- 任何子命题$(\psi|\phi)$都隐含了在子空间中推导出的命题$\phi\rightarrow\psi$。后者并不是前者的逆过程，前者涉及到公理，因为它要考虑任何可能的命题。这种不同是必然的，以便区分出($|$)与$\rightarrow$。
- 由于子空间是经典的，因而否定操作是一个经典的行为——双重否定表示肯定。
- 一个子空间的子空间是子空间的一个分割。例如，“在一个鸟类的空间中考虑蓝色的动物”也就意味着“考虑蓝色的鸟”。

命题独立性的概念是与贝叶斯推理相关联的，它不是一个逻辑算子，因而我们将其描述为先后算子$\times$。更确切地说，ψ和ϕ是独立的，即$\psi\times\phi$，也就是说在子空间ϕ上或者其他子空间上考虑命题ψ是等价的。确定这个准算子是否合适可能又是一个哲学问题。在后面的公理化过程中，令这个假设是可能的但不是必需的。而且，除了$\phi\equiv\top$，互补的命题（如ϕ与$\neg\phi$）并不是独立的，这种考虑是合理的。在下面的讨论中，我们也提出了这个规则，但它也不是必需的。

8.7.1 定义

1. 贝叶斯模态语言

贝叶斯命题集合 bM 可以利用递归的方式构建出来：

- $C \subset bM$；
- 如果 $\phi, \psi \in bM$，则 $(\psi|\phi) \in bM$；
- 如果 $\phi, \psi \in bM$，则 $\neg\phi \in bM$，$\phi \wedge \psi \in bM$，$\phi \vee \psi \in bM$，$\phi \rightarrow \psi \in bM$。

2. 贝叶斯逻辑规则

bM 上的逻辑遵循下面的规则和公理：

- 经典的公理与假言定理

b. ⅰ. $(\phi|\top) \equiv \phi$；$\top$ 的子空间当然是整个空间。

b. ⅱ. 假设 $\nvdash \neg\phi$，那么 $\vdash \phi \rightarrow \psi$ 隐含 $\vdash (\psi|\phi)$；在 ϕ 范围内的公理是子空间 $(\cdot|\phi)$ 中的公理。

b. ⅲ. 假设 $\nvdash \neg\phi$，那么 $\vdash (\psi \rightarrow \eta|\phi) \rightarrow ((\psi|\phi) \rightarrow (\eta|\phi))$；在一个子空间中，当一个推理和一个前提是真时，那么在此子空间中结论也是真的。这个定理承认了子空间中的假言定理。

b. ⅳ. 假设 $\nvdash \neg\phi$，那么 $\vdash (\psi|\phi) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)$；模态 $(\cdot|\phi)$ 隐含了在范围 ϕ 内的真理。

b. ⅴ. 假设 $\nvdash \neg\phi$，那么 $\neg(\neg\psi|\phi) \equiv (\psi|\phi)$；在模态 $(\cdot|\phi)$ 上这是毋庸置疑的。子空间中拥有经典的否定算子。然而，根据参考命题的情况，这个真理可能会改变。

b. ⅵ. 假设 $\nvdash \neg(\phi \wedge \psi)$[①]，那么 $((\eta|\psi)|\phi) \equiv (\eta|\psi \wedge \phi)$；子空间 $(\cdot|\psi)$ 的一个子空间 $(\cdot|\phi)$ 是一个分割的子空间 $(\cdot|\phi \wedge \psi)$。

b. ⅶ. $\psi \times \phi$ 表示 $\vdash (\psi|\phi) \leftrightarrow \psi$；一个命题 ψ 独立于另一个命题 ϕ，它表示命题 ψ 的发生与是否在这个子空间 $(\cdot|\phi)$ 中观察它毫无关系。

b. ⅷ.（可选的）$\psi \times \phi$ 隐含了 $\phi \times \psi$；独立性是对称的。

b. ⅸ.（可选的）假设 $\phi \times \psi$ 以及 $\vdash \phi \vee \psi$，这隐含了 $\vdash \phi$ 或者 $\vdash \psi$；这个不平凡的逻辑规则说明了互补的以及不平凡的命题并不能独立。举一个极端的例子，ϕ 和 $\neg\phi$ 是严格互补，同时也不是独立的，除非 $\phi \equiv \top$ 或者 $\phi \equiv \bot$。

在子空间 $(\cdot|\phi)$ 上的任意推理必须要求条件 $|\nvdash \neg\phi$，因而这些公理没有定义模态 $(\cdot|\bot)$。事实上，$(\cdot|\bot)$ 是一个很特殊的模态，我们不能根据一般的公理和规则对它进行定义，否则就会从 $\vdash \bot \rightarrow \phi$ 推断出 $\vdash (\phi|\bot)$，而将这个规则应用在

① 可以证明这个假设 $|\nvdash \neg(\phi \wedge \psi)$ 隐含了假设 $\nvdash \neg\phi$ 和 $\nvdash (\neg\psi|\phi)$。

任意命题 ϕ 上都会与否定规则 $\neg(\neg\phi|\perp)\equiv(\phi|\perp)$ 相矛盾。不过，公理 b. ⅶ. 与公理 b. ⅷ. 引出的 $\times$ 的定义对于除去 $(\perp|\perp)$ 的任意成对的命题都成立。

8.7.2 概率

1. *bM* 的概率

根据 8.4 节的定义我们给出了 bM 的概率 p。特殊情形下，先后关系算子 $\times$ 表征了命题间的独立性，所以可以很自然地给出下面的假设：

$$\phi\times\psi \text{ 隐含了 } p(\phi\wedge\psi)=p(\phi)p(\psi)$$

2. 有用的定理

子空间是经典的：假定 $\nvdash\neg\phi$，那么有

- $(\neg\psi|\phi)\equiv\neg(\psi|\phi)$；
- $(\psi\wedge\eta|\phi)\equiv(\psi|\phi)\wedge(\eta|\phi)$；
- $(\psi\vee\eta|\phi)\equiv(\psi|\phi)\vee(\eta|\phi)$；
- $(\psi\rightarrow\eta|\phi)\equiv(\psi|\phi)\rightarrow(\eta|\phi)$。

证明：第一个定理是公理 b. ⅴ. 的结果。

根据公理 b. ⅲ. 可以推断出 $\vdash(\neg\psi\vee\eta|\phi)\rightarrow(\neg(\eta|\phi)\vee(\eta|\phi))$，然后应用第一个定理则得到 $\vdash(\neg\psi\vee\eta|\phi)\rightarrow((\neg\psi|\phi)\vee(\eta|\phi))$，最后可得

$$\vdash(\psi\vee\eta|\phi)\rightarrow((\psi|\phi)\vee(\eta|\phi)) \tag{8.20}$$

然后可以推断出 $\vdash\neg((\psi|\phi)\vee(\eta|\phi))\rightarrow\neg(\psi\vee\eta|\phi)$，应用第一个定理得到

$$\vdash((\neg\psi|\phi)\wedge(\neg\eta|\phi))\rightarrow(\neg\psi\wedge\neg\eta|\phi)$$

最后得出

$$\vdash((\psi|\phi)\wedge(\eta|\phi))\rightarrow(\psi\wedge\eta|\phi)$$

现在从 $\vdash\phi\rightarrow((\psi\wedge\eta)\rightarrow\psi)$ 可以推断出

$$\vdash((\psi\wedge\eta)\rightarrow\psi|\phi)$$

通过应用公理 b. ⅲ. 可得

$$\vdash(\psi\wedge\eta|\phi)\rightarrow(\psi|\phi)$$

用类似的方法证明 $\vdash(\psi\wedge\eta|\phi)\rightarrow(\eta|\phi)$，最后得到

$$\vdash(\psi\wedge\eta|\phi)\rightarrow((\psi|\phi)\wedge(\eta|\phi))$$

第二个定理即得到证明。

第三个定理可以从第一个和第二个定理推理得到。

最后一个定理是应用第一个和第三个定理得到的结果。

推理的性质：假定 $\nvdash\neg\phi$，那么 $(\psi|\phi)\wedge\phi\equiv\phi\wedge\psi$，特别是下面的假设 $\nvdash(\phi\wedge\psi)$ 隐含了假设 $\nvdash\neg\phi$ 和 $\nvdash(\neg\psi|\phi)$。

证明：根据公理 b. ⅳ. 可以得到 $\vdash(\psi|\phi)\rightarrow(\phi\rightarrow\psi)$，然后得到 $\vdash\neg(\phi\rightarrow\psi)\rightarrow\neg(\psi|\phi)$ 以及 $\vdash(\phi\wedge\neg\psi)\rightarrow(\neg\psi|\phi)$，接着可得到 $\vdash(\phi\wedge\psi)\rightarrow(\psi|\phi)$，并最终得到

$$\vdash(\phi\wedge\psi)\rightarrow((\psi|\phi)\wedge\phi)$$

逆过程更简单。从 $\vdash(\psi|\phi)\rightarrow(\phi\rightarrow\psi)$ 可得到

$$\vdash((\psi|\phi)\wedge\phi)\rightarrow((\phi\rightarrow\psi)\wedge\phi)$$

由于 $(\phi\rightarrow\psi)\wedge\phi\equiv\phi\wedge\psi$，所以逆过程得证。

内在独立性：假定 $\nvdash\neg\phi$，那么由性质 $\vdash((\eta|\psi)\leftrightarrow\eta|\phi)$ 可以等价地定义 $(\eta|\phi)\times(\psi|\phi)$。

证明：

$$\begin{aligned}((\eta|\psi)\leftrightarrow\eta|\phi)&\equiv((\eta|\psi)|\phi)\leftrightarrow(\eta|\phi)\equiv(\eta|\phi\wedge\psi)\leftrightarrow(\eta|\phi)\\&\equiv(\eta|\phi\wedge(\psi|\phi))\leftrightarrow(\eta|\phi)\\&\equiv((\eta|\phi)|(\psi|\phi))\leftrightarrow(\eta|\phi)\end{aligned}$$

不变独立性：$\psi\times\phi$ 隐含了 $\neg\psi\times\phi$。

证明：

$$(\neg\psi|\phi)\leftrightarrow\neg\psi\equiv\neg(\psi|\phi)\leftrightarrow\neg\psi\equiv(\psi|\phi)\leftrightarrow\psi$$

交互独立性：假定 $\nvdash\neg\phi$，则 $(\psi|\phi)\times\phi$。

证明：根据公理 b. ⅵ.，有

$$((\psi|\phi)|\phi)\equiv(\psi|\phi\wedge\phi)\equiv(\psi|\phi)$$

可以推断出 $(\psi|\phi)\times\phi$。

推论：假设规则 b. ⅷ. 与 b. ⅸ. 成立，则假设 $\nvdash\neg\phi$ 与 $\nvdash(\neg\psi|\phi)$ 隐含了假设 $\nvdash\neg(\phi\wedge\psi)$。

证明：假设 $\vdash\neg(\phi\wedge\psi)$，那么 $\vdash\neg(\phi\wedge(\psi|\phi))$，$\vdash\neg\phi\vee\neg(\psi|\phi)$。因为 $(\neg\psi|\phi)\times\phi$，所以根据规则 b. ⅷ. 可以得到 $\phi\times(\neg\psi|\phi)$，接着得到 $\neg\phi\times\neg(\psi|\phi)$。现在将规则 b. ⅸ. 应用到 $\vdash\neg\phi\vee\neg(\psi|\phi)$ 上，就可以得到 $\vdash\neg\phi$ 或者 $\vdash\neg(\psi|\phi)$。

一个命题在它固有的子空间中是真的：假定 $\nvdash\neg\phi$，那么 $\vdash(\phi|\phi)$。

证明：从 $\vdash\phi\rightarrow\phi$ 可以明显地得到。

自我独立性：假定 $\nvdash\neg\phi$，则 $\phi\times\phi$ 隐含了 $\vdash\phi$，逆过程也一样。特别的情形是 $\phi\times\phi$ 隐含了 $\phi\equiv\top$。

证明：

$$(\phi|\phi)\leftrightarrow\phi\equiv\top\leftrightarrow\phi\equiv\phi$$

非传递性：假定 $\nvdash\neg\phi$ 和 $\nvdash\neg\psi$，则有

$$\nvdash(\psi|\phi)\rightarrow((\eta|\psi)\rightarrow(\eta|\phi))$$

证明：若选择 $\psi\equiv\top$，$\eta\equiv\neg\phi$ 和 $\phi\not\equiv\top$，就可以得到一个反例，即

$$(\top \mid \phi) \to ((\neg\phi \mid \top) \to (\neg\phi \mid \phi)) \equiv \top \to (\neg\phi \to \bot) \equiv \phi$$

3. 将公理和规则扩展到子空间

假定 $\nvdash \neg\phi$,那么将 bM 上的公理和规则扩展到子空间(· $|\phi$)上,可得到

- $\vdash \psi$ 隐含了 $\vdash(\psi|\phi)$;
- 假定 $\nvdash \neg(\phi\wedge\psi)$,则 $\vdash(\psi\to\eta|\phi)$隐含了 $\vdash((\eta|\psi)\phi)$;
- 假定 $\nvdash \neg(\phi\wedge\psi)$,则 $\vdash((\eta\to\zeta|\psi)|\phi)\to((\eta|\psi)\to(\zeta|\psi)|\phi)$;
- 假定| $\nvdash \neg(\phi\wedge\psi)$,则 $\vdash((\eta|\psi)|\phi)\to(\psi\to\eta|\phi)$。

证明:$\vdash\psi$ 隐含了 $\vdash(\psi|\phi)$,接着得到 $\vdash(\psi|\phi)$,则第一点即得到证明。

根据 $\vdash(\psi\to\eta|\phi)$,可以连续地推导出

$$\vdash(\psi \mid \phi) \to (\eta \mid \phi)$$
$$\vdash((\eta \mid \phi) \mid (\psi \mid \phi))$$
$$\vdash(\eta \mid \phi \wedge (\psi \mid \phi))$$
$$\vdash(\eta \mid \phi \wedge \psi)$$
$$\vdash((\eta \mid \psi) \mid \phi)$$

即第二点也得到了证明。

应用公理 b. ⅲ. 和第一点,得到

$$\vdash((\eta\to\zeta \mid \psi) \to ((\eta \mid \psi) \to (\zeta \mid \psi)) \mid \phi)$$

则

$$\vdash((\eta\to\zeta \mid \psi) \mid \phi) \to ((\eta \mid \psi) \to (\zeta \mid \psi) \mid \phi)$$

那么第三点也得到了证明。

应用公理 b. ⅳ. 以及第一点,可以得到

$$\vdash((\eta \mid \psi) \to (\psi\to\eta) \mid \phi)$$

则

$$\vdash((\eta \mid \psi) \mid \phi) \to (\psi\to\eta \mid \phi)$$

第四点也得到了证明。

4. 贝叶斯推理

假定 $\nvdash \neg\phi$,定义 $p(\psi|\phi)$来表示 $p((\phi|\phi))$,那么

$$p(\psi \mid \phi)p(\phi) = p(\phi \wedge \psi)$$

证明:根据定理$(\psi|\phi)\wedge\phi\equiv\phi\wedge\psi$ 以及$(\psi|\phi)\times\phi$ 就可以得到这个结果。

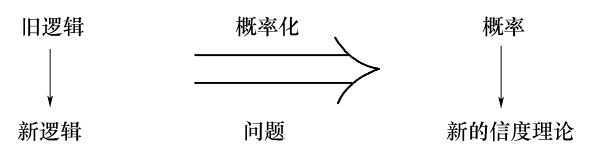
5. 小结

最后,通过对算子(· | ·)的公理化过程得到贝叶斯推理。尽管这个结果还有待于更深入的研究,特别表现在对 bM 一致性的证明上,但是仍然能够根据贝叶斯

推理解释的合理性来使它成为一种处理信息的方式。在 DSmT 的融合规则上我们也得到了相似的结果。最后，我们猜想可以将逻辑和概率结合在一起研究，来获得更多其他的信度规则或推理。

8.8 结论

从本章中看出，可以在概率化多模态逻辑的框架下对 DSmT 进行解释。很明显，在对融合规则⊕进行逻辑解释时，传感器间的独立性假设是必须要有的。此外，正如读者所期待的那样，我们对与 DSmT 的合取规则相关的语义学给出了一些解释，也对贝叶斯推理给出了类似的解释，尽管其早期的工作还有待改进。最后，可以将概率化逻辑作为处理不确定信息相对一般的框架。这或许就是构建新的可行性信度理论的一般方法，其准则是，首先构建一个非常适用于这个问题的逻辑，然后对这个逻辑进行概率化，最后推理出它所隐含新的信度理论（并忘掉旧的逻辑）：



很明显，在处理不确定信息方面还有很多其他的理论和规则。这里介绍的结果也并不是全新的，在研究该理论的过程中还必须要参考前人的研究，如 Sombo、Lefevre、De Brucq 以及其他人的一些著作[6,4,7]。

最后，将逻辑 mM 与 bM 融合在一起还可以得到既能解释 DSmT 又能解释贝叶斯推理的更一般的框架。

致谢

本人非常感谢 Dezert 博士和 Smarandache 教授对于本文的关注。

参考文献

[1] Dempster A. P., *Upper and lower probabilities induced by a multiple valued mapping.*. Ann. Math. Statistics, no. 38, pp. 325-339, 1967.

[2] Dempster A. P., *A generalization of Bayesian inference*, J. Roy. Statist. Soc., Vol. B, No. 30, pp. 205-247, 1968.

[3] Dezert J., *Foundations for a new theory of plausible and paradoxical reasoning*, Information & Security, An international Journal, edited by Prof. Tzv. Semerdjiev, CLPP, Bulg. Acad. of Sciences, Vol. 9, pp. 13-57, 2002.

[4] Lefevre E., Color O., Vannoorenberghe P., *Belief functions combination and conflict management*, Information Fusion Journal, Elsevier, 2002.

[5] Sharer G., *A Mathematical Theory of Evidence*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1976.

[6] Sombo A., *Thesis Manuscript: Contribution à la modélisation mathématique de l'imprécis et de l'incertain*, Applied Mathematics, University of Rouen, France, 2001.

[7] De Brucq D., Color O., Sombo A., *Identical Foundation of Probability Theory and Fuzzy Set Theory*, IF 2002, 5th International Conference on Information, Annapolis, Maryland, pp. 1442-1449, July, 2002.

[8] Smets Ph., *The combination of evidences in the transferable belief model*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. 12, no. 5, pp. 447-458, 1990.

[9] Voorbraak F., *Partial probability: theory and applications*, ISIPT A'99 First International Symposium on Imprecise Probabilities, Ghent, Belgium, pp. 655-662, 1999.

第 9 章　证据源的合取和析取组合规则

Hongyan Sun and Mohamad Farooq
Department of Electrical &Computer Engineering
Royal Military College of Canada
Kingston, ON, Canada, K7K 7B4

摘要:本章在多值映射(MVM)和多独立信息源的乘积组合规则的基础上,对 Dempster—Shafer (DS)组合规则进行分析。上述规则可以合理地解释 DS 规则的缺点。基于以上结论,本章提出一种新的析取规则。该规则是基于逻辑判断 OR 进行的,它能够克服 DS 规则的不足,特别是在非直观的情形下。本章将分析和比较证据源的合取、析取以及混合组合规则,详细介绍各个规则的性质。除此之外,本章还将讨论每个证据源的角色,每个规则的组合判别信度和未知集赋值大小的比较,对信息源给定的冲突信息的处理,以及这些组合规则的应用。新的结果对这些可用于给定情形的规则产生了较具价值的理论依据。本章为了对每个组合规则在冲突情形下的性能和效率进行评价,还将介绍 Zadeh 的例子。

9.1　引言

多源信息融合理论是多源信息处理中的一个重要领域,这一领域最初的重要贡献得益于 Dempster 的规则[1]。Dempster 根据多信息源的乘积空间以及多值映射得到了多独立信息源的组合规则。在乘积空间中,多值映射的组合映射定义为每个多值映射的交集,即某个命题被组合信息源所支持,当且仅当它能够同时得到每个信息源的共同支持,无论基本判别概率有多大。Shafer 将 Dempster 理论的空间推广到一个给定集合的所有子集(也就是幂集),还定义了鉴别框、信度度,并进一步提出了多独立信息源的新组合规则,也就是 Dempster - Shafer(DS)组合规则[2]。然而,文献[2]并没有对该规则的解释、执行及计算方法进行足够详细的介绍。由于上述文献缺少很多细节,所以本章将介绍实现 DS 组合规则的很多方法。

例如，兼容性关系[3,4]、随机子集[5—7]、内在概率[8,9]、联合熵[10]等方法都被应用以达到文献[2]中的结果。除此之外，这些方法还被用于很多其他的领域，如工程、医药、统计、心理、哲学、计算[11]以及多传感器融合[12—16]等。DS 组合规则由于不需要先验概率并能处理未知集，所以较 Bayesian 判别规则更具实效性。而许多研究人员也列出了 DS 技术的缺点，例如某些证据源的非直观结果[17—19]、计算的费用和信息源的独立性[20,21]。

证据源的 DS 组合规则存在的一个问题是，组合空集的基本概率信度不为零，即 $m(\varnothing)=0$。然而，这个值本应该是零，即 $m(\varnothing)=0$。为了解决这个问题，可以通过正交化方法对剩下的基本概率赋值进行重新分配[2]。而在组合两个强信息源，特别是这两个强信息源仅含有一个相同的焦元时(也就是说这两个信息源存在冲突)，又会出现一个更严重的问题，从而导出正如 Zadeh 所指出的非直观的结果。除此之外，DS 组合规则还不能用于两个强信息源不存在相同焦元的情形。由于 DS 规则中存在正交化因子，所以上述问题都不是最主要的[22,23]。

总的来说，解决 Shafer 问题主要有两种方法。一种方法是假定 $m(\varnothing)\neq 0$ 或者 $m(\varnothing)>0$。在文献[20,24,25,26,27,28]中，Smets 的 TBM，以及 Yager、Dubois - Prade、Dezert—Smarandache(DSm)组合规则利用上述的假定进行了分析。另一种方法是，在组合后的焦元中不允许出现空集，在析取组合规则[22,23,29,30,31]中应用了这种思想。此外，E. Lefèvre 等提出了证据源的一种更通用的组合规则[32]，并进一步从中得出了合取组合规则。

本章将介绍在信息源的组合规则上做过的一些工作。基于从概率空间 (X,Ω,μ) 到空间 S 的一个多值映射，我们在 S 的子集 2^S 上定义了一个概率量测。接着，我们运用多个信息源的乘积组合规则，得出了 Dempster - Shafer 组合规则。对这两个规则进行研究分析，我们发现 Dempster 的规则与 DS 组合规则对应于不同的空间，根据用于多独立信息源的乘积组合规则，能够合理地解释 DS 组合规则中的某些问题。文献[11]中指出了多值映射中的一个错误，并进行了证明。

此外，这里对多独立信息源的析取组合规则提出了一种新的解释，它是建立在组合映射规则之上的，这里的组合映射规则是对多独立信息源乘积空间的多重多值映射进行的重定义。这个组合规则揭示了人的判断中的一种合理的推理类型，即 OR 规则。它克服了 DS 的 AND 组合规则的缺点，尤其是在非直观的情形下，它在被不同信息源支持的不同命题上能够得到比 DS 组合规则更可接受的判别结果。

最后，在两个独立信息源的情形下，我们研究了证据源的合取和析取的组合规则，也就是 DS 组合规则、Yager 组合规则、Dubois - Prade(DP)组合规则、DSm 组合规则和析取组合规则。我们详细讨论了各个证据源组合规则的性质，比如每个信息源在组合判断中的角色，每个组合规则组合判断信度和未知集赋值大小的比

较，两个信息源给出的冲突信息的处理，以及组合规则的应用。新的结果对这些可用于给定情形的规则产生了很有价值的理论依据。本章为了对每个组合规则在冲突情形下的性能和效率进行评价，还介绍了 Zadeh 的例子。

9.2 序言

9.2.1 信息源和多值映射

考虑到 n 个信息源和相应的多值映射[1]。它们在算术上被定义为 n 个基本概率空间 (X_i, Ω_i, μ_i) 和多值映射 Γ_i，该映射对于每个 $x_i \in X_i (i=1,2,\cdots,n)$ 将分配一个子集 $\Gamma_i x_i \subset S$ 与其相对应。对每一个 i，Γ_i 对应的空间 S 都是相同的，即 n 个不同的信息源在空间 S 中产生一致的不确定结果的信息。

假设 n 个信息源是独立的，则在统计学独立性定义的基础上，组合信息源 (X, Ω, μ) 可被定义为

$$X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \tag{9.1}$$

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n \tag{9.2}$$

$$\mu = \mu_1 \times \mu_2 \times \cdots \times \mu_n \tag{9.3}$$

对于所有的 $x \in X$，Γ 定义为

$$\Gamma x = \Gamma_1 x \cap \Gamma_2 x \cap \cdots \cap \Gamma_n x \tag{9.4}$$

Γ 的定义暗示了当且仅当对于所有的 $i=1,2,\cdots,n$，$s \in \Gamma_i x_i$ 时，$x_i \in X_i$ 和一个特定的 $s \in S$ 是一致的。因而，在当且仅当对于所有的 $i=1,2,\cdots,n$，$s \in \Gamma_i x_i$ 均成立的情况下，$x=(x_1, x_2, ..., x_n) \in X$ 和 s 是一致的[1]。

对于有限的集合 $S=\{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$，假设 $S_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n}$ 表示集合 S 的子集，对于 $j=1,2,\cdots,n$，当 $\delta_j=1$ 时，该子集包括 s_j，而当 $\delta_j=0$ 时，该子集不包括 s_j。对于所有的 $\Gamma_i x_i$，如此定义的 2^n 个 S 的子集都是存在的，并且它将 X_i 分割为

$$X_i = \bigcup_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_m} X^{(i)}_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_m} \tag{9.5}$$

式中

$$X^{(i)}_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n} = \{x_i \in X_i, \Gamma_i x_i = S_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n}\} \tag{9.6}$$

并定义[1]

$$p^{(i)}_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n} = \mu(X^{(i)}_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n}) \tag{9.7}$$

9.2.2 独立信息源的 Dempster's 组合规则

基于式(9.1)至式(9.7)，多独立信息源的判别概率组合可以通过 $p^{(i)}_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n}$ ($i=$

$1,2,\cdots,n$)表示出来，即

$$p_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n} = \sum_{\delta_i=\delta_i^{(1)}\delta_i^{(2)}\cdots\delta_i^{(n)}} p^{(1)}_{\delta_1^{(1)}\delta_2^{(1)}\cdots\delta_n^{(1)}} p^{(2)}_{\delta_1^{(2)}\delta_2^{(2)}\cdots\delta_n^{(2)}} \cdots p^{(n)}_{\delta_1^{(n)}\delta_2^{(n)}\cdots\delta_n^{(n)}} \tag{9.8}$$

式(9.8)说明：n 个独立信息源对于 s 中任一命题 $S_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n}$ 的组合判别概率等于每个独立信息源对该命题同时进行概率判别的乘积之和。它强调了每个独立信息源的共同角色，以上是通过乘积组合规则来刻画的。

9.2.3 信任度

定义 1：

如果 Θ 是一个鉴别框，则函数 $m: 2^{\Theta} \to [0,1]$被称为①一个基本信度赋值函数，只要

$$m(\varnothing) = 0 \tag{9.9}$$

和

$$\sum_{A\subseteq\Theta} = m(A) = 1 \tag{9.10}$$

成立。$m(A)$的数值称为 A 的信度质量（在文献[2]中也称为基本概率赋值）。

定义 2：

函数 Bel: $2^{\Theta} \to [0,1]$被称为 Θ 上的一个信度函数，只要它在某些基本概率赋值 $m: 2^{\Theta} \to [0,1]$ 上被赋予

$$\mathrm{Bel}(A) = \sum_{B\subseteq A} m(B) \tag{9.11}$$

定义 3：

对于鉴别框 Θ 中[2]的一个子集 A，当 $m(A)>0$ 时，它被称为信度函数 Bel 在 Θ 上的一个焦元。一个信度函数的所有焦元的并集称为该函数的核。

定理 1：

如果 Θ 是一个鉴别框，当且仅当满足以下三个条件时[2]，函数 Bel: $2^{\Theta} \to [0,1]$是一个信度函数：

(1)

$$\mathrm{Bel}(\varnothing) = 0 \tag{9.12}$$

(2)

$$\mathrm{Bel}(\Theta) = 1 \tag{9.13}$$

(3) 对于每一个正整数 n 和 Θ 子集中包含的每一个集合 $A_1,\cdots,A_n$，有

① 在文献[2]中也称为基本概率赋值。

$$\mathrm{Bel}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{\substack{I \subset \{1,\cdots,n\} \\ I \neq \varnothing}} (-1)^{|I|+1} \mathrm{Bel}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \tag{9.14}$$

定义 4：

函数 Pl：$2^{\Theta} \to [0,1]$定义为

$$\mathrm{Pl}(A) = 1 - \mathrm{Bel}(\overline{A}) \tag{9.15}$$

它被称为 Bel 的似真函数。$\overline{A}$ 表示 2^{Θ} 中集合 A 的补集。

定义 5：

如果 Θ 表示一个鉴别框，当且仅当满足如下三个条件[2]，函数 Bel：$2^{\Theta} \to [0,1]$被称为贝叶斯信度函数。

（1） $$\mathrm{Bel}(\varnothing)=0 \tag{9.16}$$

（2） $$\mathrm{Bel}(\Theta)=1 \tag{9.17}$$

（3）如果 $A,B \subset \Theta$ 且 $A \cap B = \varnothing$，那么 $\mathrm{Bel}(A \cup B) = \mathrm{Bel}(A) + \mathrm{Bel}(B)$ （9.18）

定理 2：

如果 Bel：$2^{\Theta} \to [0,1]$是鉴别框 Θ 下的一个信度函数，Pl 是与其相对应的似真函数，则以下结论是等价的[2]：

（1）该信度函数是贝叶斯信度函数；

（2）Bel 的每个焦元都是一个单命题集合；

（3）$\forall A \subset \Theta, \mathrm{Bel}(A) + \mathrm{Bel}(\overline{A}) = 1$ 。

9.2.4 DS 组合规则

定理 3：

假设 Bel_1 和 Bel_2 是相同鉴别框 $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n\}$下的信度函数，基本信度赋值为 m_1 和 m_2，对应的焦元分别是 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 和 $B_1, B_2, \cdots, B_l$，假设

$$\sum_{\substack{i,j \\ A_i \cap B_j = \varnothing}} m_1(A_i) m_2(B_j) < 1 \tag{9.19}$$

则此时函数 m：$2^{\Theta} \to [0,1]$定义为，$m(\varnothing)=0$ 且

$$m(A) = \frac{\displaystyle\sum_{\substack{i,j \\ A_i \cap B_j = \varnothing}} m_1(A_i) m_2(B_j)}{1 - \displaystyle\sum_{\substack{i,j \\ A_i \cap B_j = \varnothing}} m_1(A_i) m_2(B_j)} \tag{9.20}$$

对于所有的非空集合 $A \subseteq \Theta$，这是一个基本信度赋值函数[2]。m 所对应的信度函数的核与 Bel_1 和 Bel_2 的核的交集是相等的。以上定义了 Dempster－Shafer 的组合规则（后面用 DS 组合规则表示）。

9.3 由多值映射推导的 DS 组合规则

9.3.1 映射空间的概率测度定义

给定一个概率空间(X,Ω,μ)和一个多值映射的空间 S：

$$\Gamma : X \to S \tag{9.21}$$

$$\forall x \in X, \Gamma x \subset S \tag{9.22}$$

这里的问题在于如果已知某个不确定的结果对应于另一个不确定的结果 $s\in\Gamma x$，则需要明确不确定结果 $s\in\Gamma x$ 的判别概率。

假定 S 由 n 个命题组成，即 $S=\{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$。用 $S_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n}$ 表示 S 的子集，其中 $\delta_i=1$ 或 $0(i=1,2,\cdots,n)$，并且有

$$S_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n} = \bigcup_{i\neq j,\delta_i=1,\delta_j=0} s_i \tag{9.23}$$

则从映射式(9.21)至式(9.23)可以明显看出，$S_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n}$ 和 Γx 是相关的，因此，式(9.23)中 S 的 2^S 个子集可以产生 X 的一个区间，即

$$X = \bigcup_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n} X_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n} \tag{9.24}$$

式中

$$X_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n} = \{x \in X, \Gamma x = S_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n}\} \tag{9.25}$$

在集合 $2^S=\{S_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n}\}$上可以定义一个概率测度函数 $M: 2^S=\{S_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n}\}\to[0,1]$，即

$$M(S_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n}) = \begin{cases} 0, S_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n} = \varnothing \\ \dfrac{\mu(X_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n})}{1-\mu(X_{00\cdots0})}, S_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n} = \varnothing \end{cases} \tag{9.26}$$

式中：M 是 $2^S=\{S_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n}\}$上的一个概率测度，后者是 Γ 将 X 映射到的空间 S 的子集。

9.3.2 DS 组合规则的来历

给出两个独立信息源$(n=2)$，则从式(9.8)中可得出

$$\mu(X_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n}) = \sum_{\Gamma X_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n}=\Gamma^{(1)}X^{(1)}_{\delta'_1\delta'_2\cdots\delta'_n}\cap\Gamma^{(2)}X^{(2)}_{\delta''_1\delta''_2\cdots\delta''_n}} \mu^{(1)}(X^{(1)}_{\delta'_1\delta'_2\cdots\delta'_n})\mu^{(2)}(X^{(2)}_{\delta''_1\delta''_2\cdots\delta''_n}) \tag{9.27}$$

根据式(9.26)，如果 $S_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n}\neq\varnothing$，则对于 $i=1,2$，有

$$\mu^{(i)}(X_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n}) = M^{(i)}(S_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n})[1-\mu^{(i)}(X_{00\cdots0})] \tag{9.28}$$

并且

$$\mu(X_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n}) = M(S_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n})[1-\mu(X_{00\cdots0})] \tag{9.29}$$

式(9.28)和式(9.29)分别对应于信息源 $i(i=1,2)$以及它们的组合信息源。将式(9.28)和式(9.29)代入式(9.27),可以得出

$$M(S_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n}) = \frac{\sum\limits_{\delta=\delta'\delta''} M^{(1)}(S_{\delta'_1\delta'_2\cdots\delta'_n})M^{(2)}(S_{\delta''_1\delta''_2\cdots\delta''_n})[1-\mu^{(1)}(X^{(1)}_{00\cdots0})][1-\mu^{(2)}(X^{(2)}_{00\cdots0})]}{1-\mu(X_{00\cdots0})} \tag{9.30}$$

且

$$\begin{aligned} &\frac{[1-\mu^{(1)}(X^{(1)}_{00\cdots0})][1-\mu^{(2)}(X^{(2)}_{00\cdots0})]}{1-\mu(X_{00\cdots0})} \\ &= \frac{[1-\mu^{(1)}(X^{(1)}_{00\cdots0})][1-\mu^{(2)}(X^{(2)}_{00\cdots0})]}{\sum\limits_{\Gamma_1 X^{(1)}_{\delta'_1\delta'_2\cdots\delta'_n}\cap\Gamma_2 X^{(2)}_{\delta''_1\delta''_2\cdots\delta''_n}\neq\varnothing} \mu^{(1)}(X^{(1)}_{\delta'_1\delta'_2\cdots\delta'_n})\mu^{(2)}(X^{(2)}_{\delta''_1\delta''_2\cdots\delta''_n})} \\ &= \frac{1}{\sum\limits_{S_{\delta'_1\delta'_2\cdots\delta'_n}\cap S_{\delta''_1\delta''_2\cdots\delta''_n}\neq\varnothing} M^{(1)}(S_{\delta'_1\delta'_2\cdots\delta'_n})M^{(2)}(S_{\delta''_1\delta''_2\cdots\delta''_n})} \end{aligned} \tag{9.31}$$

将式(9.31)代入式(9.30)中,从而得到

$$M(S_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n}) = \frac{\sum\limits_{S_{\delta'_1\delta'_2\cdots\delta'_n}\cap S_{\delta''_1\delta''_2\cdots\delta''_n}=S_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n}} M^{(1)}(S_{\delta'_1\delta'_2\cdots\delta'_n})M^{(2)}(S_{\delta''_1\delta''_2\cdots\delta''_n})}{1-\sum\limits_{S_{\delta'_1\delta'_2\cdots\delta'_n}\cap S_{\delta''_1\delta''_2\cdots\delta''_n}=\varnothing} M^{(1)}(S_{\delta'_1\delta'_2\cdots\delta'_n})M^{(2)}(S_{\delta''_1\delta''_2\cdots\delta''_n})} \tag{9.32}$$

当 $S_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n}=\varnothing$ 时,有

$$M(S_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n}) \triangleq 0 \tag{9.33}$$

所以,式(9.32)和式(9.33)表示 DS 组合规则。这里,空间 $S=\{s_1,s_2,s_3,\cdots,s_n\}$表示鉴别框。

式(9.8)与式(9.32)、式(9.33)的物理意义是不相同的。其中,式(9.8)指出了 n 个独立信息源的组合空间(X,Ω,μ)上的组合判别概率,而式(9.32)、式(9.33)表示 n 个独立信息源映射空间$(S,2^S,M)$上的组合判别概率。映射 Γ 和 $\Gamma_i(i=1,2,\cdots,n)$将式(9.8)与式(9.32)、式(9.33)联系起来。这里说明了 Dempster 规则与 DS 组合规则的区别。

9.3.3 DS 组合规则中相关问题的新解释

从式(9.1)至式(9.8)的推导过程可以看出,DS 组合规则在算术上是基于多独立信息源的乘积组合规则。对于空间中的每个命题,独立信息源的组合判别概率来自于每个独立信息源同时的判别概率。也就是说,对于某个命题,若每个信息源同时给出它们的判别概率,那么该命题的组合判别概率可通过 DS 组合规则获得,而不考虑每个信息源的判别概率的大小。否则,它们是相反的。这样便产生了下面的问题。

1. 非直观结果

假设一个鉴别框是 $S=\{s_1,s_2,s_3\}$,两个不同信息源(X_i,Ω_i,μ_i),$i=1,2$ 的判别概率分别是 m_1 和 m_2,则对于

$$(X_1,\Omega_1,\mu_1):m_1(s_1)=0.99,m_1(s_2)=0.01$$

和

$$(X_2,\Omega_2,\mu_2):m_2(s_2)=0.01,m_2(s_3)=0.99$$

两个独立的判别概率利用 DS 规则进行组合,可以得出

$$m(s_2)=1,m(s_1)=m(s_3)=0 \tag{9.34}$$

这是非直观的。信息源(X_1,Ω_1,μ_1)对 s_1 存在一个很大的概率判决(为0.99),而对 s_2 有一个非常小的概率判决(为 0.01)。然而,利用 DS 组合规则得到的结果是,s_2 发生的概率测度是 1,其他情形发生的概率测度是 0。出现这种结果的原因是,这两个信息源仅对空间 $S=\{s_1,s_2,s_3\}$中的命题 s_2 同时给出了它们的判断,尽管它们对它的判别概率非常小(都等于 0.01),这两个信息源并没有对命题 s_1 和 s_3 同时进行判断。根据乘积组合规则,式(9.34)就是所能得到的结果。

需要指出的是,这种非直观的结果并不是完全由 DS 组合规则中高度冲突证据源[17,18,19]的标准化因子引起的。下面的例子可以证明这一点。

假设对于上面的鉴别框,选择另外两个独立信息源的判别函数分别为 m_3 和 m_4,且有

$$(X_3,\Omega_3,\mu_3):m_3(s_1)=0.99,m_3(S)=0.01$$

和

$$(X_4,\Omega_4,\mu_4):m_4(s_3)=0.99,m_4(S)=0.01$$

利用 DS 组合规则得到的结果是

$$m'(s_1)=0.4975,m'(s_3)=0.4975,m'(S)=0.0050$$

这一结果和式(9.34)的结果明显不同,尽管这两个信息源对于 s_1 和 s_3 的独立判别概率也是非常矛盾的。也就是说,信息源$\{X_3,\Omega_3,\mu_3\}$对 s_1 存在一个很大的概

率判决(为 0.99),对 S 有一个非常小的概率判决(为 0.01);然而,对于信息源 $\{X_4, \Omega_4, \mu_4\}$来说,它对 s_3 存在一个很大的概率判决(为 0.99),而对 S 有一个非常小的概率判决(为 0.01)。

这是由于这两个信息源的共同命题 $S=\{s_1, s_2, s_3\}$包括命题 s_1 和 s_3。所以,信息源(X_3, Ω_3, μ_3)中的命题 s_1 与信息源(X_4, Ω_4, μ_4)中的命题 $S=\{s_1, s_2, s_3\}$具有相同的信息,信息源(X_3, Ω_3, μ_3)中的命题 $S=\{s_1, s_2, s_3\}$与信息源(X_4, Ω_4, μ_4)中的命题 s_3 具有相同的信息。因而,两个独立的信息源能够为相同的概率判决命题 $S=\{s_1, s_2, s_3\}$同时提供信息,也能同时对相冲突的命题 s_1 和 s_3 分别产生信息,这正是乘积组合规则所需要的。

2. 贝叶斯(敏感的)信息源的组合

如果两个贝叶斯信息源不能同时给出鉴别框中任一命题的信息,那么这两个贝叶斯信息源不能通过 DS 组合规则进行组合。例如,在鉴别框 $S=\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$上有两个贝叶斯信息源(X_1, Ω_1, μ_1)和(X_2, Ω_2, μ_2),基本概率赋值分别为

$$(X_1, \Omega_1, \mu_1): m_1(s_1) = 0.4, m_1(s_2) = 0.6$$

和

$$(X_2, \Omega_2, \mu_2): m_2(s_3) = 0.8, m_2(s_4) = 0.2$$

此时它们的 DS 组合规则结果是

$$m(s_1) = m(s_2) = m(s_3) = m(s_4) = 0$$

这个结果说明在应用 DS 组合规则之后,鉴别框中的每一个命题发生的概率均为零。这是一个冲突,因为信息源(X_1, Ω_1, μ_1)给出了鉴别框 $S=\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$中命题 s_1 和 s_2 的概率判决,而信息源(X_2, Ω_2, μ_2)给出了鉴别框 $S=\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$中命题 s_3 和 s_4 的概率判决。由于两个信息源不能同时给出鉴别框 $S=\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$中任何一个命题的概率判决,所以,乘积组合规则在这种情形下失效。

基于以上分析,一个问题的可能解决方案是:在实际应用中放宽乘积组合规则(式(9.4)和式(9.5))的条件,并为多信息源的组合(参见 9.4 节和 9.5 节)建立一个新理论。

9.3.4 对 Shafer 论文中"多值映射"的评论

在文献[11]的第 331 页,G. Shafer 解释了 DS 组合规则的多值映射概念,Dempter 的规则被认为是信度 $\text{Bel}(T)=P\{x \mid \Gamma(x) \subseteq T, \forall T \subset S\}$组合。下面的证明说明了这是错误的。

证明:假设存在两个独立信息源,式(9.1)至式(9.4)则变为

$$X = X_1 \times X_2 \tag{9.35}$$

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \tag{9.36}$$

$$\mu = \mu_1 \times \mu_2 \tag{9.37}$$

$$\Gamma x = \Gamma_1 x \cap \Gamma_2 x \tag{9.38}$$

而

$$\mathrm{Bel}(T) \neq \mathrm{Bel}_1(T) \oplus \mathrm{Bel}_2(T)$$

事实上，$\forall T \subset S$，有

$$\{\Gamma(x) \subseteq T\} \not\Rightarrow \{\Gamma(X_1) \subseteq T\} \cap \{\Gamma(x_2) \subseteq T\}$$

因此

$$\{x \in X \mid \Gamma(x) \subseteq T\} \neq \{x_1 \in X_1 \mid \Gamma(x_1) \subseteq T\} \times \{x_2 \in X_2 \mid \Gamma(x_2) \subseteq T\}$$

也就是说，信度函数 $\mathrm{Bel}(T)=P\{x \mid \Gamma(x)\subseteq T, \forall T\subset S\}$ 并不满足式(9.35)至式(9.38)的乘积组合规则，所以并不能根据 $\mathrm{Bel}(T)=P\{x \mid \Gamma(x)\subseteq T, \forall T\subset S\}$ 从式(9.35)至式(9.38)中获得组合信度。当检查式(9.1)至式(9.4)的乘积组合规则时，发现它既不适合 Upper 概率，又不适合 Lower 概率(信度)，也不适合 $p_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n}=\mu\{X_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n}\}$ 类型[1]的概率。它仅适合带有多值映射的多个信息源的概率空间。

9.4 映射空间上概率测度的一个新组合规则

9.3 节已经说明，DS 组合规则在算术上是基于多独立信息源的乘积组合规则的。对于空间中的每个命题，独立信息源的组合判别概率来自于每个独立信息源同时的判别概率。也就是说，对于某个命题，若每个信息源同时给出它们的判别概率，那么该命题的组合判别概率可通过 DS 组合规则获得，而不考虑每个信息源的判别概率的大小，否则，得到的结果就不是可以接受的。这就是导致文献[17，18，19]中出现非直观结果的主要原因。为了放宽对 9.2.1 节中式(9.4)所表示的组合映射规则 Γ 的定义，利用 n 个独立映射 $\Gamma_i(i=1,2,\cdots,n)$ 对 Γ 进行重定义，从而实现乘积空间(X,Ω,μ)中的 $p^{(i)}_{\delta_2\delta_1\cdots\delta_n}$ 类型概率的组合。此外，这里也将建立映射空间 S 上多信息源的组合规则。

9.4.1 $P^{(i)}_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n}$ 概率组合规则的推导

对多重多值映射定义一个新的组合映射规则如下：

$$\Gamma x = \Gamma_1 x \cup \Gamma_2 x \cup \cdots \cup \Gamma_n x \tag{9.39}$$

可以看出，当且仅当 $s\in\Gamma_i x_i(i=1,2,\cdots,n)$时，$x_i\in X$ 与一个特定的 $s\in S$ 是一致的，所以，当且仅当存在一个特定的 $s\in\Gamma_i x_i$ ($i\in\{1, 2, \cdots, n\}$) 时，$x=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\in X$ 与 s 是一致的。

对于任何 $T \subset S$，构建集合

$$\overline{T} = \{x \in X, \Gamma x \subset T\} \tag{9.40}$$

$$\overline{T}_i = \{x_i \in X_i, \Gamma_i x_i \subset T\} \tag{9.41}$$

并且令

$$\lambda(T) = \mu(\overline{T}) \tag{9.42}$$

$$\lambda^{(i)}(T) = \mu_i(\overline{T}_i) \tag{9.43}$$

因此

$$\overline{T} = \overline{T}_1 \times \overline{T}_2 \times \cdots \times \overline{T}_n \tag{9.44}$$

且

$$\lambda(T) = \lambda^{(1)}(T) \times \lambda^{(2)}(T) \times \cdots \times \lambda^{(n)}(T) \tag{9.45}$$

考虑一个有限集合 $S=\{s_1, s_2, s_3\}$ 和通过 $p_{000}^{(i)}$、$p_{100}^{(i)}$、$p_{010}^{(i)}$、$p_{001}^{(i)}$、$p_{110}^{(i)}$、$p_{101}^{(i)}$、$p_{011}^{(i)}$、$p_{111}^{(i)}$ $(i=1,2)$ 描述的两个独立信息源。假定将对应于 $T=\varnothing$、$\{s_1\}$、$\{s_2\}$、$\{s_3\}$、$\{s_1, s_2\}$、$\{s_2, s_3\}$、$\{s_1, s_3\}$、$\{s_1, s_2, s_3\}$ 的 $\lambda^{(i)}(T)$ $(i=1,2)$ 表示成 $\lambda_{000}^{(i)}$、$\lambda_{100}^{(i)}$、$\lambda_{010}^{(i)}$、$\lambda_{001}^{(i)}$、$\lambda_{110}^{(i)}$、$\lambda_{101}^{(i)}$、$\lambda_{011}^{(i)}$ 和 $\lambda_{111}^{(i)}$ $(i=1,2)$，则对于 $i=1,2$，有

$$\lambda_{000}^{(i)} = p_{000}^{(i)} \tag{9.46}$$

$$\lambda_{100}^{(i)} = p_{000}^{(i)} + p_{100}^{(i)} \tag{9.47}$$

$$\lambda_{010}^{(i)} = p_{000}^{(i)} + p_{010}^{(i)} \tag{9.48}$$

$$\lambda_{001}^{(i)} = p_{000}^{(i)} + p_{001}^{(i)} \tag{9.49}$$

$$\lambda_{110}^{(i)} = p_{000}^{(i)} + p_{100}^{(i)} + p_{010}^{(i)} + p_{110}^{(i)} \tag{9.50}$$

$$\lambda_{101}^{(i)} = p_{000}^{(i)} + p_{100}^{(i)} + p_{001}^{(i)} + p_{101}^{(i)} \tag{9.51}$$

$$\lambda_{011}^{(i)} = p_{000}^{(i)} + p_{010}^{(i)} + p_{001}^{(i)} + p_{011}^{(i)} \tag{9.52}$$

$$\lambda_{111}^{(i)} = p_{000}^{(i)} + p_{100}^{(i)} + p_{010}^{(i)} + p_{001}^{(i)} + p_{110}^{(i)} + p_{101}^{(i)} + p_{011}^{(i)} + p_{111}^{(i)} \tag{9.53}$$

如果用 $\lambda_{\delta_1\delta_2\delta_3}$ 和 $p_{\delta_1\delta_2\delta_3}$ $(\delta_i=1$ 或 $0, i=1,2,3)$ 分别表示空间 $S=\{s_1, s_2, s_3\}$ 和 (X, Ω, μ) 中两个独立信息源的组合概率测度，那么根据式(9.45)，并通过式(9.46)至式(9.53)，可以得到

$$p_{000} = p_{000}^{(1)} p_{000}^{(2)} \tag{9.54}$$

$$p_{100} = p_{000}^{(1)} p_{100}^{(2)} + p_{100}^{(1)} p_{000}^{(2)} + p_{100}^{(1)} p_{100}^{(2)} \tag{9.55}$$

$$p_{010} = p_{000}^{(1)} p_{010}^{(2)} + p_{010}^{(1)} p_{000}^{(2)} + p_{010}^{(1)} p_{010}^{(2)} \tag{9.56}$$

$$p_{001} = p_{000}^{(1)} p_{001}^{(2)} + p_{001}^{(1)} p_{000}^{(2)} + p_{001}^{(1)} p_{001}^{(2)} \tag{9.57}$$

$$\begin{aligned} p_{110} = {} & p_{000}^{(1)} p_{110}^{(2)} + p_{100}^{(1)} p_{010}^{(2)} + p_{100}^{(1)} p_{110}^{(2)} + p_{010}^{(1)} p_{100}^{(2)} \\ & + p_{010}^{(1)} p_{110}^{(2)} + p_{110}^{(1)} p_{000}^{(2)} + p_{110}^{(1)} p_{100}^{(2)} + p_{110}^{(1)} p_{010}^{(2)} + p_{110}^{(1)} p_{110}^{(2)} \end{aligned} \tag{9.58}$$

$$p_{101} = p_{000}^{(1)}p_{101}^{(2)} + p_{100}^{(1)}p_{001}^{(2)} + p_{100}^{(1)}p_{101}^{(2)} + p_{001}^{(1)}p_{100}^{(2)} + p_{001}^{(1)}p_{101}^{(2)} + p_{101}^{(1)}p_{000}^{(2)} + p_{101}^{(1)}p_{100}^{(2)} + p_{101}^{(1)}p_{001}^{(2)} + p_{101}^{(1)}p_{101}^{(2)} \quad (9.59)$$

$$p_{011} = p_{000}^{(1)}p_{011}^{(2)} + p_{010}^{(1)}p_{001}^{(2)} + p_{010}^{(1)}p_{011}^{(2)} + p_{001}^{(1)}p_{010}^{(2)} + p_{001}^{(1)}p_{011}^{(2)} + p_{011}^{(1)}p_{000}^{(2)} + p_{011}^{(1)}p_{010}^{(2)} + p_{011}^{(1)}p_{001}^{(2)} + p_{011}^{(1)}p_{011}^{(2)} \quad (9.60)$$

$$\begin{aligned} p_{111} = {} & p_{000}^{(1)}p_{111}^{(2)} + p_{100}^{(1)}p_{011}^{(2)} + p_{100}^{(1)}p_{111}^{(2)} + p_{010}^{(1)}p_{101}^{(2)} \\ & + p_{010}^{(1)}p_{111}^{(2)} + p_{001}^{(1)}p_{110}^{(2)} + p_{001}^{(1)}p_{111}^{(2)} + p_{011}^{(1)}p_{100}^{(2)} + p_{011}^{(1)}p_{101}^{(2)} \\ & + p_{011}^{(1)}p_{110}^{(2)} + p_{011}^{(1)}p_{111}^{(2)} + p_{101}^{(1)}p_{010}^{(2)} + p_{101}^{(1)}p_{011}^{(2)} + p_{101}^{(1)}p_{110}^{(2)} \\ & + p_{101}^{(1)}p_{111}^{(2)} + p_{110}^{(1)}p_{001}^{(2)} + p_{110}^{(1)}p_{011}^{(2)} + p_{110}^{(1)}p_{101}^{(2)} + p_{110}^{(1)}p_{111}^{(2)} \\ & + p_{111}^{(1)}p_{000}^{(2)} + p_{111}^{(1)}p_{100}^{(2)} + p_{111}^{(1)}p_{010}^{(2)} + p_{111}^{(1)}p_{001}^{(2)} + p_{111}^{(1)}p_{011}^{(2)} \\ & + p_{111}^{(1)}p_{101}^{(2)} + p_{111}^{(1)}p_{110}^{(2)} + p_{111}^{(1)}p_{111}^{(2)} \end{aligned} \quad (9.61)$$

考虑 $s=\{s_1,s_2,\cdots,s_n\}$这种情形，对于所有的$(\delta'_1,\delta'_2,\cdots,\delta'_m,\delta''_1,\delta''_2,\cdots,\delta''_n)$，一般的组合规则是

$$p_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n} = \sum_{\substack{\delta_i=\delta'_i\cup\delta''_i \\ i=1,2,\cdots,m}} p^{(1)}_{\delta'_1\delta'_2\cdots\delta'_n} p^{(2)}_{\delta''_1\delta''_2\cdots\delta''_n} \quad (9.62)$$

9.4.2 空间 S 的概率测度组合规则

在空间 $2^S=\{S_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n}\}$上定义一个概率测度 M：$2^S=\{S_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_m}\}\to[0,1]$，且

$$M(S_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n}) = \begin{cases} 0 & (S_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n} = S_{00\cdots0}) \\ \dfrac{\mu(X_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n})}{1-\mu(X_{00\cdots0})} & (S_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n} \neq S_{00\cdots\delta_0}) \end{cases} \quad (9.63)$$

式中：M 是空间 S 一类子集 $2^S=\{S_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n}\}$上的一个概率测度，即 Γ 将 X 映射到空间 S。

组合规则：

考虑两个独立信息源$(X_i,\Omega_i,\mu_i)(i=1,2)$，对应的映射空间为 $S=\{s_1,s_2,\cdots,s_n\}=\{S_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n}\}$，其中 Γ_i 将 X_i 映射到 S 上。根据式(9.62)，可以得到

$$\mu(X_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n}) = \sum_{\substack{\delta_i=\delta'_i\cup\delta''_i \\ i=1,2,\cdots,n}} \mu^{(1)}(X^{(1)}_{\delta'_1\delta'_2\cdots\delta'_n})\mu^{(2)}(X^{(2)}_{\delta''_1\delta''_2\cdots\delta''_n}) \quad (9.64)$$

式(9.63)中，对于任何 $S_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_m}\neq S_{00\cdots0}$，存在

$$\mu^{(1)}(X^{(1)}_{\delta'_1\delta'_2\cdots\delta'_n}) = M^{(1)}(S_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n})[1-\mu^{(1)}(X^{(1)}_{00\cdots0})] \quad (9.65)$$

$$\mu^{(2)}(X^{(2)}_{\delta''_1\delta''_2\cdots\delta''_n}) = M^{(2)}(S_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n})[1-\mu^{(2)}(X^{(2)}_{00\cdots0})] \quad (9.66)$$

和

$$\mu(X_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n}) = M(S_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n})[1-\mu(X_{00\cdots 0})] \tag{9.67}$$

则式(9.64)就变成了

$$M(S_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n}) = \frac{\sum\limits_{\substack{\delta_i=\delta'_i\cup\delta''_i\\ i=1,2,\cdots,n}} M^{(1)}(S_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n})M^{(2)}(S_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n})[1-\mu^{(1)}(X^{(1)}_{00\cdots 0})][1-\mu^{(2)}(X^{(2)}_{00\cdots 0})]}{1-\mu(X_{00\cdots 0})} \tag{9.68}$$

和

$$\frac{[1-\mu^{(1)}(X^{(1)}_{00\cdots 0})][1-\mu^{(2)}(X^{(2)}_{00\cdots 0})]}{1-\mu(X_{00\cdots 0})} = \frac{1}{\sum\limits_{\substack{\delta'_i\cup\delta''_i\neq 0\\ i=1,2,\cdots,n}} M^{(1)}(S_{\delta'_1\delta'_2\cdots\delta'_n})M^{(2)}(S_{\delta''_1\delta''_2\cdots\delta''_n})} \tag{9.69}$$

将式(9.69)代入式(9.68),可以得到

$$\begin{aligned} M(S_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n}) &= \frac{\sum\limits_{\substack{\delta_i=\delta'_i\cup\delta''_i\\ i=1,2,\cdots,n}} M^{(1)}(S_{\delta'_1\delta'_2\cdots\delta'_n})M^{(2)}(S_{\delta''_1\delta''_2\cdots\delta''_n})}{1-\sum\limits_{\substack{\delta'_i\cup\delta''_i\neq 0\\ i=1,2,\cdots,n}} M^{(1)}(S_{\delta'_1\delta'_2\cdots\delta'_n})M^{(2)}(S_{\delta''_1\delta''_2\cdots\delta''_n})} \\ &= \sum\limits_{\substack{\delta_i=\delta'_i\cup\delta''_i\\ i=1,2,\cdots,n}} M^{(1)}(S_{\delta'_1\delta'_2\cdots\delta'_n})M^{(2)}(S_{\delta''_1\delta''_2\cdots\delta''_n}) \end{aligned} \tag{9.70}$$

如果 $S_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n}=S_{00\cdots 0}$,那么可以定义

$$M(S_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n}) \triangleq 0 \tag{9.71}$$

因此,式(9.70)和式(9.71)表示两个信息源$(X_i,\Omega_i,\mu_i)(i=1,2)$对于映射空间$S=\{s_1,s_2,\cdots,s_n\}=S_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n}$的组合,这里 Γ_i 将 X_i 映射到 S 上。

9.5 析取组合规则

根据 9.4 节的结果,两个独立信息源的析取组合规则可以通过下面的方式获得。

定理 4:

假设 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n\}$是一个含有 n 个命题的鉴别框。两个信息源(X_1,Ω_1,μ_1)和(X_2,Ω_2,μ_2)在同一鉴别框下的基本概率赋值分别是 m_1 和 m_2,焦元分别是 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 和 $B_1,B_2,\cdots,B_l$。则这两个信息源的组合后的基本概率赋值可以定义为

$$m(C)=\begin{cases}0 & (C=\varnothing)\\ \sum\limits_{C=A_i\cup B_j} m_1(A_i)m_2(B_j) & (C\neq\varnothing)\end{cases} \tag{9.72}$$

证明: 根据定义 $m(\varnothing)=0$，只要 $m(C)$ 的和为 1，则 m 是一个基本概率赋值。事实上，

$$\begin{aligned}\sum_{C\subseteq\Theta} m(C) &= m(\varnothing)+\sum_{\substack{C\subset\Theta\\ C\neq\varnothing}} m(C)\\ &=\sum_{\substack{C\subset\Theta\\ C\neq\varnothing}}\ \sum_{\substack{C=A_i\cup B_j\\ i\in\{1,2,\cdots,k\},j\in\{1,2,\cdots,l\}}} m_1(A_i)m_2(B_j)\\ &=\sum_{\substack{A_i\cup B_j\neq\varnothing\\ i\in\{1,2,\cdots,k\},j\in\{1,2,\cdots,l\}}} m_1(A_i)m_2(B_j)\\ &=\sum_{\substack{A_i\subset\Theta\\ A_i\neq\varnothing}} m_1(A_i)\sum_{\substack{B_j\subset\Theta\\ B_j\neq\varnothing}} m_2(B_j)\end{aligned}$$

所以，m 是鉴别框 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n\}$ 下的一个基本概率赋值，它的焦元为

$$C=\Big(\bigcup_{i=1,2,\cdots,k} A_i\Big)\cup\Big(\bigcup_{j=1,2,\cdots,l} B_l\Big)$$

根据定理 4，定理 5 可以表述如下。从文献[29,31]中可以得到相似的结果。

定理 5:

如果 Bel_1 和 Bel_2 是相同鉴别框 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n\}$ 下的信度函数，基本信度赋值为 m_1 和 m_2，对应的焦元分别是 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 和 $B_1,B_2,\cdots,B_l$，则函数 $m:2^{\Theta}\to[0,1]$ 可定义如下：

$$m(C)=\begin{cases}0 & (C=\varnothing)\\ \sum\limits_{C=A_i\cup B_j} m_1(A_i)m_2(B_j) & (C\neq\varnothing)\end{cases} \tag{9.73}$$

这里就产生了一个基本概率赋值，m 所对应的信度函数的核等于 Bel_1 与 Bel_2 的核的并集。

下面两个独立信息源组合规则的物理解释。

（1）定理 4 中的组合规则是人类判决中的一种合乎逻辑的类型，即 OR 规则。也就是说，对于一个给定的鉴别框，被每个信息源同时判别的命题也是组合信息源的判别命题；否则，将会产生不确定的结果，以致组合后的判别命题将会是未知集。

（2）新组合规则和 DS 组合规则的本质区别是，后者具有 AND 和合取逻辑推理，而前者是建立在 OR 或析取规则的基础上。新组合规则（或 OR 规则）克服了在非直观以及两种强信息源组合情形下带有 AND 性质的 DS 组合规则的缺点。

（3）对于某个命题，若它并没有被每个独立信息源同时判决，则利用 OR 规则

比利用 AND 规则有更强的优越性。对于这些命题，OR 规则比 AND 规则能够给出更合理的判断，这种判决结果更符合人类的合理判断。

例 1：

给定鉴别框 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2\}$，两个信息源给出的基本判别概率 m_1 和 m_2 如下：

$$m_1(\theta_1)=0.2,\quad m_1(\theta_2)=0.4,\quad m_1(\theta_1,\theta_2)=0.4$$
$$m_2(\theta_1)=0.4,\quad m_2(\theta_2)=0.4,\quad m_2(\theta_1,\theta_2)=0.2$$

根据定理 4，组合的判别结果为

$$m(\theta_1)=0.08,\quad m(\theta_2)=0.16,\quad m(\theta_1,\theta_2)=0.76$$

比较 θ_2 和 θ_2 组合后的基本概率，θ_2 发生的概率比 θ_1 大，但是整个组合结果并没有减少判别结果的不确定性，这从上述结果中可以明显看出。

例 2(非直观情形)：

Zadeh 的例子：

用 $\Theta=\{M,C,T\}$ 表示关于病人的鉴别框，这里 M 表示脑膜炎，C 表示脑挫伤，T 表示肿瘤。两个医生对病人的判决结果为

$$m_1(M)=0.99,\quad m_1(T)=0.01$$
$$m_2(C)=0.99,\quad m_2(T)=0.01$$

利用定理 4 组合这两种判断，结果为

$$m(M\cup C)=0.9801,\quad m(M\cup T)=0.0099,$$
$$m(C\cup T)=0.0099,\quad m(T)=0.0001$$

根据 $m(M\cup T)=0.0099$ 和 $m(C\cup T)=0.0099$，可以清晰地看出 T 和 M 之间有很小的不确定性，T 和 C 之间亦如此，这表示 T 可以很容易地从 M 和 C 中区分出来。而且，T 发生的基本概率是 $m(T)=0.0001$，也就是说，T 在病人身上很可能不会发生。病人可能感染了 M 或 C。此外，由于 $m(M\cup C)=0.99801$，表示在 M 和 C 之间存在 0.9801 这么大的确定性，所以，两个医生除了能确定病人没有肿瘤(T)外，并不能保证病人是脑膜炎(M)或是擦伤(C)。病人需要被更多的医生进行检查才能确诊。

我们发现析取组合规则能很好地应用于这种情形，它符合人类的直觉判断。

9.6 合取和析取组合规则的性质

本节研究证据源的合取和析取组合规则，也就是 DS 组合规则、Yager 组合规则、Dubois－Prade(DP)组合规则、DSm 组合规则和析取组合规则。本节将详细讨论各个证据源组合规则的性质，比如每个信息源在组合判断中的角色，每个组合规

则组合判断信度和未知集赋值大小的比较，两个信息源给出的冲突信息的处理，以及组合规则的应用。为了对每个组合规则在冲突情形下的性能和效率进行评价，本节还将介绍 Zadeh 的例子。

9.6.1 证据源组合规则

1. 证据源的 Yager 组合规则

假设 Bel_1 和 Bel_2 是相同鉴别框 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n\}$ 下的信度函数，基本信度赋值为 m_1 和 m_2，对应的焦元分别是 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 和 $B_1,B_2,\cdots,B_l$。则两个信息源的 Yager 组合基本概率赋值可定义为[20]

$$m_{\mathrm{Y}}(C)=\begin{cases}\sum\limits_{\substack{i,j\\ C=A_i\cap B_j}} m_1(A_i)m_2(B_j) & (C\neq\Theta,\varnothing)\\ m_1(\Theta)m_2(\Theta)+\sum\limits_{\substack{i,j\\ A_i\cap B_j=\varnothing}} m_1(A_i)m_2(B_j) & (C=\Theta)\\ 0 & (C=\varnothing)\end{cases}\tag{9.74}$$

2. 证据源的 Dubois - Prade(DP)组合规则

在与 Yager 组合规则相同的条件下，两个信息源的 Dubios - Prade 组合基本概率赋值可定义为[26]

$$m_{\mathrm{DP}}(C)=\begin{cases}\sum\limits_{\substack{i,j\\ C=A_i\cap B_j}} m_1(A_i)m_2(B_j)+\sum\limits_{\substack{i,j\\ C=A_i\cup B_j\\ A_i\cap B_j=\varnothing}} m_1(A_i)m_2(B_j) & (C\neq\varnothing)\\ 0 & (C=\varnothing)\end{cases}\tag{9.75}$$

3. 证据源的 DSm 组合规则

在第 1 章和第 4 章中已经对这些规则进行过详细的介绍，为方便起见，这里仅对两个独立信息源利用该规则的情形进行简单的回忆。

（1）自由 DSm 模型的经典 DSm 组合规则[27]：

$$\forall C\in D^{\Theta},m(C)=\sum_{\substack{A,B\in D^{\Theta}\\ A\cap B=C}} m_1(A)m_2(B)\tag{9.76}$$

式中：D^{Θ} 表示框架 Θ 的超幂集（详见第 2 章和第 3 章）。

（2）混合 DSm 模型 $\mathscr{M}$ 的一般 DSm 组合规则：

这里仅考虑两个信息源的组合规则，有

$$\forall A\in D^{\Theta},m_{\mathscr{M}(\Theta)}(A)\triangleq\phi(A)[S_1(A)+S_2(A)+S_3(A)]\tag{9.77}$$

式中：$\phi(A)$是集合 A 的非空特征函数，也就是说，如果 $A\notin\phi$，那么 $\phi(A)=1$，否则

$\phi(A)=0$。在这里 $\phi \triangleq \{\phi_{\mathcal{M}}, \phi\}$，$\phi_{\mathcal{M}}$ 是指 D^{Θ} 中由于模型 $\mathcal{M}$ 中附加的约束条件而强制转化为空集的命题，而 ϕ 是指经典的/通用的空集。$S_1(A) \equiv m_{\mathcal{M}^f(\Theta)}(A)$、$S_2(A)$、$S_3(A)$ 的定义如下（参见第 4 章）：

$$S_1(A) \triangleq \sum_{\substack{X_1, X_2 \in D^{\Theta} \\ X_1 \cap X_2 = A}} \prod_{i=1}^{2} m_i(X_i) \tag{9.78}$$

$$S_2(A) \triangleq \sum_{\substack{X_1, X_2 \in \varnothing \\ [u=A] \vee [u \in \varnothing) \wedge (A = I_t)]}} \prod_{i=1}^{2} m_i(X_i) \tag{9.79}$$

$$S_3(A) \triangleq \sum_{\substack{X_1, X_2 \in D^{\Theta} \\ X_1 \cup X_2 = A \\ X_1 \cap X_2 \in \varnothing}} \prod_{i=1} m_i(X_i) \tag{9.80}$$

式中：$u \triangleq u(X_1) \cup u(X_2)$ 其中 $u(X)$ 是组成 X 的所有命题 θ_i 的并集，$I_t \triangleq \theta_1 \cup \theta_2$ 代表总的未知集。$S_1(A)$ 相当于基于自由 DSm 模型的经典 DSm 规则；$S_2(A)$ 表示传递给总的或相对未知集的所有相对和绝对空集的信度质量；$S_3(A)$ 将相对空集的和传递给非空集合的信度质量。

4. 证据源的析取组合规则

该规则在本章前面已经被提出并证明，在文献[22，23，29，30，31]中也能找到相关内容。

假设 $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n\}$ 是一个含有 n 个命题的鉴别框（与定理 3 相同）。在该鉴别框下的两个信息源的基本概率赋值分别是 m_1 和 m_2，焦元分别是 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 和 $B_1, B_2, \cdots, B_l$，那么这两个信息源的组合基本概率赋值可定义为：对于任意 $C \subset \Theta$，有

$$m_{\text{Dis}}(C) = \begin{cases} \sum\limits_{\substack{i,j \\ C = A_i \cup B_j}} m_1(A_i) m_2(B_j) & (C \neq \varnothing) \\ 0 & (C = \varnothing) \end{cases} \tag{9.81}$$

m 所对应的信度函数的核等于 Bel_1 和 Bel_2 的核的并集。

9.6.2 证据源组合规则的性质

给出定义在同一个鉴别框 $\Theta = \{\theta_1, \theta_2\}$ 下的两个独立信息源，它们在 Θ 下的基本概率赋值或基本信度质量为

$$S1: m_1(\theta_1) = 0.4, \quad m_1(\theta_2) = 0.3, \quad m_1(\theta_1 \cup \theta_2) = 0.3$$

$$S2: m_2(\theta_1) = 0.5, \quad m_2(\theta_2) = 0.3, \quad m_2(\theta_1 \cup \theta_2) = 0.2$$

这两个独立信息源根据不同组合规则的组合结果见表 9.1～表 9.5。对于包含 n 个命题的鉴别框，能获得类似的结果。

表 9.1　证据源的析取组合规则(DS)

$S2(m_2)\backslash S1(m_1)$	$\{\theta_1\}(0.4)$	$\{\theta_2\}(0.3)$	$\{\theta_1,\theta_2\}(0.3)$
$\{\theta_1\}(0.5)$	$\{\theta_1\}(0.2)$	$\{\theta_1\}\cap\{\theta_2\}\Rightarrow k(0.15)$	$\{\theta_1\}(0.15)$
$\{\theta_2\}(0.3)$	$\{\theta_1\}\cap\{\theta_2\}\Rightarrow k(0.12)$	$\{\theta_2\}(0.09)$	$\{\theta_2\}(0.09)$
$\{\theta_1,\theta_2\}(0.2)$	$\{\theta_1\}(0.08)$	$\{\theta_2\}(0.06)$	$\{\theta_1,\theta_2\}(0.06)$

表 9.2　证据源的合取和析取组合规则 (Yager)

$S2(m_2)\backslash S1(m_1)$	$\{\theta_1\}(0.4)$	$\{\theta_2\}(0.3)$	$\{\theta_1,\theta_2\}(0.3)$
$\{\theta_1\}(0.5)$	$\{\theta_1\}(0.2)$	$\{\theta_1\}\cap\{\theta_2\}\Rightarrow\Theta(0.15)$	$\{\theta_1\}(0.15)$
$\{\theta_2\}(0.3)$	$\{\theta_1\}\cap\{\theta_2\}\Rightarrow\Theta(0.12)$	$\{\theta_2\}(0.09)$	$\{\theta_2\}(0.09)$
$\{\theta_1,\theta_2\}(0.2)$	$\{\theta_1\}(0.08)$	$\{\theta_2\}(0.06)$	$\{\theta_1,\theta_2\}(0.06)$

表 9.3　证据源的合取和析取组合规则(Dubois - Prade)

$S2(m_2)\backslash S1(m_1)$	$\{\theta_1\}(0.4)$	$\{\theta_2\}(0.3)$	$\{\theta_1,\theta_2\}(0.3)$
$\{\theta_1\}(0.5)$	$\{\theta_1\}(0.2)$	$\{\theta_1\}\cap\{\theta_2\}\Rightarrow\{\theta_1\}\cup\{\theta_2\}(0.15)$	$\{\theta_1,\theta_2\}(0.15)$
$\{\theta_2\}(0.3)$	$\{\theta_1\}\cap\{\theta_2\}\Rightarrow\{\theta_1\}\cup\{\theta_2\}(0.12)$	$\{\theta_2\}(0.09)$	$\{\theta_2\}(0.09)$
$\{\theta_1,\theta_2\}(0.2)$	$\{\theta_1\}(0.08)$	$\{\theta_2\}(0.06)$	$\{\theta_1,\theta_2\}(0.06)$

表 9.4　证据源的混合 DSm 组合

$A\in D^\Theta$	m_1	m_2	$\Phi(A)$	$S_1(A)$	$S_2(A)$	$S_3(A)$	$m_{\mathcal{M}(\Theta)}(A)$
$\varnothing$	0	0	0	0	0	0	0
$\{\theta_1\}$	0.4	0.5	1	0.43	0	0	0.43
$\{\theta_2\}$	0.3	0.3	1	0.24	0	0	0.24
$\{\theta_1\cap\theta_2\}\overset{\mathcal{M}(\Theta)}{\equiv}\varnothing$	0	0	0	0.27	0	0	0
$\{\theta_1\cup\theta_2\}$	0.3	0.2	1	0.06	0	0.27	0.33

表 9.5　证据源的析取组合

$S2(m_2)\backslash S1(m_1)$	$\{\theta_1\}(0.4)$	$\{\theta_2\}(0.3)$	$\{\theta_1,\theta_2\}(0.3)$
$\{\theta_1\}(0.5)$	$\{\theta_1\}(0.2)$	$\{\theta_1\}\cup\{\theta_2\}(0.15)$	$\{\theta_1,\theta_2\}(0.15)$
$\{\theta_2\}(0.3)$	$\{\theta_1\}\cup\{\theta_2\}(0.12)$	$\{\theta_2\}(0.09)$	$\{\theta_1,\theta_2\}(0.09)$
$\{\theta_1,\theta_2\}(0.2)$	$\{\theta_1,\theta_2\}(0.08)$	$\{\theta_1,\theta_2\}(0.06)$	$\{\theta_1,\theta_2\}(0.06)$

性质 1:组合判决中的每个证据源的角色。

（1）对于证据源的 DS 组合规则[2]，命题 $\theta_i(i=1,2)$的组合判决由两部分组成。一部分是两个信息源对命题 $\theta_i(i=1,2)$同时产生的支持判决;另一部分是两个信息源中之一对其产生了支持判决，而另一个信息源是对命题 $\theta_i(i=1,2)$不了解(即未知集)。而组合后的总的未知集来自于两个信息源各自的总未知集。对某些命题失败的组合判决来自于这两个信息源对该命题的冲突判决。

（2）证据源的 Yager 的组合规则[20]和 DS 组合规则[2]的不同之处在于，它把两个信息源对于某些命题的冲突判决当成了组合后未知集的一部分，也就是说它被加在总的未知集上。

（3）证据源的 Dubois - Prade 组合规则[26]与 Yager 组合规则[20]的不同之处在于，当两个信息源对鉴别框中的某个命题给出冲突判决时，至少其中一个被认为是合理的判决。这两个冲突命题的组合冲突判决被分配到对应于这两个冲突命题的并集的判别上。

（4）证据源的经典 DSm 组合规则[27]与 Dubois - Prade[26]、Yager[20]以及 DS[2]的组合规则不同。两个信息源对鉴别框中的一个命题给出的的冲突判决被认为是一个矛盾。这些矛盾最终支持对每个命题 $\theta_i(i=1,2)$的组合判决。对于混合 DSm 组合规则来说(参见第 4 章)，它由三部分组成，第一部分是来自于自由 DSm 模型上的经典 DSm 组合规则;第二部分是传递给总的或相对的未知集的所有相对和绝对空集的信度质量;而第三部分是将所有的相对空集传递给包含在集合中所有命题并集的信度质量。

（5）对于证据源的析取组合规则[22，23，29，30，31]，每个命题 $\theta_i(i=1,2)$的组合判决仅来自于每个信息源对该命题的同时支持判决。组合后的未知集包括:两个信息源给出的冲突判决组合;一个信息源给出的未知集和另一个信息源给出的对任何命题的支持判决的组合;这两个信息源同时给出的未知集的组合。这里没有失败的组合判决。然而，组合信度降低了，并且未知集的信度赋值增加了。

（6）证据源的 DS 组合规则和经典 DSm 组合规则是合取规则，证据源的析取组合规则是析取规则，而证据源的 Yager、Dubois - Prade 与混合 DSm 组合规则是合取和析取规则的混合。

性质 2:各个组合规则的组合判决信度度(Bel(·))和未知信度(Ign(·)=Pl(·)-Bel(·))的比较。

$$\mathrm{Bel}_{\mathrm{DS}}(\theta_i) > \mathrm{Bel}_{\mathrm{DSm}}(\theta_i) > \mathrm{Bel}_{\mathrm{DP}}(\theta_i) > \mathrm{Bel}_{\mathrm{Y}}(\theta_i) > \mathrm{Bel}_{\mathrm{Dis}}(\theta_i) \quad (i=1,2) \tag{9.82}$$

$$\mathrm{Ign}_{\mathrm{DS}}(\theta_i) < \mathrm{Ign}_{\mathrm{DSm}}(\theta_i) > \mathrm{Ign}_{\mathrm{DP}}(\theta_i) < \mathrm{Ign}_{\mathrm{Y}}(\theta_i) < \mathrm{Ign}_{\mathrm{Dis}}(\theta_i) \quad (i=1,2) \tag{9.83}$$

事实上，对以上两个信息源，每个组合规则的结果如下：

组合规则	$m(\theta_1)$	$m(\theta_2)$	$m(\Theta)$	$\mathrm{Bel}(\theta_1)$	$\mathrm{Bel}(\theta_2)$	$\mathrm{Bel}(\Theta)$	$\mathrm{Ign}(\theta_1)$	$\mathrm{Ign}(\theta_2)$
DS	0.589	0.329	0.082	0.589	0.329	1	0.082	0.082
Yager	0.43	0.24	0.33	0.43	0.24	1	0.33	0.33
DP	0.43	0.24	0.33	0.43	0.24	1	0.33	0.33
混合 DSm	0.43	0.24	0.33	0.43	0.24	1	0.33	0.33
析取	0.20	0.09	0.71	0.20	0.09	1	0.71	0.71

从上述表格的结果中，可以很明显地看出两个独立信息源利用混合 DSm、Yager、Dubois - Prade 组合规则得到的组合判决结果是相同的。然而，对于多于两个独立信息源的情形，组合判决结果就如式(9.82)和式(9.83)所示(也就是说，它们的结果是不同的，混合 DSm 模型比 Dubois - Prade 和 Yager 的模型更全面，而 Dubois - Prade 模型比 Yager 的模型具有更少的总的未知集)。

性质 3：鉴别框下两个信息源给出的冲突判决。

在 DS 组合规则下，组合后的冲突判决被认为是失败的，并从组合后总基本概率赋值中扣除；而在 Yager 组合规则下，他们被认为是总的未知集；在 Dubois - Prade 组合规则下，它们被分配到这两个冲突命题的并集上，这意味着至少冲突判决的其中之一是合理的。在经典 DSm 组合规则下，它们组成了矛盾以支持每个命题的组合判决信度，并且当新证据源出现时，它们作为一个新的信息来参与随后的判决。而对于混合 DSm 组合规则，它对证据源冲突的处理与 Dubois - Prades 的方法相类似。对于析取组合规则，组合后的判别概率组成了未知集，并且当新证据源出现时参与随后的判决。

性质 4：组合规则的应用。

根据性质 1～3，当两个独立的信息源的冲突不是很大时，析取组合规则是更保守的组合规则。当两个信息源发生冲突判决时，组合结果是不确定的，因此，最终的判决结果被推迟到更多的证据源进入判决系统时。而且，对于鉴别框中的每个命题，组合判决信度是减小的，且随着证据源的加入，总的未知集是增加的。因此，当我们想要组合证据源的未知集减小时，析取组合规则并不是很奏效。假定并不能确切知道这两个冲突判决到底哪一个是更合理的情形，但至少其中之一应该能提供一个合理的判决。然而，DS 组合规则与析取组合规则是截然不同的，它能够比其他组合规则更快地产生最终的判决(参见式(9.82)至式(9.83))；而析取组合规则准确率相对于其他规则较高。混合 DSm、Dubois - Prade 以及 Yager 组合规则的情形则在上述两者之间。对于其他的性质，例如，两个冲突的独立信息源，详见 9.6.3 节及其中的例子。

9.6.3 例子

下面通过 Zadeh 的著名案例来检验每种组合规则对于冲突判决的的效率。用 $\Theta=\{M,C,T\}$表示关于病人的鉴别框，这里 M 表示脑膜炎，C 表示脑挫伤，T 表示肿瘤。两个医生对病人的判决结果为

$$m_1(M)=0.99, m_1(T)=0.01; m_2(C)=0.99, m_2(T)=0.01$$

证据源的每种组合规则的结果如下：

规 则	$m(T)$	$m(M\cup C)$	$m(C\cup T)$	$m(M\cup T)$	$m(\Theta)$
DS	1	0	0	0	0
Yager	0.0001	0	0	0	0.9999
DP	0.0001	0.9801	0.0099	0.0099	0
混合 DSm	0.0001	0.9801	0.0099	0.0099	0
析取	0.0001	0.9801	0.0099	0.0099	0

对于这五个组合规则，$m(M\cap C)$，$m(C\cap T)$和 $m(M\cap T)$的基本信度赋值都等于 0。下面的表格给出了命题 $M\cap C$、$C\cap T$、$M\cap T$、$M\cup C$、$C\cup T$、$M\cup T$、M、C、T 和 $M\cup C\cup T$ 的信度：

规 则	$\mathrm{Bel}(M\cap C)$	$\mathrm{Bel}(C\cap T)$	$\mathrm{Bel}(M\cap T)$	$\mathrm{Bel}(M\cup C)$	$\mathrm{Bel}(C\cup T)$	$\mathrm{Bel}(M\cup T)$
DS	0	0	0	0	0	0
Yager	0	0	0	0	0	0
DP	0	0	0	0.9801	0.01	0.01
混合 DSm	0	0	0	0.9801	0.01	0.01
析取	0	0	0	0.9801	0.01	0.01

规 则	$\mathrm{Bel}(M)$	$\mathrm{Bel}(C)$	$\mathrm{Bel}(T)$	$\mathrm{Bel}(M\cup C\cup T)$
DS	0	0	1	1
Yager	0	0	0.0001	1
DP	0	0	0.0001	1
混合 DSm	0	0	0.0001	1
析取	0	0	0.0001	1

融合结果的比较和分析：

(1) 根据 DS 组合规则，每个命题的判决信度为

$$\mathrm{Bel}_{DS}(T)=1, \mathrm{Bel}_{DS}(M)=\mathrm{Bel}_{DS}(C)=0$$

这表示病人一定患有疾病 T，这是因为它的信度是 1；一定不患有疾病 M 和 C，这是因为它们的信度分别都是 0。这是一个反直观的情形，这是因为 $\mathrm{Bel}_{\mathrm{DS},1}(M)=\mathrm{Bel}_{\mathrm{DS},2}(C)=0.99$，$\mathrm{Bel}_{\mathrm{DS},1}(T)=\mathrm{Bel}_{\mathrm{DS},2}(T)=0.01$。此外，尽管在疾病 T、M 和 C 上都存在基本概率赋值，两个医生根据 DS 组合规则得到的判决结果将永远是 T，因为它的信度是 1，而 M 和 C 的信度都是 0。这说明 DS 组合规则在这种情况下并不是很有效。这种情况的主要原因在 9.3 节至 9.5 节中已经提到过。

（2）根据 Yager 组合规则，各命题的判决信度为

$$\mathrm{Bel}_{\mathrm{Y}}(T)=0.0001,\mathrm{Bel}_{\mathrm{Y}}(M)=\mathrm{Bel}_{\mathrm{Y}}(C)=0$$

由于这个判决信度太小，因而它不能进行最终判决。所以，证据源 Yager 组合规则将等待新的证据源出现以获得更准确的判决。这种结果造成的原因是该规则将所有冲突判决都转化到总的未知集中。

（3）根据 Dubois - Prade 组合规则，有

$$\mathrm{Bel}_{\mathrm{DP}}(T)=0.0001,\mathrm{Bel}_{\mathrm{DP}}(M\cup C)=0.9801,\mathrm{Bel}_{\mathrm{DP}}(M\cup T)=\mathrm{Bel}_{\mathrm{DP}}(C\cup T)=0.01$$

这个结果与析取组合规则以及混合 DSm 组合规则得到的结果是相同的。根据 T 的信度 $\mathrm{Bel}_{\mathrm{DP}}(T)=0.0001$，可以判断病人有 T 疾病的可能性很小。此外，$\mathrm{Bel}_{\mathrm{DP}}(M\cup T)=\mathrm{Bel}_{\mathrm{DP}}(C\cup T)=0.01$，所以病人可能患有疾病 M 或者 C。并且还存在 $\mathrm{Bel}_{\mathrm{DP}}(M\cup C)=0.9801$，这更进一步证实病人患有疾病 M 或者 C 中的一种，或者两者都有。为了得到最终判决，需要新的证据源或者第三个医生进行诊断。

根据两个医生的判断，清楚地证实了每种组合规则的不同判决结果。对于这种情况，Dubois - Prade 规则、混合 DSm 规则以及析取组合规则的结果更符合人类的直觉判断；Yager 组合规则的判决结果不能立即给出最终判决，因为其判决信度太小，并且会产生更多的未知集；而 DS 组合规则的结果是非直观的。这些结果表明了两个信息源对鉴别框中命题通过各种组合规则得到的冲突判决的实效性。

9.7 结论

本章在独立信息源的多值映射和多独立信息源的乘积组合规则的基础上，对 DS 组合规则进行了分析，从而得出 Dempster 规则不同于 DS 组合规则，DS 组合规则的缺点是由乘积组合规则所形成的。在说明将多值映射应用到 Dempster 规则时，我们指出了其缺点，并进行了证明。此外，基于以上结果，这里对两个独立信息源的析取组合规则提出了一种新的解释：它是建立在组合映射规则之上的，这里的组合映射规则是对多独立信息源乘积空间的多重多值映射进行的重定义。这个规则基于逻辑判断 OR，能够克服 DS 规则的不足，特别是对于解决非直观的情形。最后，在两个独立信息源的情形下，本章研究了证据源的合取和析取组合规则，也

就是 DS 组合规则、Yager 组合规则、Dubois－Prade(DP)组合规则、DSm 组合规则和析取组合规则。本章详细讨论了各个证据源组合规则的性质，比如每个信息源在组合判断中的角色，每个组合规则组合判断信度和未知集信度大小的比较，两个信息源给出的冲突信息的处理，以及组合规则的应用。这些新的结果对这些可用于给定情形的规则产生了很有价值的理论依据。本章为了对每个组合规则在两个信息源冲突情形下的性能和效率进行评价，还介绍了 Zadeh 的典型例子。

参 考 文 献

[1] Dempster A. P. ,*Upper and Lower Probabilities Induced by a Multivalued Mapping*,Ann. Math. Statistics. VoL38,pp. 325－339,1967.

[2] Shafer G. . *A Mathematical Theory of Evidence*,Princeton University Press,Princeton,New Jersey,1976

[3] Lowrance D. J. ,*Automated Argument Construction*,J. Stat. Planning Inference,20,369－387,1988.

[4] Shafer G. ,*Belief Functions and Possibility Measures*,in The Analysis of Fuzzy Information,Vol. 1(J. C. Bezdek,Ed.),CRC Press,Boca Raton,Fla,1987.

[5] Goodman I. R. ,Nguyen H. T. ,*Uncetrainty Models for Knowledge－Based Systems*,Horth－Holland,New York,1985

[6] Nguyen H. T. ,*On Random Sets and Belief Functions*, J. Math, Anal. Appl. 65,pp. 531－542,1987.

[7] Shafer G. ,Shenoy P. P. ,Mellouli K. ,*Propagating Belief Functions in Qualitative Markov Trees*,Int. J. Approximate Reasoning 1,pp. 349－400. 1987.

[8] Fagin R. , Halpern. J. Y. ,*Uncertainty*,*Belief*,*and Probability*,IJCAI－89,PP. 1161－1167,1989.

[9] Ruspini E. H. *Epistemic Logics*, *Probability*,*and The Calculus of Evidence*,IJCAI－87,pp. 924－931. 1987

[10] Sun H. , He K. , Zhang B. , Mao S. ,*The Performance of Fusion Judgment on Dempster－Shafter Rule*, Chinese Journal of Electronics, Vol. 8,No. 1,pp. 86－91,Jan. 1999.

[11] Shafer G. , *Perspectives on the Theory and Practice of Belief Functions*,International Journal of Approximate Reasoning, Vol. 4,pp. 323－362,1990

[12] Waltz E. , Llinas J. ,*Multisensor Data Fusion* Artech Norwood, Massachusetts,1990.

[13] Biswas G. , Anand T. S. ,*Using the Dempster－Shafer Scheme in a Mixed－initiatice Expert System Shell*,in Uncertainty in Artiflcial Intelligence, Vol. 3 (L. N. Kanal, T. S. Levitt, and J. F. Lemmer, Eds.),pp. 233－239,North－Holland,New York,1989.

[14] Bogler Ph. L. ,*Shafer－Dempster Reasoning with Applications to Multisensor Target Identification Systems*, IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics,Vol. 17,No. 6,pp. 968－977,1987.

[15] Buede D. M. ,*Shafer－Dempster and Bayesian Reasoning*:*A Response to 'Shafer－Dempster Reasoning with Applications to Multisensor Target Identification Systems'*,IEEE Trans. on Systems,Man and Cybernetics, Vol. 18,No. 6,pp. 1009－10,1988.

[16] Buede D. M. ,Girardi P. ,*A Target Identification Comparison of Bayesian and Dempster－Shafer Multisensor Fusion*,IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics－Part A:Systems and Humans, Vol. 27,No. 5,Sept. 1997.

[17] Zadeh L. A. ,*On the Validity of Dempster's Rule of Combination of Evidence*,ERL Memo M 79/24, Univ. of California, Berkeley,1979.

[18] Zadeh L. A. ,*Review of Shafer's A Mathematical Theory of Evidence*,AI Magazine 5(3),pp. 81—83, 1984.

[19] Zadeh L. A. ,*A Simple View of the Dempster—Shafer Theory of Evidence and its Implications for the Rule of Combination*,AI Mag. 7(2),85—90,1986.

[20] Yager R. R. ,*On the Dempster—Shafer Framework and New Combination Rules*, Information Sciences, Vol. 41,pp. 93—137,1987.

[21] Wu U. G. , Yang J. Y. , Lin K. , Liu L. J. ,*On the Evidence Inference Theory*,Information Sciences, Vol. 89,pp. 245—260,1996.

[22] Sun H. , Majdi F. , Farooq M. , *Dempster—Shafer Combination Rule Induced by Multi—valued Mapping*,Proceedings of SPIE Vol. 4729,1—5 April,2002,Orlando, Florida USA.

[23] Sun H. , Farooq M. , *A Novel Justification of the Disjunctive Combination Rule*,Proceedings of the Sixth International Conference on Information Fusion, pp. 1244—1251,July,2003,Cairns,Queens—land,Australia.

[24] Smets Ph. ,*The Combination of Evidence in the Transferable Belief Model*,IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence 12(5),pp. 447—458,1990.

[25] Smets Ph. ,Kennes R. , *The Transferable Belief Model*, Artificial Intelliegence 66(22),pp. 191—234,1994.

[26] Dubois D. ,Prade H. ,*Representation and Combination of Uncertainty with Belief Functions and Possibility Measures*,Computational Intelligence,4,pp. 244—264,1988.

[27] Dezert J. ,*Foundations for a New Theory of Plausible and Paradoxical Reasoning*, Information and Security Journal, Edited by Tz. Semerdjiev,ProCon Ltd. , Sofia,Bulgaria, Vol. 9,pp. 13—57,2002.

[28] Dezert J. , Smarandache F. , *Fusion of Uncertain and Paradoxical Evidences with the General DSm Hybrid Rule of Combination*,In Advances and Applications of DSmT for Information Fusion(Collected Works) by F. Smarandache & J. Dezert(Editors),American Research Press,Rehoboth,2004.

[29] Smets Ph. ,*Belief Functions:The Disjunctive Rule of Combination and the Generalized Bayesian Theorem*, International Journal of Approximate Reasoning, Vol. 1,1—35,1993.

[30] Smets Ph. , *The Alpha—junctions:Combination Operatiors Aapplicable to Belief Function*, Qualitative and Quantitative Practical Reasoning, Springer, Gabbay, D. M. and Kruse R. and Nonnengart A. and Ohlbach H. J. Editors,1997,131—153.

[31] Dubois D. ,Prade H. ,*A Set—Theoretic View of Belief Functions*,International Journal of General System,pp. 193—226,Vol. 12,1986.

[32] Lefevre E. , Colot O. ,Vannoorenberghe P. ,*Belief Function Combination and Conflict Management*, Information Fusion,3,pp. 149—162,2002.

[33] Sun H. ,Mao S. ,*Multisensor Data Fusion for Target Identification*,Chinese Journal of Electronics, Vol. 4,No. 3,pp. 78—84,July 1995 and Acta Electronic Sinica,Vol. 23,No. 10,1995.

[34] Sun H. , Chen G. , Zhang B. , He K. , Mao S. , *Dempster—Shafer Rule Fusion Identification on Sensitive Infromation Sources*,Chinese Journal of Electronics,Vol. 11,No. 1,pp. 56—61,Jan. 2002.

[35] Sun H. , Farooq M. , *Conjunctive and Disjunctive Combination Rules of Evidence*, Proceedings of SPIE Vol. 5429,April,2004,Orlando,Florida USA.

[36] Gordon J. , Shortliffe E. H. , *The Depster—Shafer Theory of Evidence*, *in Rule—Based Expert Systems*: *The MYCIN Experiments of the Stanford Heuristic Programming Project*, (B. G. Buchanan and E. H. Shortliffe, Eds.), Addison-Wesley, Reading, Mass, 1984.

[37] Klopotek M. A. , *Interpretation of Belief Function in Dempster—Shafer Theory*, Foundations of Computing and Decision Sciences, Vol. 20, No. 4, pp. 287—306, 1995.

[38] Klopotek M. A. , *Identification of Belief Structure in Dempster—Shafer Theory*, Foundations of Computing and Decision Sciences, Vol. 21, No. 1, pp. 35—54. 1996.

第 10 章　DSm 与 MinC 组合规则的比较

Milan Daniel
Institute of Computer Science
Academy of Sciences of the Czech Republic
Pod vodárenskou věží2, CZ—182 07Prague 8, Czech Republic

摘要:应用 DSm 和 MinC 两种组合规则都是为了更好地处理组合信息源之间的冲突。信度组合过程中,我们对冲突的性质及其处理已经做了大致的介绍。本章首先提出 MinC 组合规则,接着介绍 Dempster 组合规则。DSm 和 MinC 两种组合规则的作用范围、结构、方法都会在本章中进行比较,最后给出一些比较的实例。

10.1　引言

经典的 DSm 组合规则最早发表在文献[5,6]当中,用于组合在自由 DSm 模型中的两个或两个以上信息源。此后,混合 DSm 组合规则发展成为既适用于经典的 Shafer(又称为 Dempster - Shafer)模型又适用于混合 DSm 模型的一种规则。DSm 规则的现状在第 4 章中已有介绍,详见式(4.7)至式(4.10)。

在文献[2,4]中介绍的 MinC 组合(最小冲突/最小矛盾)规则是在经典 DS 模型中,针对 Dempster 组合规则的一种替代规则,已经发展成为更好地处理冲突情况的方法,而这点恰好是经典 Dempster 规则的一个弱点。关于 MinC 组合思想的简要介绍会在 10.3 节中给出。

在 DSm 模型中,DSm 规则的分歧和结果都是关于信度,总体而言,这一点承认了鉴别框中命题之间的交集。MinC 组合采用经典的信任函数(BFs),承认在 BFs 中所有命题的交集(属于鉴别框)为空集,并且其结果的信度质量应该为 0。

为了比在 Dempster 规则中采用的经典归一化处理技术更好地解决冲突问题,我们引入了一个包含不同种类冲突(或空集)的系统。为表示中间结果,广义鉴别框架中纳入广义的 BFs,这个鉴别框架包含了经典的 DS 鉴别框架和相应的各

类冲突。

虽然这两种方法及其范例的出发点是不同的，但 MinC 组合中起中间作用的广义信度和自由 DSm 模型相类似，并且在广义层面上的组合方式也和自由 DSm 模型相似。奇怪的是，我们为什么要去比较这两个原本就不相交、看似没有可比性的两种方法呢？

目前，在任意混合 DSm 模型的 DSm 组合得到发展之后，在经典 BFs 上比较两种方法已成为可能，比如 MinC 组合的应用范围。

10.2 信度组合中的冲突

DSm 组合是为冲突情况特别设计的，因而解决冲突没有任何问题。

类似于 Dempster 规则中的一般原理，MinC 组合和 DSm 组合规则都是把一个证据源的基本信度赋值（bba）m_1 赋给集合 X，即 $m_1(X)$；将第二个证据源 bba m_2 赋给集合 Y，即 $m_2(Y)$。然后把 $m_1(X)$ 和 $m_2(Y)$ 相乘，得到基本信度赋值 m_{12} 并赋值给 $X \cap Y$，即 $m_1(X)m_2(Y)$ 是 $m_{12}(X \cap Y)$ 的一部分。

此原理在集合 X 和 Y 相交时效果相对比较好，DSm 规则也没有问题，因为 $X \cap Y$ 始终是 D^Θ 的一个命题，而且它是正值，即使当集合 X 和 Y 在 Θ 中不存在任何共同命题时仍然可以接受。

在 Dempster 规则中，不相交的 X 和 Y 容易产生冲突的情形。根据经典的归一化 Dempster 规则，所有的冲突累加之后重新分配到 2^Θ 中的命题，具体参看文献[9]；或者在 TBM 模型下，根据非归一化 Dempster 规则（Smets 规则）中以 $m(\varnothing)$ 的形式储存，详见文献[10，11]。事实上，Smets 方法中的归一化只是从组合过程阶段延迟到了决策阶段，就像归一化是 TBM 模型中经典 Pignistic 变换的第一步骤。非归一化的 Dempster 规则替代了归一化过程，因而 Pignistic 概率在归一化和非归一化的 Dempster 规则中始终相同。

Dempster 规则的一个缺点是冲突信度的组合，它是由归一化或通过非归一化形式的 Dempster 规则将所有冲突聚集在一起引起的。因此，这里引出了不同类型的冲突，并且使 MinC 组合规则成为处理冲突情形的更好的方法。

10.3 MinC 组合规则

信度函数的 MinC 组合规则（最小冲突组合），是在为了找到一个能比 Dempster 规则更有效处理冲突，又能保持结合律的组合方法的过程中产生的。Dempster－Shafer 理论中的经典 Shafer 模型是假定输入和输出都是信度函数。而

MinC 组合是对非归一化 Dempster 规则的广义化①。在 MinC 中，$m(\varnothing)$被看作是合取组合产生的冲突②，而不是对鉴别框中新的未知命题的假设。为了处理产生这些冲突的集合，首先需要考虑不同种类的冲突。

10.3.1 不同种类冲突的系统

根据信息源 m_i 在某些集合上赋初始值 bbms 来区别冲突，在二元鉴别框架下定义的信度函数只存在一种冲突类型。因而在这种情况下，MinC 组合规则与非归一化的合取规则相一致。

在一个多元鉴别框架中，可以识别出多种冲突，如$\{\theta_1\}\times\{\theta_2\}$，$\{\theta_1\}\times\{\theta_2,\theta_3\}$，$\{\theta_1\}\times\{\theta_2\}\times\{\theta_3\}$，$\{\theta_i,\theta_j,\theta_k\}\times\{\theta_m,\theta_n,\theta_o\}$等。这里的$\times$代表集合之间的冲突，而不是集合上的新的操作算子。例如，$\{\theta_1\}\times\{\theta_2,\theta_3\}$代表集合$\{\theta_1\}$和$\{\theta_2,\theta_3\}$之间的冲突。

假设冲突集合的 bbms 的乘积被临时赋给相应的冲突。例如，$m_1(\{\theta_1\})m_2(\{\theta_2\})$的值被赋给冲突$\{\theta_1\}\times\{\theta_2\}$。这样，就得到了通过 Θ 给出的广义鉴别框架下所谓的广义 bbas 和广义 BFs。

在组合两个三元框架 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}$上的 BFs 时，可以得到下面六种冲突，也就是 Θ 的相分离子集的交集：

$$\{\theta_1\}\times\{\theta_2\},\{\theta_1\}\times\{\theta_3\},\{\theta_2\}\times\{\theta_3\},\{\theta_1,\theta_2\}\times\{\theta_3\},\{\theta_1,\theta_3\}\times\{\theta_2\} \text{ 和}\{\theta_2,\theta_3\}\times\{\theta_1\}$$

由于需要将经典的 BF 作为组合的结果，必须在组合的时候把冲突的 bbms 重新分配到 Θ 的子集当中，这里可以将冲突的 bbms 按照比例分配给 Θ 的相应子集。一些比例分配方法在文献[4]中进行了说明。但是这些比例分配破坏了合取组合规则中所必需的结合律。为了保持该性质，必须要使广义信度函数能和其他 BFs 以及广义 BFs 进行组合，而这样又会产生另外一些冲突，如

$$\{\theta_1\}\times\{\theta_2\}\times\{\theta_3\},(\{\theta_1,\theta_2\}\times\{\theta_1,\theta_3\})\times\{\theta_2\}\times\{\theta_3\},(\{\theta_1,\theta_2\}\times\{\theta_3\})\times(\{\theta_2\}\times\{\theta_3\})$$

等。

为保持结合律，有一种类型的冲突起了很大的作用，称为潜在（或部分）冲突③。例如，某个潜在冲突$\{\theta_1,\theta_2\}\times\{\theta_2,\theta_3\}$在两个信度进行组合的情况下不是冲突，因为$\{\theta_1,\theta_2\}\cap\{\theta_2,\theta_3\}=\{\theta_2\}$，但它可能在后续的组合中引起冲突，例如纯（或真实）冲突④$\{\theta_1,\theta_2\}\times\{\theta_2,\theta_3\}\times\{\theta_1,\theta_3\}$（因为在 Shafer 模型下$\{\theta_1,\theta_2\}\cap\{\theta_2,\theta_3\}\cap\{\theta_1,\theta_3\}=\varnothing$）。

---

① 这里注意到，MinC 组合方法是一种更一般的组合单命题信度函数的特定情形，参见文献[3]。

② 在文献[2,4]中应用术语“contradiction”，这里为了保持术语上的一致而使用“conflict”。

③ 文献[2,4]中最初的术语是“Potential contradictions”。

④ 在文献[2,4]中称为“A real contradiction”。

为避免出现无限种不同的冲突，不同的冲突被分成等价类～，称为冲突类，例如$\{\theta_1\}\times\{\theta_2\}\sim\{\theta_2\}\times\{\theta_1\}\sim\{\theta_1\}\times\{\theta_2\}\times\{\theta_2\}\times\{\theta_2\}\times\{\theta_1\}\times\{\theta_1\}\times\{\theta_1\}$等。MinC 组合适用这些等价类，而非所有的不同冲突，详见文献[4]。

若以单命题集合的形式来考虑冲突，则冲突$\{\theta_1,\theta_2\}\times\{\theta_3\}$可以看作一系列基本冲突$\{\{\theta_1\}\times\{\theta_3\},\{\theta_2\}\times\{\theta_3\}\}$，也就是单个命题之间冲突的集合。与此相类似，潜在冲突$\{\theta_1,\theta_2\}\times\{\theta_2,\theta_3\}$被看作一系列基本冲突$\{\{\theta_1\}\times\{\theta_2\},\{\theta_1\}\times\{\theta_3\},\{\theta_2\},\{\theta_2\}\times\{\theta_3\}\}$，其中$\{\theta_2\}\sim\{\theta_2\}\times\{\theta_2\}$称为微小冲突①，即根本不存在冲突，每个潜在冲突中至少有一个微小冲突。基本冲突集合的构造有点类似于冲突集合的笛卡儿乘积，即$\{\theta_1\}\times\{\theta_2\}\times\cdots\times\{\theta_k\}$，而不是 n 元$[\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k]$。由于上面应用了基本冲突的等价关系～，所以在相同的集合中存在不同的 n 元冲突，因此这里并未像通常那样在笛卡儿乘积中用概念 n－tuples。“单命题冲突”的思想也被推广到了“单命题组合”中的非冲突集合，详见文献[3]。

为了进一步减少冲突类型的数量，这里只考虑最小冲突。例如，$\{\theta_1\}\times\{\theta_2\}$，$\{\theta_3\}$是集合$\{\{\theta_1\}\times\{\theta_2\},\{\theta_3\},\{\theta_1\}\times\{\theta_2\}\times\{\theta_3\}\}$的最小冲突，即最小冲突集合中包含的单命题集合是包含在所有基本冲突单命题集合中的最小集合。因此$\{\{\theta_1\}\times\{\theta_2\},\{\theta_3\}\}\sim\{\{\theta_1\}\times\{\theta_2\},\{\theta_3\},\{\theta_1\}\times\{\theta_2\}\times\{\theta_3\},\{\theta_1\}\times\{\theta_2\}\times\{\theta_4\}\times\{\theta_5\},\{\theta_1\}\times\{\theta_3\}\times\{\theta_5\}\}$。由于仅考虑最小冲突，问题得以简化，这样更接近 Shafer 模型，并且不影响结合律。

这样在一个三元框架 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}$下，可以获得 8 个冲突类（$\{\theta_1\}\times\{\theta_2\}$，$\{\theta_1\}\times\{\theta_3\}$，$\{\theta_2\}\times\{\theta_3\}$，$\{\theta_1\}\times\{\theta_2\}\times\{\theta_3\}$，$\{\{\theta_1\}\times\{\theta_2\},\{\theta_1\}\times\{\theta_3\}\}$，$\{\{\theta_1\}\times\{\theta_2\},\{\theta_2\}\times\{\theta_3\}\}$，$\{\{\theta_1\}\times\{\theta_3\},\{\theta_2\}\times\{\theta_3\}\}$，$\{\{\theta_1\}\times\{\theta_2\},\{\theta_1\}\times\{\theta_3\},\{\theta_2\}\times\{\theta_3\}\}$）以及 3 个潜在冲突（$\{\{\theta_1\},\{\theta_2\}\times\{\theta_3\}\}$，$\{\{\theta_2\},\{\theta_1\}\times\{\theta_3\}\}$，$\{\{\theta_3\},\{\theta_1\}\times\{\theta_2\}\}$），加上 Θ 的 7 个非冲突的子集，就有 18 个冲突命题，在其上或在一个广义三元鉴别框包含的 18 个命题上赋非负的 bbms 值。

10.3.2 广义鉴别框下的组合

由于 MinC 组合规则满足合取组合规则的性质，那么如果 $X\cap Y$ 不为空集，则 $m_1(X)m_2(Y)$赋值给 $X\cap Y$，否则就赋给 $X\times Y$。更确切地说，这里考虑的是冲突类 $X\times Y$ 的最小代表命题，而不是 $X\times Y$ 本身。它是唯一的，而且具有一定的次序，即基本冲突内部命题的次序。这些次序位置的固定性使得选择～冲突类的唯一代表成为可能。文献[2,4]给出了三维情况下关于 MinC 组合规则的一个完整的 18×18 的表。这里只给出其说明性的部分，见表 10.1。广义 bba$m^0(Z)$的结果是通过计算所有 $m_1(X)m_2(Y)$的累加和得到的，其完整的表格中对应于 X 所在

① 即“A trivial contradiction”。

的行以及 Y 所在的列的命题交运算得到 Z。换句话说，广义 $m^0(Z)$ 是通过所有的 $m_1(X)m_2(Y)$ 的和计算出来的，在这里如果满足 $(X\subseteq Y)\vee(Y\subseteq X)$ 则有 $Z=X\cap Y$，否则 $Z\sim X\times Y$，$\sim$ 表示上一节介绍到的冲突间的等价（Z 和 $X\times Y$ 在同一类冲突中），即

$$m^0(Z)=\sum_{\substack{Z=X\cap Y\\ X\subseteq Y\vee Y\subseteq X}} m_1(X)m_2(Y)+\sum_{\substack{Z\sim X\times Y\\ X\nsubseteq Y\& Y\nsubseteq X}} m_1(X)m_2(Y) \tag{10.1}$$

为了减小下面表格的尺寸，表中用到下列缩写：A 代表 $\{A\}$，类似地，AB 代表 $\{A,B\}$，ABC 代表 $\{A,B,C\}$，$A\times B$ 代表 $\{A\}\times\{B\}$，同样地，$A\times BC$ 代表 $\{A\}\times\{B,C\}$，$\times$ 代表 $\{A\}\times\{B\}\times\{C\}$，$\square A$ 代表 $\square\{A\}$，$\square$ 代表 $\{A,B\}\times\{A,C\}\times\{B,C\}$。

虽然 MinC 组合规则在广泛 BFs 上满足交换律和结合律，克服了 Dempster 规则（归一化的和非归一化的）的一些缺点，但这个理论上非常好的组合规则随着鉴别框命题数目的增加，其计算的复杂度大大增加。

表 10.1　$\Theta=\{A, B, C\}$ 上两个广义 BFs 的部分组合

	A	B	AB	ABC	$A\times B$	$A\times BC$	$\times$	$\square$	$\square A$
A	A	$A\times B$	A	A	$A\times B$	$A\times BC$	$\times$	$A\times BC$	A
B	$A\times B$	B	B	B	$A\times B$	$A\times B$	$\times$	$B\times AC$	$B\times AC$
C	$A\times C$	$B\times C$	$C\times AB$	C	$\times$	$A\times C$	$\times$	$C\times AB$	$C\times AB$
BC	$A\times BC$	B	$\square B$	BC	$A\times C$	$A\times BC$	$\times$	$\square$	$\square$
AC	A	$B\times AC$	$\square A$	AC	$A\times B$	$A\times BC$	$\times$	$\square$	$\square A$
AB	A	B	AB	AB	$A\times B$	$A\times BC$	$\times$	$\square$	$\square A$
ABC	A	B	AB	ABC	$A\times B$	$A\times BC$	$\times$	$\square$	$\square A$
$A\times B$	$A\times B$	$A\times B$	$A\times B$	$A\times B$	$A\times B$	$A\times B$	$\times$	$A\times B$	$A\times B$
$A\times C$	$A\times C$	$\times$	$A\times C$	$A\times C$	$\times$	$\times$	$\times$	$A\times C$	$A\times C$
$B\times C$	$\times$	$B\times C$	$B\times C$	$B\times C$	$\times$	$A\times C$	$\times$	$B\times C$	$B\times C$
$A\times BC$	$A\times BC$	$A\times B$	$A\times BC$	$A\times BC$	$A\times B$	$A\times BC$	$\times$	$A\times BC$	$A\times BC$
$B\times AC$	$A\times B$	$B\times AC$	$B\times AC$	$B\times AC$	$A\times B$	$A\times B$	$\times$	$B\times AC$	$B\times AC$
$C\times AB$	$A\times C$	$B\times C$	$C\times AB$	$C\times AB$	$\times$	$A\times C$	$\times$	$C\times AB$	$C\times AB$
$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
$\square$	$A\times BC$	$B\times AC$	$\square$	$\square$	$A\times B$	$A\times BC$	$\times$	$\square$	$\square$
$\square A$	A	$B\times AC$	$\square A$	$\square A$	$A\times B$	$A\times BC$	$\times$	$\square$	$\square A$
$\square B$	$A\times BC$	B	$\square B$	$\square B$	$A\times B$	$A\times BC$	$\times$	$\square$	$\square$
$\square C$	$A\times BC$	$B\times AC$	$\square$	$\square C$	$A\times B$	$A\times BC$	$\times$	$\square$	$\square$

10.3.3 冲突信度质量的再分配

由于信度质量在组合过程中被分配到冲突类和潜在冲突上，因此尽管 MinC 组合规则应用在经典 BFs 上，其广义组合结果必然是一个广义信任函数。为了得到 Shafer 模型下的经典信任函数，必须要经历以下两个步骤：首先要将部分（潜在）冲突的 bbms 重新分配给它们的非冲突命题，然后将纯冲突的 bbms 进行比例分配。由于纯冲突和部分（潜在）冲突的本质是不同的，因此两类冲突 bbms 的再分配方式也是不同的。

1. 部分冲突的 gbbms 再分配

部分冲突（潜在冲突）的 gbbms 仅重新分配给它们的微小冲突集合，也就是它们的非冲突命题的集合，例如将 $m^0\{\theta_i,\theta_j\}\times\{\theta_i,\theta_k\}$ 重新分配给 $\{\theta_i\}$。为了和广义层面上的 gbba m^0 区分开，我们把这一步的结果 gbba 记为 m^1，因此得到 $m^1\{\theta_i,\theta_j\}\times(\{\theta_i,\theta_k\})=0$，且 $m^1(\{\theta_i\})$ 是所有 $m^0(X)$ 的总和，这里 $\{\theta_i\}$ 是 X 的最大非冲突的部分。在这一步骤中我们没有对完全冲突的 gbbms 进行任何处理，因此任一完全冲突 Y 都满足 $m^1(Y)=m^0(Y)$。

2. 纯冲突 gbbms 的比例化

这里给出两种方法对已经通过 m^0 赋值的纯冲突 gbbms 实现比例化。Θ 的两个子集之间的冲突 $X\times Y$ 的基本信度赋值能够按比例分配下来，即根据对应的非冲突集合的 bbms 按比例进行再分配：

a）按文献[1]中比例组合规则分配到 X、Y 和 $X\cup Y$ 上；

b）分配到 $X\cup Y$ 的所有非空子集中。这个方法把最初的比例化的思想和对“单命题”冲突的考虑结合了起来。

对于某鉴别框中几个子集 $X_1,X_2,\cdots,X_k\subset\Theta$ 之间的一个冲突 X，例如，对三维中 $\{\theta_1\}\times\{\theta_2\}\{\theta_3\}$ 和□～$\{\{\theta_1\}\times\{\theta_2\},\{\theta_1\}\times\{\theta_3\},\{\theta_2\}\times\{\theta_3\}\}$～$\{\theta_1,\theta_2\}\times\{\theta_1,\theta_3\}$，以及 n 维情况下更多的冲突，可以用下列方法概括上述比例化的过程。即冲突的 $X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_k$ 的 bbm 能够按比例分配到：

a）所有满足 $j\leqslant k$ 的 $\bigcup_{i=1}^{j}X_i$ 中，X_i 来自于集合 $\{X_1,X_2,\cdots,X_k\}$；

b）$X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_k$ 中所有非空子集中。

为了进行更清晰地表达，三维框架 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}$ 中子集冲突的比例分配形式见表 10.2。第一列中冲突的 bbms 应该根据方法 a）按比例分配到第二列集合中，或者根据方法 b）按比例分配到第三列集合中。

如果对于所有的 X_i，其 gbbms 满足 $m^1(X_i)=0$，那么将根据集合的个数对 $m^1(X_1\times X_2\times\cdots\times X_k)$ 按比例进行划分，也就是在比例化方法 a）中按 $2k-1$ 进行划分，在比例化方法 b）中按 $2m-1$ 进行划分（在方法 b）中，$m=|X_1\cup X_2\cup\cdots\cup$

$X_k|$)。

表 10.2 三维鉴别框下的比例化

冲突种类	比例化方法	比例化方法
$\{\theta_1\}\times\{\theta_2\}$	$\{\theta_1\},\{\theta_2\},\{\theta_1,\theta_2\}$	$\{\theta_1\},\{\theta_2\},\{\theta_1,\theta_2\}$
$\{\theta_1\}\times\{\theta_2,\theta_3\}$	$\{\theta_1\},\{\theta_2,\theta_3\},\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}$	$\mathscr{P}((\theta_1,\theta_2,\theta_3))-\varnothing$
$\{\theta_1,\theta_2\}\times\{\theta_1,\theta_3\}\times\{\theta_2,\theta_3\}$	$\{\theta_1,\theta_2\},\{\theta_1,\theta_3\},\{\theta_2,\theta_3\},\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}$	$\mathscr{P}(\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\})-\varnothing$
$\{\theta_1\}\times\{\theta_2\}\times\{\theta_3\}$	$\mathscr{P}(\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\})-\varnothing$	$\mathscr{P}(\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\})-\varnothing$

即使$\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}\not\subseteq\Theta$,表中不同种类冲突的比例化形式仍然是相同的。因此从表中可以看到,在方法 b)中比例分配方法有点像在幂集 $\Theta'\subseteq\Theta$ 或是在该幂集子集上的局部归一化过程。例如,按照方法 a),$m^1(\{\theta_1\}\times\{\theta_2,\theta_3\})$ 将被按比例分配到$\{\theta_1\},\{\theta_2,\theta_3\},\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}$中,因而$\frac{m^1(\{\theta_1\})}{m^1(\{\theta_1\})+m^1(\{\theta_2,\theta_3\})+m^1(\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\})}m^1(\{\theta_1\}\times\{\theta_2,\theta_3\})$ 将被分配到$\{\theta_1\}$上,$\frac{m^1(\{\theta_2,\theta_3\})}{m^1(\{\theta_1\})+m^1(\{\theta_2,\theta_3\})+m^1(\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\})}m^1(\{\theta_1\}\times\{\theta_2,\theta_3\})$将被分配到$\{\theta_2,\theta_3\}$上,$\frac{m^1(\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\})}{m^1(\{\theta_1\})+m^1(\{\theta_2,\theta_3\})+m^1(\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\})}m^1(\{\theta_1\}\times\{\theta_2,\theta_3\})$将被分配到$\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}$上。类似地,根据比例化方法 b),

$$\frac{m^1(\{\theta_2,\theta_3\})}{m^1(\{\theta_1\})+m^1(\{\theta_2\})+m^1(\{\theta_3\})+m^1(\{\theta_1,\theta_2\})+m^1(\{\theta_1,\theta_3\})+m^1(\{\theta_2,\theta_3\})+m^1(\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\})}$$

$m^1(\{\theta_1\}\times\{\theta_2,\theta_3\})$将被分配到$\{\theta_2,\theta_3\}$上,$\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}$的其他子集也与此相类似。对于单个命题间的冲突,两种比例化方法是相一致的,参见表 10.2 中第 1 行和第 4 行。特别需要指出的是,在二维情况下只有唯一的比例化方法,这是因为它只有基本的冲突。这种比例化方法事实上和经典的归一化是一致的,详见 10.5 节中的实例。

要记住的是,无论是局部冲突 gbbms 的再分配还是后面的比例化方法,均不能保证广义层面上 MinC 组合规则的结合性,因此我们要始终考虑并保存结果的广义形式,以便为后面与其他信度的组合做准备。

3. MinC 组合规则方法总结

可以总结当 $n\geqslant 2$ 个信息源进行 MinC 组合的过程如下:

(1) 利用($n-1$)次 MinC 的广义形式来计算 gbba m^0,具体参见式(10.1);

(2) 根据部分冲突的 gbbms 进行再分配,得到 gbba m^1 之后,就可以应用比例化方法 a)或 b)来获得最终的 bbm m。如果想使后来的组合尽可能地保持结合性,就必须要记住 gbbm m^0,并根据它进行进一步的组合(如果有)。

10.4 比较

10.4.1 广义鉴别框的比较

本章已经介绍了，DSm 和 MinC 规则来自两种完全不同的假设和思想。另一方面，三维情形下鉴别框、冲突类以及潜在冲突（7+8+3）的 18 个不同的子集，或者说一个广义三维鉴别框中的 18 个命题，对应了自由 DSm 模型中超幂集 D^Θ 中的 18 个非空命题。此外，如果将鉴别框中的子集和基本冲突的集合改写为它们命题间的并集，例如$\{\theta_i,\theta_j,\theta_k\}$可以改写为$\{\theta_i,\theta_j,\theta_k\}\sim\theta_i\cup\theta_j\cup\theta_k$，而将冲突改写为它们之间的交集，如$\{\theta_i\}\times\{\theta_j\}\sim\theta_i\cap\theta_j$，$\{\theta_i,\theta_j\}\times\{\theta_i,\theta_k\}\sim\{\theta_i\cup\theta_j\}\cap(\theta_i\cup\theta_k)$，$\{\{\theta_i\}\times\{\theta_j\},\{\theta_j\}\times\{\theta_k\},\{\theta_i\}\times\{\theta_j\}\times\{\theta_k\}\}\sim(\theta_i\cap\theta_j)\cup(\theta_j\cap\theta_k)\cup(\theta_i\cap\theta_j\cap\theta_k)$，就会得到下面的表达式：

$\{\theta_1\}\sim\theta_1=\alpha_9$

$\{\theta_2\}\sim\theta_2=\alpha_{10}$

$\{\theta_3\}\sim\theta_3=\alpha_{11}$

$\{\theta_1,\theta_2\}\sim\theta_1\cup\theta_2=\alpha_{15}$

$\{\theta_1,\theta_3\}\sim\theta_1\cup\theta_3=\alpha_{16}$

$\{\theta_2,\theta_3\}\sim\theta_2\cup\theta_3=\alpha_{17}$

$\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}\sim\theta_1\cup\theta_2\cup\theta_3=\alpha_{18}$

$\{\theta_1\}\times\{\theta_2\}\sim\theta_1\cap\theta_2=\alpha_2$

$\{\theta_1\}\times\{\theta_3\}\sim\theta_1\cap\theta_3=\alpha_3$

$\{\theta_2\}\times\{\theta_3\}\sim\theta_2\cap\theta_3=\alpha_4$

$\{\theta_1\}\times\{\theta_2,\theta_3\}=\{\{\theta_1\}\times\{\theta_2\},\{\theta_1\}\times\{\theta_3\}\}\sim\theta_1\cap(\theta_2\cup\theta_3)=\alpha_7$

$\{\theta_2\}\times\{\theta_1,\theta_3\}=\{\{\theta_1\}\times\{\theta_2\},\{\theta_2\}\times\{\theta_3\}\}\sim\theta_2\cap(\theta_1\cup\theta_3)=\alpha_6$

$\{\theta_3\}\times\{\theta_1,\theta_2\}=\{\{\theta_3\}\times\{\theta_1\},\{\theta_3\}\times\{\theta_2\}\}\sim\theta_3\cap(\theta_1\cup\theta_2)=\alpha_5$

$\{\theta_1\}\times\{\theta_2\}\times\{\theta_3\}\sim\theta_1\cap\theta_2\cap\theta_3=\alpha_1$

$\{\{\theta_1\}\times\{\theta_2\},\{\theta_1\}\times\{\theta_3\},\{\theta_2\}\times\{\theta_3\}\}\sim(\theta_1\cap\theta_2)\cup(\theta_1\cap\theta_3)\cup(\theta_1\cap\theta_3)=\alpha_8$

$\square\theta_1=\{\{\theta_1\},\{\theta_2\}\times\{\theta_3\}\}\sim\theta_1\cup(\theta_2\cap\theta_3)=\alpha_{14}$

$\square\theta_2=\{\{\theta_2\},\{\theta_1\}\times\{\theta_3\}\}\sim\theta_2\cup(\theta_1\cap\theta_3)=\alpha_{13}$

$\square\theta_3=\{\{\theta_3\},\{\theta_1\}\times\{\theta_2\}\}\sim\theta_3\cup(\theta_1\cap\theta_2)=\alpha_{12}$

因此 MinC 方法的一个广义鉴别框唯一对应着 $D^\Theta-\varnothing$，是产生 Dedekind 格子模型的又一途径。

10.4.2 组合原理的比较

对两个非冲突集合 $X,Y\subset\Theta$ 的 bbms，MinC 和 DSm 两种规则都将信度质量的乘积赋给集合的交集[①]。如果其中一个（或两个）集合是冲突的，MinC 组合就将它们的 bbms 的乘积赋给冲突 $X\cap Y$。与上面类似，我们把这个冲突作为交集 $X\cap Y$ 来考虑。应该去证实 $X\cap Y$ 是不是和 MinC 组合表中的对应域相一致。

在第一个例子中，定义 $A_1\triangleq\{\theta_1,\theta_3\}\times(\{\theta_3\}\times\{\theta_1,\theta_2\})$，于是有

$$\begin{aligned}A_1\sim(\theta_1\cup\theta_3)\cap(\theta_3\cap(\theta_1\cup\theta_2))&=(\theta_1\cap(\theta_3\cap(\theta_1\cup\theta_2)))\\&\quad\cup(\theta_3\cap(\theta_3\cap(\theta_1\cup\theta_2)))\\&=(\theta_3\cap(\theta_1\cap(\theta_1\cup\theta_2)))\cup(\theta_3\cap(\theta_1\cup\theta_2))\\&=(\theta_3\cap\theta_1)\cup(\theta_3\cap(\theta_1\cup\theta_2))=(\theta_3\cap(\theta_1\cup\theta_2))\\&\sim\{\theta_3\}\times\{\theta_1,\theta_2\}\end{aligned}$$

在第二个例子中，定义 $A_2\triangleq(\{\theta_1\}\times\{\theta_2\}\times\{\theta_3\})\times\{\{\theta_1\}\times\{\theta_2\},\{\theta_1\}\times\{\theta_3\},\{\theta_2\}\times\{\theta_3\}\}$，于是有

$$\begin{aligned}A_2&\sim(\theta_1\cap\theta_2\cap\theta_3)\times((\theta_1\cap\theta_2)\cup(\theta_1\cap\theta_3)\cup(\theta_2\cap\theta_3))\\&\sim(\theta_1\cap\theta_2\cap\theta_3)\cap((\theta_1\cap\theta_2)\cup(\theta_1\cap\theta_3)\cup(\theta_2\cap\theta_3))\\&=\theta_1\cap\theta_2\cap\theta_3\cap((\theta_1\cap\theta_2)\cup(\theta_1\cap\theta_3)\cup(\theta_2\cap\theta_3))\\&=(\theta_1\cap\theta_2\cap\theta_3)\cup(\theta_1\cap\theta_2\cap\theta_3)\cup(\theta_1\cap\theta_2\cap\theta_3)\\&=\theta_1\cap\theta_2\cap\theta_3\sim\{\theta_1\}\times\{\theta_2\}\times\{\theta_3\}\end{aligned}$$

在第三个例子中，定义 $A_3\triangleq\square\{\theta_1\}\times(\theta_1\times\{\theta_2,\theta_3\})$，于是有

$$\begin{aligned}A_3&=\{\{\theta_1\},\{\theta_2\times\theta_3\}\}\times(\theta_1\times\{\theta_2,\theta_3\})\\&\sim(\theta_1\cup(\theta_2\cap\theta_3))\cap(\theta_1\cap(\theta_2\cup\theta_3))=(\theta_1\cup(\theta_2\cap\theta_3))\cap(\theta_1\cap(\theta_2\cup\theta_3))\\&=(\theta_1\cap(\theta_1\cap(\theta_2\cup\theta_3)))\cup((\theta_2\cap\theta_3))\cap(\theta_1\cap(\theta_2\cup\theta_3))\\&=(\theta_1\cap(\theta_2\cup\theta_3))\cup((\theta_2\cap\theta_3)\cap(\theta_1\cap(\theta_2\cup\theta_3)))\\&=(\theta_1\cap(\theta_2\cup\theta_3))\cup((\theta_2\cap\theta_3\cap\theta_1\cap\theta_2)\cup(\theta_2\cap\theta_3\cap\theta_1\cap\theta_3))\\&=(\theta_1\cap(\theta_2\cup\theta_3))\cup((\theta_1\cap\theta_2\cap\theta_3)\cup(\theta_1\cap\theta_2\cap\theta_3))\\&=(\theta_1\cap(\theta_2\cup\theta_3))\cup(\theta_1\cap\theta_2\cap\theta_3)=(\theta_1\cap(\theta_2\cup\theta_3))\sim(\theta_1\times\{\theta_2,\theta_3\})\end{aligned}$$

根据 $\{\theta_1,\theta_3\}\times\{\theta_1,\theta_2\}\sim(\theta_1\cup\theta_3)\times(\theta_1\cup\theta_2)\sim(\theta_1\cup\theta_3)\cap(\theta_1\cup\theta_2)=(\theta_1\cap(\theta_1\cup\theta_2)\cup(\theta_3\cap(\theta_1\cup\theta_2)=(\theta_1\cap\theta_1\cup\theta_1\cap\theta_2)\cup(\theta_3\cap\theta_1\cup\theta_3\cap\theta_2)=(\theta_1)\cup(\theta_3\cap\theta_1)\cup$

---

① 这里必须要说明的是，MinC 组合规则并不像 DSm 组合规则（参见式(4.2)和式(4.5)）那样，存在信度源 $k\geqslant 2$ 时的 k 元操作算子。然而从理论上来说，对 k 个信度源的 MinC 组合可以很容易像 DSm 组合 k 个信源的规则那样构造出来。更进一步，由于它在广义层面上的结合性，应用 $k-1$ 次二元组合形式能得到相同的结果，并且可以继续对冲突的 bbms 进行再分配。

$(\theta_3 \cap \theta_2) = (\theta_1) \cup (\theta_3 \cap \theta_2) \sim \{\{\theta_1\}, \{\theta_2 \times \theta_3\}\} \sim \square\{\theta_1\}$，我们可以再次证明集合$\{\theta_1, \theta_3\}$，$\{\theta_1, \theta_2\}$bbms 的 MinC 组合对应于 D^Θ 中的相应命题$(\theta_1 \cup \theta_3)$和$(\theta_1 \cup \theta_2)$，也就是 $\theta_1 \cup (\theta_3 \cap \theta_2)$。此外，这也表明了在 Shafer 模型中，包含非空交集$\{\theta_1, \theta_3\} \cap \{\theta_1, \theta_2\} = \{\theta_1\}$的两个集合之间的部分冲突地位的提高。Dempster 规则中用到的交集$\{\theta_1\}$不同于在广义层面上的广义 MinC 和自由 DSm 交集$\{\theta_1, \theta_3\} \cap \{\theta_1, \theta_2\} \sim (\theta_1 \cup \theta_3) \cap (\theta_1 \cup \theta_2) = (\theta_1) \cup (\theta_3 \cap \theta_2) \sim \square\{\theta_1\}$。

类似地，能够证明完整 MinC 组合表中所有的域和相应集合的交集是一一对应的。在推广到 n 维时可以证得在冲突上的等价关系和格子框架$\{\Theta, \cap, \cup\}$的性质是保持一致的。因此 MinC 组合公式(10.1)对应了经典 DSm 组合公式(4.1)。

因此，在广义层面上的 MinC 组合①完全对应于自由 DSm 模型中的 DSm 组合规则。

10.4.3 组合的两个步骤

因为 MinC 不是根据 DSm 模型而是根据经典的 Shafer 模型设计的，所以必须要在混合 DSm 规则的特定 Shafer 模型下进行比较。根据混合 DSm 规则当前的发展状况(详见第 4 章)，在第一个步骤中，所有组合都在自由 DSm 模型下进行——这与广义 MinC 组合完全等同——在第二步引入了约束条件。第二步和 MinC 方法的再分配相类似。它并不明确区分诸如部分冲突和完全冲突，但是类似于 MinC 组合，它的 bbms 也是通过两种不同的方法进行重分配。引入约束条件可以将两个或两个以上的 D^Θ 中的命题联系起来，例如，在第 4 章的例 4 中，命题 α_9 和命题 α_{14} 联系起来，命题 α_{10}、α_{11} 也相应地和 α_{13}、α_{12} 联系起来。那些命题的 Gbbms 在这个过程中被重新进行了分配。实际上，作为 MinC 方法潜在冲突再分配的类推，$m_{\mathcal{M}^f}(\alpha_9)$、$m_{\mathcal{M}^f}(\alpha_{10})$ 和 $m_{\mathcal{M}^f}(\alpha_{11})$分别重新分配给了 $m_{\mathcal{M}^f}(\alpha_{14})$、$m_{\mathcal{M}^f}(\alpha_{13})$ 和 $m_{\mathcal{M}^f}(\alpha_{12})$。可以证明命题 α_9、α_{10} 和 α_{11} 实际上是和 MinC 方法中的潜在冲突相一致。第二步还包括集合所有的空集，并将它们的 bbms 进行重新分配。这个过程完全与 MinC 方法中纯冲突的比例化相对应。

因此，MinC 与 DSm 组合规则唯一重要的差别在于冲突(空的)集合的 bbms 到非冲突(非空的)集合上的再分配，也就是重新分配到鉴别框中的子集。这是因为在混合 DSm 组合的第二步中进行的再分配与在 MinC 中用到的任何一个比例化方法都不一致。

10.4.4 组合规则的结合性

前面已经提到在广义层面上 DSm 规则和 MinC 组合规则都完全具有结合性，

---

① 对 MinC 组合规则和其他冲突信度组合方法的比较参见文献[8]。

广义层面用 DSm 专业术语来说就是自由 DSm 模型。而在两种组合的第二步，也就是 DSm 组合约束的引入和冲突的再分配（两者的比例化），却都不保持结合性。如果把考虑所有约束的组合结果作为另一个组合的输入，则会得到次优结果，详见第 4 章的 4.5.5 节。

为了在广义层面上尽可能地保持组合的结合性，必须使用 DSm 规则的 n 元形式。在 k 个输入信度已经组合的情况下，必须保存所有的 k 个输入信度函数。如果想把先前的结果与第 $k+1$ 个输入 m_{k+1} 进行组合，那么可以对 $k+1$ 个输入重新进行 n 元组合，或者可以根据先前的自由 DSm 组合结果（第一步中最后的结果）应用第一步中的二元组合形式去组合新的输入（使用 $k+1$ 个输入的 n 元组合形式可得到相同的结果）。然而，最终还是要使用第二步的 n 元形式来处理所有的约束。

在 MinC 组合的过程中还有另一种情况。因为这里只考虑最小的冲突，所以第二步的结果只取决于第一步的广义结果 m^0，并不需要输入信度函数来对部分冲突进行再分配和比例化。对于非归一化的组合规则（包括广义形式），无论使用 k 个输入的 n 元形式，还是应用 $k-1$ 次二元组合形式都能得到相同的结果。因此，广义 MinC 组合的二元形式和一元再分配都满足第 4 章中介绍的最优结果。如果对 k 个输入进行了组合，那么只要保存广义的结果就已经足够了，而不需要存储所有的输入。接着对广义的结果和后面的输入 m_{k+1} 进行组合。最后为了得到经典的 Shafer 结果而执行第二步。当然，还可以储存所有的输入，并进行一个新的组合，这类似于 DSm 方法。

10.4.5　特殊的例子

特别地，在二维情况下，MinC 相当于 Dempster 规则——这里只有一种形式的冲突，而且给出的两种比例化方法 a）和 b）与归一化过程都是相一致的。二维 DSm 与 Yager 规则相对应（参见文献[12]），其中如果满足集合 $X\cap Y$ 非空，则 $m_1(X)m_2(Y)$ 将被赋值给 $X\cap Y$，如果 $X\cap Y=\varnothing$，则它将被赋给 Θ；它也和 Dubois-Prade 规则相一致（参见文献[7]）。这里，如果满足集合 $X\cap Y$ 非空，则 $m_1(X)m_2(Y)$ 将被赋值给 $X\cap Y$，否则它将被赋给 $X\cup Y$。为了完成二维上的比较，有必要为二维自由 DSm 模型加入经典的 DSm 组合规则，这相当于 TBM 中非归一的 Dempster 规则。相关例子参见 10.5 节中的表 10.3。

在 $n(n>2)$ 维情况下，MinC 和 DSm 规则都不符合任何形式的 Dempster 或 Yager 规则。另一方面，混合 DSm 规则的二维形式和 Shafer 模型中的 Dubois-Prade 规则相一致，有关例子详见 10.5 节中的表 10.6。

10.4.6　DSm 与 MinC 两种方法表达方式的比较

因为 MinC 组合是为包含相互排斥命题鉴别框的经典信度函数的组合而设计

的，所以并不能明确地表达框架中的两个命题是否具有非空的交集。唯一的方法是利用两个经典 BFs 的广义组合结果。另一方面，即使超幂集 D^{Θ} 中比维恩图中的对应部分有更多的命题，在 DSm 方法中也不能像广义的 Pignistic 概率(参见第 7 章，它符合 $P(\theta_1)>0$ 和 $P(\theta_2)=0$)那样，只把信度质量赋给 θ_1，而不分配给 θ_2。θ_1 和 θ_2 的交集 $\theta_1\cap\theta_2$ 始终是它们本身的一个子集，因此根据 $m(\theta_1)>0$，总可以得到 $P(\theta_1\cap\theta_2)>0$ 和 $P(\theta_2)>0$。不能赋任何 gbbm 给 $\theta_1-\theta_2$，唯一的方法是给它附加一个额外的约束条件 $\theta_1\cap\theta_2=\varnothing$，但这个约束条件应该在模型的所有信度中都有效，而不是只对一个或几个特定的信度有效。因为 Shafer 模型已经含有所有的排斥性约束，所以上述描述的特性和它没有关系，因此 DSm 方法和 MinC 组合在 Shafer 模型中都有类似的表述。此外，DSm 方法还可利用它本身的特性表达交集正的信度质量。

10.5　例子

本节进行了组合实例的比较，第一个二维的例子不仅简单地比较了 DSm 和 MinC 组合规则，还比较了信度组合的归一和非归一的 Dempster 规则、Yager 规则和 Dubois - Prade 规则，参见表 10.3。因为在二维情况下比例化方法 a)和 b)是一致的，则后面对应的 bbas$m_{12}^{a)}$和 $m_{12}^{b)}$也是一致的，用 m^{MinC}表示 $m_{12}^{a)}\equiv m_{12}^{b)}$。这个例子能让我们做一个广泛的比较，但并未真正发现所给出的信度组合方法的性质。由于这个原因，我们又给出一个复杂一点的三维情形的例子，见表 10.4 和表 10.5。它告诉我们组合过程中，冲突和部分冲突是怎样形成的，约束是怎样引入的，以及比例化是怎样执行的。

表 10.3　二维信度函数组合的比较

	m_1	m_2	$m_{12}^{\mathcal{M}^f}$	$m_{12}^{\mathcal{M}^{\Theta}}$	m_{12}^{0}	m_{12}^{MinC}	m_{12}^{TBM}	m_{12}^{Y}	m_{12}^{DP}	$m_{12}^{\oplus}$
$\theta_1\sim\{\theta_1\}$	0.6	0.2	0.48	0.48	0.48	0.6000	0.48	0.48	0.48	0.6000
$\theta_2\sim\{\theta_2\}$	0.1	0.3	0.17	0.17	0.17	0.2125	0.17	0.17	0.17	0.2125
$\theta_1\cup\theta_2\sim\{\theta_1,\theta_2\}$	0.3	0.5	0.15	0.35	0.15	0.1875	0.15	0.35	0.35	0.1875
$\theta_1\cap\theta_2\sim\{\theta_1\}\times\{\theta_2\}\sim\varnothing$			0.20		0.20		0.20			

表 10.4 给出了一个三维信度函数组合的比较，这个组合利用了基于自由 DSm 模型的经典 DSm 规则和基于 Shafer 模型的混合 DSm 规则。第 5 列($m_{12}^{\mathcal{M}^f}$)给出了信息源 1 和 2 基于自由 DSm 模型的经典 DSm 规则得到的组合结果。第 7 列($m_{123}^{\mathcal{M}^f}$)给出了信息源 1、2 和 3 基于自由 DSm 模型的经典 DSm 规则而得到的组

合结果。第 6 列（$m_{12}^{\mathcal{M}^0}$）给出了基于 Shafer 模型 $\mathcal{M}^0$ 信息源 1 和 2 的混合 DSm 组合结果。第 8 列（$m_{123}^{\mathcal{M}^0}$）给出了基于 Shafer 模型 $\mathcal{M}^0$ 信息源 1、2 和 3 的混合 DSm 组合结果。第 9、10 两列给出了次优融合情形下的结果。Θ 代表自由 DSm 模型下的 DSm 规则，空白部分表示 0。

表 10.4　基于 DSm 组合规则的三维信度函数组合的比较

	m_1	m_2	m_3	$m_{12}^{\mathcal{M}^f}$	$m_{12}^{\mathcal{M}^\Theta}$	$m_{123}^{\mathcal{M}^f}$	$m_{123}^{\mathcal{M}^0}$	$(m_{12}^{\mathcal{M}^0} Ⓓ m_3)^{\mathcal{M}^f}$	$(m_{12}^{\mathcal{M}^0} Ⓓ m_3)^{\mathcal{M}^0}$
$\alpha_9 \sim \{\theta_1\}$	0.3	0.1	0.2	0.19	0.20	0.165	0.188	0.216	0.258
$\alpha_{10} \sim \{\theta_2\}$	0.2	0.1	0.1	0.15	0.17	0.090	0.109	0.119	0.145
$\alpha_{11} \sim \{\theta_3\}$	0.1	0.2	0.1	0.14	0.16	0.088	0.110	0.119	0.150
$\alpha_{15} \sim \{\theta_1,\theta_2\}$	0.1	0.0	0.2	0.03	0.08	0.021	0.056	0.058	0.112
$\alpha_{16} \sim \{\theta_1,\theta_3\}$	0.1	0.1	0.2	0.06	0.13	0.030	0.082	0.073	0.125
$\alpha_{17} \sim \{\theta_2,\theta_3\}$	0.0	0.2	0.1	0.04	0.09	0.014	0.039	0.035	0.068
$\alpha_{18} \sim \{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}$	0.2	0.3	0.1	0.06	0.17	0.006	0.416	0.017	0.142
$\alpha_2 \sim \{\theta_1\}\times\{\theta_2\}$				0.05		0.106		0.054	
$\alpha_3 \sim \{\theta_1\}\times\{\theta_3\}$				0.07		0.120		0.052	
$\alpha_4 \sim \{\theta_2\}\times\{\theta_3\}$				0.05		0.074		0.033	
$\alpha_7 \sim \{\theta_1\}\times\{\theta_2,\theta_3\}$				0.06		0.083		0.038	
$\alpha_6 \sim \{\theta_2\}\times\{\theta_1,\theta_3\}$				0.03		0.060		0.047	
$\alpha_5 \sim \{\theta_3\}\times\{\theta_1,\theta_2\}$				0.02		0.048		0.040	
$\alpha_1 \sim \times$						0.022			
$\alpha_8 \sim \square$						0.009			
$\alpha_{14} \sim \square\theta_1$				0.01		0.0123		0.042	
$\alpha_{13} \sim \square\theta_2$				0.02		0.019		0.026	
$\alpha_{12} \sim \square\theta_3$				0.02		0.022		0.031	

表 10.5 给出了由 MinC 组合规则得出的结果。m^0 相当于广义鉴别框中的 gbba，m^1 相当于潜在冲突 bbms 重新分配后的 gbba，$m^{a)}$ 相当于按比例化方法 a）进行分配后的 bba，$m^{b)}$ 相当于按比例化方法 b）进行分配后的 bba。$m_{12^b3}^0$ 表示（$m_{12}^{b)}$ Ⓜm_3）^{0}，m_{12^b3} 表示（$m_{12}^{b)}$Ⓜm_3）$^{b)}$ 这里的ⓜ代表广义的 MinC 组合，空白部分表示 0。

表 10.5　采用 MinC 规则的三维信度函数组合的比较

	m_{12}^{0}	m_{12}^{1}	$m_{12}^{a)}$	$m_{12}^{b)}$	m_{123}^{0}	m_{123}^{1}	$m_{123}^{a)}$	$m_{123}^{b)}$	$m_{12^{b}3}^{0}$	$m_{12^{b}3}$
$\alpha_9\sim\{\theta_1\}$	0.19	0.20	0.2983	0.2889	0.165	0.165	0.4031	0.4068	0.2396	0.4113
$\alpha_{10}\sim\{\theta_2\}$	0.15	0.17	0.2318	0.2402	0.090	0.090	0.2301	0.2306	0.1360	0.2319
$\alpha_{11}\sim\{\theta_3\}$	0.14	0.16	0.2311	0.2327	0.088	0.088	0.2288	0.2363	0.1364	0.2372
$\alpha_{15}\sim\{\theta_1,\theta_2\}$	0.03	0.03	0.0362	0.0383	0.021	0.021	0.0390	0.0377	0.0253	0.0354
$\alpha_{16}\sim\{\theta_1,\theta_3\}$	0.06	0.06	0.0762	0.0792	0.030	0.030	0.0586	0.0549	0.0376	0.0522
$\alpha_{17}\sim\{\theta_2,\theta_3\}$	0.04	0.04	0.0534	0.0515	0.014	0.014	0.0264	0.0249	0.0172	0.0236
$\alpha_{18}\sim\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}$	0.06	0.06	0.0830	0.0692	0.006	0.006	0.0140	0.0088	0.0069	0.0084
$\alpha_2\sim\{\theta_1\}\times\{\theta_2\}$	0.05	0.05			0.106	0.106			0.0769	
$\alpha_3\sim\{\theta_1\}\times\{\theta_3\}$	0.07	0.07			0.120	0.120			0.0754	
$\alpha_4\sim\{\theta_2\}\times\{\theta_3\}$	0.05	0.05			0.074	0.074			0.0473	
$\alpha_7\sim\{\theta_1\}\times\{\theta_2,\theta_3\}$	0.06	0.06			0.083	0.083			0.0392	
$\alpha_6\sim\{\theta_2\}\times\{\theta_1,\theta_3\}$	0.03	0.03			0.060	0.060			0.0560	
$\alpha_5\sim\{\theta_3\}\times\{\theta_1,\theta_2\}$	0.02	0.02			0.048	0.048			0.0504	
$\alpha_1\sim\times$					0.022	0.022				
$\alpha_8\sim\square$					0.009	0.009				
$\alpha_{14}\sim\square\theta_1$	0.01				0.023				0.0235	
$\alpha_{13}\sim\square\theta_2$	0.02				0.019				0.0141	
$\alpha_{12}\sim\square\theta_3$	0.02				0.022				0.0182	

表 10.6 给出了在 Shafer 模型下(也就是混合 DSm 模型 $\mathscr{M}^0$ 下),针对信息源 1 和 2,信度函数用不同的三维组合规则组合的结果(信息源的 bbasm_1、m_2 和 m_3 见表 10.4)。$m^{a)}$ 相当于利用 MinC 组合规则(m_1 和 m_2 的 MinC 组合,或 m_1、m_2 和 m_3 各自的 MinC 组合)的比例化方法 a)分配后的组合结果 bba;$m^{b)}$ 相当于利用 MinC 组合规则的比例化方法 b)分配后的组合结果 bba;$m^{\mathscr{M}^0}$ 相当于 DSm 组合后的 bba。m^{TBM}对应于 TBM 的非归一 Dempster 规则组合后的 bba;m^{Y} 相当于 Yager 组合后的 bba;m^{DB}相当于 Dubois-Prade 组合后的 bba,$m^{\oplus}$ 相当于归一 Dempster 组合后的 bba。

可见,在两个信源组合的过程中产生了很多冲突类,但其中一些 bbm 仍然保持为 0($\alpha_1\sim\times$ 和 $\alpha_8\sim\square$)。可以看到当第三个 BF 被组合的时候,这些冲突是怎样产生出来的。也能看到广义层面(见 m_{123}^{0})上三个 BFs 的组合与次优组合之间的差异,其中次优组合是将第三个 BFs 与已经将约束引入的中间结果进行的组合(见$(m_{12}^{DSm}\circledD m_3)^0$ 和$(m_{12}^{b)}\circledm m_3)^0$)。可以看到在 MinC 组合的第二步中 gbbms 是怎

样在 Θ 的子集中进行再分配的，以及最后所有纯冲突的 gbbms 是怎样以方法 a) 和 b)进行再分配的。

在表 10.6 中比较了 DSm 和 MinC 组合的最终结果。注意到 Θ 的小子集（三维例子中的单个命题）在 MinC 组合后有更大的 bbms，而大子集（例子中的 2 命题集合和整个$\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}$的集合）在应用了 DSm 组合规则后有更大的 bbms。也就是说，DSm 规则在冲突的 gbbms 进行再分配中比 MinC 组合更为谨慎，因此发现 MinC 组合规则比 DSm 规则产生了更为具体的结果。表的最后三列表示，DSm 规则、利用了两个比例分配方法的 MinC 规则产生的结果、Yager 规则以及两种不同形式的 Dempter 规则产生的结果是不相同的（分别参见 m^{Y}、m^{TBM}和 $m^{\oplus}$）。但是在 Shafer 模型下（$\mathcal{M}^0$）的二元 DSm 组合结果和 Dubois-Prade 组合的结果是一致的。

表 10.6　Shafer 模型（也就是混合 DSm 模型 $\mathcal{M}^0$）下信息源 1 和 2 组合的比较

	$m_{12}^{\mathcal{M}^0}$	$m_{12}^{\text{a)}}$	$m_{12}^{\text{b)}}$	$m_{123}^{\mathcal{M}^0}$	$m_{123}^{\text{a)}}$	$m_{123}^{\text{b)}}$	m_{12}^{TBM}	m_{12}^{Y}	m_{12}^{DP}	$m_{12}^{\oplus}$
$\alpha_9\sim\{\theta_1\}$	0.20	0.2983	0.2889	0.188	0.4031	0.4068	0.20	0.20	0.20	0.2778
$\alpha_{10}\sim\{\theta_2\}$	0.17	0.2318	0.2402	0.109	0.2301	0.2306	0.17	0.17	0.17	0.2361
$\alpha_{11}\sim\{\theta_3\}$	0.16	0.2311	0.2327	0.110	0.2288	0.2363	0.16	0.16	0.16	0.2222
$\alpha_{15}\sim\{\theta_1,\theta_2\}$	0.08	0.0362	0.0383	0.056	0.0390	0.0377	0.04	0.04	0.08	0.0556
$\alpha_{16}\sim\{\theta_1,\theta_3\}$	0.13	0.0762	0.0792	0.082	0.0586	0.0549	0.06	0.06	0.13	0.0833
$\alpha_{17}\sim\{\theta_2,\theta_3\}$	0.09	0.0534	0.0515	0.039	0.0264	0.0249	0.03	0.03	0.09	0.0417
$\alpha_{18}\sim\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}$	0.17	0.0830	0.6992	0.416	0.0140	0.0088	0.06	0.34	0.17	0.0833
$\varnothing$							0.28			

下面介绍计算 m^0、m^1、$m^{\text{a)}}$和 $m^{\text{b)}}$部分的数字实例给那些对具体细节感兴趣的读者。我们以一个非冲突集合$\{\theta_1,\theta_2\}$开始，也就是 DSm 符号中的 $\alpha_{15}=\theta_1\cup\theta_2$。它与自身或整个 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}$（也就是 DS 中的 $\theta_1\cup\theta_2\cup\theta_3$）的交集不变，而且它不等价于 D^Θ 中的任何其他命题。因此 $m_{12}^0(\theta_1\cup\theta_2)=m_1(\theta_1\cup\theta_2)m_2(\theta_1\cup\theta_2)+m_1(\theta_1\cup\theta_2)m_2(\theta_1\cup\theta_2\cup\theta_3)+m_1(\theta_1\cup\theta_2\cup\theta_3)m_2(\theta_1\cup\theta_2)=0.1\cdot0.0+0.1\cdot0.3+0.0\cdot0.2=0.00+0.03+0.00=0.03$。$\alpha_{15}$是 D^Θ 中的一个非冲突命题，因此它没有被进一步重新分配或比例化，也就是说它的 bbm 不会减小。α_{15}也不是 D^Θ 中任何其他命题的非冲突部分，因此 $m_{12}^1(\alpha_{15})=m_{12}^0(\alpha_{15})m_{12}^{\text{a)}}(\alpha_{15})>m_{12}^1(\alpha_{15})$是因为其他命题的 gbbms 被比例化到某些命题中，其中同样包括 α_{15}。由于同样的原因，$m_{12}^{\text{b)}}(\alpha_{15})>m_{12}^1(\alpha_{15})$也同样被满足。

潜在冲突$\square\{\theta_1\}\sim(\theta_1\cup\theta_2)\cap(\theta_1\cup\theta_3)=\alpha_{14}$等价于$\square\{\theta_1\}\times\square\{\theta_1\}$，也等同于$\square\{\theta_1\}\times X$ 和 $X\times\square\{\theta_1\}$，其中在 Shafer 模型下满足$\{\theta_1\}\subset X$，见表 10.1；或者说 $\alpha_{14}=(\theta_1\cup\theta_2)\cap(\theta_1\cup\theta_3)$是它自身与 X 的一个交集，其中在 DSm 描述下 $\alpha_{14}\subseteq$

$X \subseteq \theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3$。也就是说 $m_{12}^0(\alpha_{14}) = m^0(\theta_1 \cap (\theta_2 \cup \theta_3)) = m_1(\alpha_{14})m_2(\alpha_{14}) + m_1(\theta_1 \cup \theta_2)m_2(\theta_1 \cup \theta_3) + m_1(\theta_1 \cup \theta_3)m_2(\theta_1 \cup \theta_2) + m_1(\alpha_{14})(m_2(\theta_1 \cup \theta_2) + m_2(\theta_1 \cup \theta_3) + m_2(\theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3)) + (m_1(\theta_1 \cup \theta_2) + m_1(\theta_1 \cup \theta_3) + m_1(\theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3))m_2(\alpha_{14}) = 0.0 \cdot 0.0 + 0.1 \cdot 0.1 + 0.1 \cdot 0.0 + 0.0 \cdot (0.1 + 0.1 + 0.2) + (0.0 + 0.1 + 0.3) \cdot 0.0 = 0 + 0.01 + 0 + 0 + 0 = 0.01$. $\alpha_9 = \{\theta_1\}$ 是 $\theta_1 \cap (\theta_2 \cup \theta_3)$ 的一个非冲突部分，因而 $m^0(\alpha_{14})$ 重新分配给 θ_1。另一方面，$\{\theta_1\}$ 不是 D^Θ 中任何其他命题的非冲突部分，因此 $m^1(\alpha_9) = m^0(\alpha_9) + m^0(\alpha_{14}) = 0.19 + 0.01 = 0.20$。重新分配之后，$\alpha_{14}$ 的 bbm 等于 0，因此 $m^1(\alpha_{14}) = m^{a)}(\alpha_{14}) = m^{b)}(\alpha_{14}) = 0$。

纯冲突 $\{\theta_1\} \times \{\theta_2, \theta_3\} \sim \theta_1 \cap (\theta_2 \cup \theta_3) = \alpha_7$ 包含在完整 MinC 组合表的 24 个区域中（具体部分见表 10.1），例如，在区域中相当于 $\{A\} \times (\{A\} \times \{B, C\})$，$\{A\} \times \{B, C\}$，$\{A, B\} \times (\{A\} \times \{B, C\})$ 的部分，但只有其中的一部分对应于 Shaferian 的输入信度（也就是说它们当中只有一部分是正的），因此 $m^1(\alpha_7) = m^0(\alpha_7) = m_1\{\theta_1\}m_2(\theta_2 \cup \theta_3) + m_1(\theta_2 \cup \theta_3)m_2\{\theta_1\} = 0.3 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.0 = 0.06 + 0.00 = 0.06$。因为 α_7 是纯冲突，所以它的 bbm 在再分配子步中不再改变，并且它在 $\{\theta_1\}$，$\{\theta_2, \theta_3\}$，$\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ 中是按比例化方法 a）进行比例化分配的，在 $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ 的所有子集中按比例化方法 b）进行比例化分配，因此，在比例化方法 a）中，$m^1(\alpha_4) \cdot \dfrac{m^1(\theta_1)}{m^1(\theta_1) + m^1(\theta_2 \cup \theta_3) + m^1(\theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3)} = 0.06 \dfrac{0.20}{0.20 + 0.04 + 0.06} = 0.06 \dfrac{0.20}{0.30} = 0.040$ 被分配到 $\theta_1 = \alpha_9$；$m^1(\alpha_7) \cdot \dfrac{m^1(\theta_2 \cup \theta_3)}{m^1(\theta_1) + m^1(\theta_2 \cup \theta_3) + m^1(\theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3)} = 0.06 \dfrac{0.04}{0.20 + 0.04 + 0.06} = 0.06 \dfrac{0.04}{0.30} = 0.008$ 被分配到 $\theta_2 \cup \theta_3 = \alpha_{17}$；$m^1(\alpha_7) \cdot \dfrac{m^1(\theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3)}{m^1(\theta_1) + m^1(\theta_2 \cup \theta_3) + m^1(\theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3)} = 0.06 \dfrac{0.06}{0.20 + 0.04 + 0.06} = 0.06 \dfrac{0.06}{0.30} = 0.012$ 被分配到 $\theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3 = \alpha_{18}$ 中。由于信度质量 $0.05 \dfrac{0.20}{0.20 + 0.17 + 0.03} = 0.05 \cdot 0.5 = 0.0250$ 和 $0.07 \dfrac{0.20}{0.20 + 0.16 + 0.06} = 0.07 \cdot 0.4762 = 0.0333$ 也是根据比例化方法 a）按比例分配到 θ_1 上的，所以可以得到 $m_{12}^{a)}(\theta_1) = m^1(\theta_1) + 0.040 + 0.0250 + 0.0333 = 0.2000 + 0.040 + 0.0250 + 0.0333 = 0.2983$。$m_{12}^{b)}(\theta_1)$ 的值也可用类似的方法求出。例如，$0.06 \dfrac{0.20}{0.20 + 0.17 + 0.16 + 0.03 + 0.06 + 0.04 + 0.06} = 0.06 \dfrac{0.20}{0.72} = 0.06 \cdot 0.2777 = 0.0166$ 是从 $m^1(\alpha_7)$ 中按比例进行分配出来的。

10.6　结论

本章比较了处理冲突信度组合问题而独立发展起来的两种方法。这两种方法

的动机和出发点都存在显著的不同。MinC 组合的出发点是包含互斥命题的经典鉴别框，而自由 DSm 模型是经典 DSm 方法的出发点。这两种方法看起来更像是互补而不是可比的。

令人惊讶的是，这两种组合规则的内部组合结构和机制却是相同的，并且在自由 DSm 模型中利用经典 DSm 规则得到的结果和在广义鉴别框中用 MinC 组合所得中间结果也是相同的。然而，这一共同步骤后紧接着的是信度质量的再分配，在 MinC 组合情况下为获得经典的信度函数，暂时赋给冲突的信度质量被进行了重新分配。

近来，在 Shafer 模型和广义混合 DSm 模型下（需要考虑两个组合步骤）的 DSm 规则得到发展之后，MinC 组合成为处理 DSm 组合规则的特例——Shafer 模型的又一方法。

第一个步骤——在广义框架下的组合——是相同的，同时潜在冲突的广义基本信度质量的再分配也是相类似的，主要的差异在于纯冲突的广义基本信度质量（gbbm）的重分配。这在 DSm 规则中是 gbbms 再分配给对应集合的并集，而在 MinC 方法中是 gbbms 的比例化分配。

尽管有这个差异，我们仍然把 DSm 引入的约束作为在 MinC 方法中对冲突信度量再分配的一种可选方案。

参 考 文 献

[1] Daniel M., *Distribution of Contradictive Belief Masses in Combination of Belief Functions*, Information, Uncertainty and Fusion, Eds. Bouchon-Meunier B., Yager R. R., and Zadeh L. A., Kluwer Academic Publishers, 2000, pp. 431－446.

[2] Daniel M., *Associativitg in Combination of Belief Functions*, Proceedings of 5th Workshop on Uncertainty Processing(WUPES 2000), Ed. Vejnarová, J., Ediění oddělení VŠE(Editorial Department of University of Economics), 2000, pp. 41－54.

[3] Daniel M., *Associativity and Contradiction in Combination of Belief Functions*, Proceedings Elighth International conference IPMU, Universidad Politecnica de Madrid, 2000, Vol, I., pp. 133－140.

[4] Daniel M., *Associativity in Combination of belief functions; a derivation of minC combination*, Soft Computing, 7(5), pp. 288－296, 2003.

[5] Dezert J., *Combination of Paradoxical Sources of Information within the Neutrosophic Framework*, Proceedings of the 1st Int. Conf. Neutrosophics, Univ. of New Mexico, Gallup Campus, 2001.

[6] Dezert J., *Foundations for a New Theory of Plausible and Paradoxical Reasoning*, Information and Security Journal, Edited by Tz. Semerdjiev, ProCon Ltd., Sofia, Bulgaria, Vol. 9, pp. 13－57, 2002.

[7] Dubois D., Prade H., *Representation and combination of uncertainty with belief functions and possibility measures*, Computational Intelligence, Vol. 4, pp. 244－264, 1988.

[8] Jøsang A., Daniel M., Vannoorenberghe P., *Strategies for Combining Conflicting Dogmatic Beliefs*, Proceedings of Fusion 2003 International Conference, pp. 1133—1140, Cairns, Australia, July 2003.

[9] Shafer G., A *Mathematical Theory of Evidence*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1976.

[10] Smets Ph., *The combination of evidence in the transferable belief model*, IEEE-Pattern analysis and Machine Intelligence, Vol. 12, pp. 447-458, 1990.

[11] Smets Ph., Kennes R., *The transferable belief model*, Artificial Intelligence, 66(2), pp. 191-234, 1994.

[12] Yager R. R., *On the Dempster-Shafer framework and new combination rules*, Information Sciences, Vol. 41, pp. 93-138, 1987.

第 11 章　基于 Cox 基本原理的一般融合算子

Denis de Brucq
Académie des Sciences，Belles—Lettres et Arts de Rouen
Rouen，France

摘要：本章介绍由相关文献提出的处理不确定性问题的几个最重要的理论（即概率理论、模糊集理论和证据理论）之间的一些新的重要联系，并在这几个理论中引入特殊的信息融合运算算子。。证据理论和模糊集理论在医学、经济学及自动化领域中常常替代概率论。如何选择这三个明显不同的理论取决于参与融合的数据的固有自然属性。本章将介绍的这些明显不同的理论基本上都符合四个基本原理。我们将从四个基本原理来统一概率理论、证据理论和模糊集理论——非冲突性、连续性、一致性、前后依赖性，并且证明了存在一个能同时支持这三个理论的一致性函数。换句话说，在不同的情形下（或者相互联系，或者相互独立），采用同一信度基本原理意味着在不确定性鉴别框架下各种现有的信息融合理论具有共同的基础。基本信度的独立性不必要从概率的意义上来理解。

11.1　关于不确定性

在医学领域中，就像在经济学和控制学领域中一样，我们注意到具有可加性概率理论的局限性，这是由于存在太强的约束作用在它上面。为克服这些局限性而修改基本公理，从而使得不同的数值理论相继出现，如模糊集理论就是其中的一种方法。通过考虑下限概率和上限概率的概念，获得了 Dempster-Shafer 证据理论[6]的信度函数和似真函数。20 世纪 60 年代理论的发展并不直接与概率相关联。例如，Zadeh 在 1965 年创立了模糊集理论[15]，然后又于 1978 年创立了可能性理论[16]。

根据这四个基本原理（它们是置信体系的基础，这里并不考虑引入概率理论的可加性原理），通过考虑实现这些置信度的独立性，获得了模糊集理论。

事实上，我们已经注意到，这两个信息融合的基本式都是连续的，并且在信度上具有交换性和结合性的运算。令 Θ 是一个离散的证据体的鉴别框，因此，这两个组合可以写成概率的方式，即

$$\forall A,B \subset \Theta, P(A \cap B) \triangleq P(A)P(B/A) \triangleq P(B)P(A/B)$$

写成隶属度函数的形式为

$$\forall A,B \subset \Theta \rightarrow \mu_{A \cap B}(x) \triangleq \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$$

这两个运算必须验证数据融合模型中同样的基本假设。

当分析不精确和不确定的数据时，所有常规的方法必须改变。事实上，逻辑只是推理的一个抽象解释，而物理定则只是实际系统推演的模型。并不能证明逻辑可以正确描述所有的融合。并且，不精确性和不确定性分析表明了可能有无限种融合（本章已经进行了介绍）。从这一章介绍的规则可以得出，通过引入一个融合运算算子$\circ$来表示任意从[0,1]到[0,1]的增函数是可行的。更精确地说，我们用 $x \circ y$ 而不是 $x * y$ 来表示两个信度 x、y 的融合结果。例如我们用$[A \quad \text{and} \quad B/e] = [A/e] \circ [B/e]$，也就是信度$[A/e]$和$[B/e]$的融合$\circ$来代替 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$，以表示两个独立集合 A、B 的交集 $A \cap B$ 的概率。本书的任何式都有可能随着这个变换而发生改变。

此外，作为一个总的假设，不相交集合的信度质量之和等于 1 看起来似乎有点危险。

可以证明，转换之后，融合运算算子$\circ$主要可以由一个简单的乘积来表示。在外在环境 e 的条件下，对于前述的信度在 A 上的转换 $c(A) = [A/e]$，是通过一个连续的严格单调函数 w 来实现的。将转换方式 w 与傅里叶变换相比较就可以很容易地理解这个结果。后者就是将两个函数的合成积转换成它们傅里叶变换的乘积。我们注意到卷积是可交换和结合的。同样的 Dempstr-Shafer 融合也是可交换和结合的。多个证据源融合的 Commonality 函数等于各个信息源的 Commonality 函数之间的乘积。若没有交换性和结合性，这种组合比简单乘运算更复杂。

11.1.1 概率建模

随着对运势计算游戏的研究，概率论在 17 世纪得到了飞速发展。概率论的最终目标是研究控制随机现象的法则，而随机现象是不确定性导致的。多年来，概率方法已经产生了许多争论，特别是发生在对于频率论的方法、客观和主观方法的维护者身上。从历史的角度看，概率论基本原理的公式和数学基础归功于 1933 年 Andreï Kolmogorov 的研究。

用一个样品空间 Ω 来描述一个不确定的试验，它的元素（即试验的可能结果）用 w 表示。令 $A \in P(\Omega)$表示 Ω 的子集，子集 A 是这个理论的一个随机事件，并且

当试验结果 w 属于 A 时，就认为该事件发生了。Ω 所有子集的集合 $P(\Omega)$不可能一直与 Ω 中可能的随机事件集合 $\mathscr{A}$ 相关联。为了逻辑上一致的目的，有人约束 $\mathscr{A}$ 到一个 σ—代数上，它是 $P(\Omega)$的子集，并且在有限的并集和补集下是封闭的。因此，(Ω,A)对是一个可量测空间，则(Ω,A)上的概率度量 P 是该集合上的一个正的实值函数，其值的范围是$[0,1]$，并且是定义在 $\mathscr{A}$ 上。

定义 1：(Ω,A) 上的概率度量 P 是 $\mathscr{A}$ 上的一个应用，其值的范围是$[0,1]$，并且满足下面的公理(Kolmogorov 公理)：

ⅰ）对所有的 $A\in\mathscr{A}$，有

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1 \text{ 且 } P(\Omega)=1 \tag{11.1}$$

ⅱ）(可加性) 对相互排斥事件$\{A_i, i\in I\}$的任何有限族，有

$$P(\bigcup_i A_i)=\sum_i P(A_i) \tag{11.2}$$

ⅲ）$\varnothing$ 上的有序单调连续性对任何逐渐趋向空集$\varnothing$ 的事件序列$\{A_n, n\geqslant 1\}$，且满足 $A_1\supset A_2\supset A_3\supset\cdots$而且$\bigcap A_n=\varnothing$，有

$$\lim_n P(A_n)=0 \tag{11.3}$$

$P(A)$描述了事件 A 发生的概率。如果 P 是$(\Omega,\mathscr{A})$上的一个概率度量，则三元组$(\Omega,\mathscr{A},P)$是一个概率空间。从先前的公理，可以轻易地推出下面的性质：

$$A_1\subseteq A_2\Rightarrow P(A_1)\leqslant P(A_2) \tag{11.4}$$

$$P(\varnothing)=0 \tag{11.5}$$

$$P(A)=1-P(\overline{A}) \tag{11.6}$$

$$P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cap A_2) \tag{11.7}$$

条件概率是概率论中最有用的概念之一。在实践中，它被引入以允许根据参考事件进行推理。例如，详尽描述如下：在事件 E 发生的条件下，它与事件 A 的概率相关。随机事件 E 代表了环境，它通常表示为 $E=e$。事件 A 和环境 e 之间是不对称的。

定义 2：令$(\Omega,\mathscr{A},P)$表示一个概率空间，一个事件 A 在给定 E，且 $P(E)>0$ 下的条件概率 $P(A/E)$被定义为

$$P(A/E)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)} \tag{11.8}$$

如果 $P(E)=0$，则这个定义没有意义。如果 $A\subset E$，则 $P(A/E)=\dfrac{P(A)}{P(E)}$，且有 $P(E/E)=1$。

很显然，只有当 E 变成确定事件时，也就是存在附加信息使得 E 满足 $(P(E)=1)$时，条件概率 $P(A/E)$才会被看作相当于 A 的概率。

用著名的贝叶斯定理对式(11.8)推广如下,假设能够估计到某一事件 E 的一个先验概率($P(E)\neq 0$),且存在 Ω 的一个有限分割$\{H_1,\cdots,H_n\}$(描述 E 的 n 个实现形式的相互排斥假设的集合)。由贝叶斯定理得出

$$P(H_i/E)=\frac{P(E/H_i)P(H_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(E/H_j)P(H_j)} \tag{11.9}$$

根据对实现 $E=e$ 的新知识,条件概率(11.9)允许修改事件 H_i 的先验概率。

定义 3: 令$(\Omega,\mathscr{A},P)$表示一个概率空间,且令 A 和 E 为 $\mathscr{A}$ 的两个事件,当且仅当满足如下条件时,事件 A 和 E 是两个相互独立的事件:

$$P(A\cap E)=P(A)P(E) \tag{11.10}$$

性质 1: 令$(\Omega,\mathscr{A},P)$表示一个概率空间,且令 A 和 E 是 $\mathscr{A}$ 的两个事件,如果 $P(E)>0$,当且仅当满足如下条件,A 和 E 是两个相互独立的事件:

$$P(A/E)=P(A) \tag{11.11}$$

因此,如果 A 和 E 是两个相互独立的事件,并且 E 并不是不可能的,则如果得到关于事件 E 的实现信息,A 的概率并不会被改变。

11.1.2 证据的数学理论

信度函数的证据理论或者 Dempster-Shafer 理论(DST)是由 Arthur Dempster 于 20 世纪 60 年代在哈佛大学的一个关于推理和统计的演讲中诞生的。Dempster 的主要思想被 Glenn Shafer 在他的《A Mathematical Theory of Evidence》一书中重新进行了解释[12]。

考虑两个空间 Ω 和 Θ,以及一个多值关系 Γ,它将子集 $\Gamma(w)\subset\Theta$ 与每个元素 $w\in\Omega$ 联系起来。假设 P 是定义在$(\Omega,\mathscr{A})$上的一个概率度量,该空间是由 Ω 子集的 σ—代数 $\mathscr{A}$ 产生。考虑到 P 代表了不确定事件 $w\in\Omega$ 出现的概率,则如果这个事件 w 与事件 $\theta\in\Gamma(w)$的对应关系已经建立,则能否对于不确定性事件 $\theta\in\Theta$ 的发生概率作出判断?

Dempster 的观点是:上述考虑导致了相容性概率度量的概念。然后他提出由这个概率族的较低概率和较高概率来确定度量的边界。

概率空间$(\Omega,\mathscr{A},P)$是信息源,它允许根据 Γ 对新的参考空间 Θ 上的(不完备的)状态进行的量化。

在本文的研究中,(Ω,P,Γ,Θ)称为信度结构。通过采用这些数学工具,Shafer 对 Dempster 工作提出了另外的解释,这个新的解释把相容性概率度量家族的较高和较低概率看作可信的信度度量。

定义 4：令 Θ 为一个有限空间，并且 $2^{\Theta}(=P(\Theta))$ 是 Θ 的幂集，信度函数① Cr 是 2^{Θ} 上的一个应用，其值的范围为[0,1]。它满足如下的条件：

ⅰ) $Cr(\varnothing)=0$；

ⅱ) $Cr(\Theta)=1$；

ⅲ) 对于所有的整数 n 及 Θ 所有的子集的家族 $A_1,\cdots,A_n$，有

$$Cr(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \geqslant \sum_{\substack{I \subset \{1,\cdots,n\} \\ I \neq \varnothing}} (-1)^{|I|+1} Cr\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \tag{11.12}$$

条件(ⅲ)称为一般附加条件(General Suradditivity Condition)。当 $n=2$ 时，式(11.12)变为

$$Cr(A_1 \cup A_2) \geqslant Cr(A_1) + Cr(A_2) - Cr(A_1 \cap A_2) \tag{11.13}$$

该信度函数允许对 Θ 中的部分信息量化。在这个理论中，其他一些函数与 Cr 密切联系，并与它等价：

- 似真函数与信度函数是对偶的；
- 基本概率质量函数(也称为基本信度赋值或者质量函数)是通过 Möbius 变换方法从信度函数得来的。

定义 5：基本信度赋值函数：$m: 2^{\Theta} \rightarrow [0,1]$满足下面的性质：

$$\sum_{A \in 2^{\Theta}} m(A) = 1 \tag{11.14}$$

且

$$m(\varnothing) = 0 \tag{11.15}$$

证据理论在处理不确定的问题上经常被描述成概率方法的推广，因为它能够处理并非相互排斥的事件。

因此，它的优点是能够从不精确知识中明确地表示出不确定性。人们可以很容易地处理不精确的知识。例如，人们并不用天数来精确说明自己的年龄，或者不用英寸来精确说明自身的身高，尽管能够设法获得精确的信息。不精确性的数学公式已经由 Lofti Zadeh 在模糊集理论中产生[15]。基于信息不精确性的不确定性建模引出了可能性理论，它与模糊集理论一起构成了模糊逻辑的一般框架。

11.1.3 模糊逻辑

模糊逻辑于 1965 年出现在 Lofti Zadeh 的著作中。模糊逻辑发展的主要动机是要找到一个概念框架，通过它来解决不确定性和词汇上不精确的问题。他的著作中指出，为了处理复杂系统，它是必要地表示和处理不精确或近似信息。(这是

---

① 信度函数 Cr 在文献[12]中用 Bel 表示。

因为）在该系统中，人的因素往往参与进来，因此，模糊逻辑的引入是为了处理不完备知识。

模糊逻辑主要基于两点[9]：模糊集理论和在可能性理论框架中的近似推理建模。

模糊子集的定义是为了解决对于不精确知识表示的需求。介绍这个概念是为了避免从一个类到另一个类的突然变化（如从黑到白），并且允许元素既不完全属于一个类又不完全属于另外一个类（如在上例中为灰色）。在参照集合 Θ 上，Θ 的一个模糊子集 A 通过一个隶属度函数 μ 来描述，可以定义如下：

$$\mu_A : \Theta \rightarrow [0,1]$$

它是经典隶属度函数 χ 的扩展，集合 A 的指示函数为

$$x_A : \Theta \rightarrow \{0,1\}$$

为了强调它与普通 Θ 集的区别，用小写字母来表示 Θ 的模糊集。

定义 6： 令 a 是 Θ 的一个模糊集，且令 α 是 $[0,1]$ 中的一个实数。a 一截集 a_α 是 Θ 的一个子集，它的定义如下：

$$a_\alpha \triangleq \{\theta \in \Theta; \mu_a(\theta) \geqslant \alpha\} \tag{11.16}$$

则 $\forall \alpha, \beta \in [0,1]$，有

$$\alpha \leqslant \beta \Rightarrow a_\beta \subseteq a_\alpha$$

且 $\forall \theta \in \Theta$，有

$$\mu_\alpha(\theta) = \sup\{\alpha \in [0,1]; \theta \in a_\alpha\} \tag{11.17}$$

它承认模糊集与普通集的一致性，且给出了在普通集上使用常用运算算子的模糊版本。

性质 2： 令 a 和 b 是 Θ 的两个模糊集，它们的隶属度函数分别是 μ_a 和 μ_b，则有

- 相等：$a = b \Leftrightarrow \forall \theta \in \Theta, \mu_a(\theta) = \mu_b(\theta)$
- 包含：$A \subseteq b \Leftrightarrow \forall \theta \in \Theta, \mu_a(\theta) \leqslant \mu_b(\theta)$
- 并集：$a \cup b \leftrightarrow \forall \theta \in \Theta, \mu_{a \cup b}(\theta) = \max(\mu_a(\theta), \mu_b(\theta))$
- 交集：$a \cap b \leftrightarrow \forall \theta \in \Theta; \mu_{a \cap b}(\theta) = \min(\mu_a(\theta), \mu_b(\theta))$
- 补集：$\bar{a} \leftrightarrow \forall \theta \in \Theta, \mu_{\bar{a}}(\theta) = (1 - \mu_a(\theta))$

在模糊集理论的情形下，并没有证实真值状态的不确定性。

可能性理论于 1978 年被 Lofti Zadeh 提出来处理非概率的不确定性，这是由于对此问题概率论并没有给出满意的解决办法。可能性理论提供了一个框架，其中不精确性知识和不确定性知识可以共存，并且可以被共同来处理。

可能性理论提供了一种对于事件主观不确定性形式化描述的方法。它告诉我们在哪个度量中事件的实现是可能的，以及在没有任何概率的评价下，在哪个度量中能够确信。我们以一种通用的形式介绍了可能性理论，这里介绍了可能性度量

和必要性度量的概念。

考虑框架 Θ（试验空间）或者 Θ（假定空间），集合 $\mathscr{A}$ 表示 Θ 的一个子集或者 Θ 的一个子集的集合，当 Ω 或者 Θ 中的命题有限时，$\mathscr{A}$ 表示所有子集的集合。

定义 7： A 的可能性度量 Pos 是 $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(\Theta)$ 在$[0,1]$上的应用，即

ⅰ）$\mathrm{Pos}(\varnothing)=0, \mathrm{Pos}(\Theta)=1$；

ⅱ）对事件的任何有限的集合族$\{A_i, i \in I\}$，有

$$\mathrm{Pos}(\bigcup_i A_i) = \sup_i\{\mathrm{Pos}(A_i)\} \tag{11.18}$$

根据 Zadeh 的观点，这是对一个信度最悲观或者最谨慎的看法。特别是

$$\max(\mathrm{Pos}(A), \mathrm{Pos}(\overline{A})) = 1 \tag{11.19}$$

则

$$\mathrm{Pos}(A) + \mathrm{Pos}(\overline{A}) \geqslant 1 \tag{11.20}$$

11.1.4　信度度量

定义 8： 集合 $\mathscr{A}$（Θ 的部分）的信度度量 c 是 $\mathscr{P}(\Theta)$ 在$[0,1]$中的一个应用，可以验证它具有如下的性质：

ⅰ）$c(\varnothing)=0$ 且 $c(\Theta)=1$；

ⅱ）（单调性），$\forall A, B \in \mathscr{P}(\Theta)$，$A \subset B \Rightarrow c(A) \leqslant c(B)$；

ⅲ）（连续性）对 $\mathscr{P}(\Theta)$ 中元素的所有递增或递减序列$(A_n)_N$，有

$$\lim c(A_n) = c(\lim A_n)$$

因此 $\forall A, B \in \mathscr{P}(\Theta)$，有

$$c(A \cap B) \leqslant \min(c(A), c(B)) \text{ 且 } \max(c(A), c(B)) \leqslant c(A \cup B)$$

概率、模糊集、可能性度量都是广义信度度量概念的特殊情况。

11.2　融合

正如物理学一样，信息融合建模的目的在于对实验结果给出一个最好的可能性描述。下面给出信息融合需要满足的基本原理[14]。

11.2.1　基本原理

（1）一致性或非冲突性；

（2）方法的连续性；

（3）普遍性或完全性；

（4）不存在被拒绝的信息。

第一个推论是由基本定理(2)和(3)引出的利用实数来表示和比较信度。但是基本定理(4)引出了假定条件:信度只能通过给定环境和前后关系有条件地获取。

事件 $A \in \mathscr{P}(\Theta)$,在环境 e 下被赋予的信度可以表示为$[A/e]$。

下面引述 Edwin Thompson Jaynes 的观点[10]:很显然,真实的人脑思维是非常复杂的,以至于我们并不能解释它的奥秘;并且在任何事件中我们并不试图解释,更不用说复制人脑所有的差错和矛盾。为了强调这一点,我们提出的问题是"怎样才能设计一个机器,它可以依据清晰定义的表达理想化的共识,来执行有用的近似推理?"而不是质问"怎样才能为人类的一般意识建立一个数学模型?"

11.2.2 信度体系

我们基于 Cox 的著作[5]发展了这个方法,它后来由 Tribus[14]详述并评注。

$$i = \text{impossible} = 0 \leqslant [A/e] \leqslant c = \text{certain} = 1$$

通过令 $u \triangleq [A \wedge B/e]$来表示在环境 e 下 A 和 B 的融合提供的信度,可以列出各种可能的关系。我们定义

$$x \triangleq [A/e] \quad v \triangleq [A/Be] \quad y \triangleq [B/e] \quad w \triangleq [B/Ae]$$

11 个可能的函数关系是:$u=F_1(x,v)$, $u=F_2(x,y)$,$u=F_3(x,w)$,$u=F_4(v,y)$, $u=F_5(v,w)$,$u=F_6(y,w)$,$u=F_7(x,v,y)$,$u=F_8(x,v,w)$,$u=F_9(x,y,w)$,$u=F_{10}(v,y,w)$和 $u=F_{11}(x,v,y,w)$。

根据上述基本定理,函数 F_5、F_8、F_{10} 和 F_{11} 必须被抛弃。通过对称性也可以进行简化。这些函数关系能够满足下述条件,即

$$u = F_2(x,y) = F_2(y,x)$$
$$u = F_3(x,w) = F_4(v,y)$$
$$u = F_7(x,v,y) = F_9(x,y,w)$$

信度融合的结合性条件

$$[A \wedge B \wedge C/e] = [A \wedge (B \wedge C)/e] = [(A \wedge B) \wedge C/e]$$

使我们抛弃了 F_7。

另一方面,F_3 和 F_2 证实了同样的结合性条件。通过利用能够描述信度间所有可能的融合结果的共同运算$\circ$,这个独特的条件可以处理两种不同的情形:

- 第一种情形:$u=F_2(x,y)=F_2(y,x)$

$$[A \wedge B/e] = [A/e] \circ [B/Ae] = [B/e] \circ [A/Be]$$

- 第二种情形:$u=F_3(x,w)=F_4(v,y)$

$$[A \wedge B/e] = [A/e] \circ [B/e]$$

Cox 对于第二种情形并没有考虑，它构成了本章的第一个结果。

11.2.3 运算算子

- 第一种情形：

$$[B/Ae] < [B'/Ae] \Rightarrow [A \wedge B/e] < [A \wedge B'/e]$$

第一种情况表示了关于第二个变量的严格不等式。数学家 Aczél[1] 已经给出基于这两个变量之一的严格单调性的证明。该函数方程的一般结果如下：

$$w([A \wedge B/e]) = w([A/e])\omega([B/Ae]) = w([B/e])w([A/Be]) \tag{11.21}$$

式中：w 是一个从$[0,1]$到$[0,1]$上连续单调的函数。因此

$$[A \wedge B/e] = w^{-1}(w([A/e])w([A/Be])) = [A/e] \circ [B/Ae]$$

变换后融合运算算子$\circ$是通过一个简单的实数乘积来描述的。在外在环境 e 的条件下，对于前述的信度 $c(A)=[A/e]$在 A 上的转换，是通过一个连续的严格单调函数 w 来实现的。将转换方式 w 与傅里叶变换相比较就可以很容易地理解这个结果。后者就是将两个函数的合成积转换成它们傅里叶变换的乘积。

第一种情况结合一些其他的性质就构成了概率理论。问题在于第二种情况中是否有一个与此相似的性质。

- 第二种情形：严格单调并不明显。

如果$[A/e]\leqslant[A/e]$，$[B/e]\leqslant[B'/e]$，则$[A\wedge B/e]\leqslant[A'\wedge B'/e]$。另一方面，我们可以得到交换性的性质，并且$\circ$具有有三角范数（数据处理[9]中的一般概念）的所有特征。在第二种情况中，信度融合与 t一模相关联，它暗含了模糊理论的相关知识。

11.3 t-模

定义 9：三角范数（也称为 t一模）是一个函数$\circ$：$[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$。对$[0,1]$中所有的 x，y，z，t，它满足如下条件：

ⅰ）（交换性）$x\circ y=y\circ x$；

ⅱ）（结合性）$(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)$；

ⅲ）（单调性）如果 $x\leqslant z$ 且 $y\leqslant t$ ，则 $(x\circ y)\leqslant(z\circ t)$；

ⅳ）（中立元素 1）$(x\circ 1)=x$。

例 1： 运算算子$\circ=\min$ 是一个 t一模；该运算是 t一模的上限，对所有的$[0,1]$中的 x，y，有

$$(x \circ y) \leqslant \min(x, y)$$

引理 1： 如果该相关的 t—模函数是严格递增的，则信度上的运算算子就可以写成 $w[A \wedge B/e]=w([A/e])w[B/e]$，其中 w 是一个从[0,1]到[0,1]上连续且严格递增的双射。

根据该附加假设，我们得到

$$[A \wedge B/e] = w^{-1}(w([A/e])w([B/e]))$$

定理 1： 模糊运算算子$[A \wedge B/e]=[A/e] \wedge [B/e]=\inf\{[A/e],[B/e]\}$是严格单调运算算子序列$\circ_n$ 的极限。

证明： 令$(T_n)_{n>0}$是严格单调 t—模的集合，即

$$\forall n \geqslant 1, T_n(x,y) = \frac{1}{1+\sqrt[n]{\left(\frac{1-x}{x}\right)^n + \left(\frac{1-y}{y}\right)^n}}$$

$$= w_n^{-1}(w_n(x)w_n(y)) \quad \left(w_n = \exp - \left(\frac{1-x}{x}\right)^n\right)$$

对所有的 $n \geqslant 1$，w_n 是一个从[0,1]到 [0,1]上连续且严格递增的双射。对所有的 x,y，有

$$\lim_{n\to\infty} T(x,y) = \frac{1}{1+\max\left(\left(\frac{1-x}{x}\right),\left(\frac{1-y}{y}\right)\right)}$$

事实上，如果 $0 \leqslant a \leqslant b$，则

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \lim_{n\to\infty} b\left(1+\left(\frac{a}{b}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}} = b$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} T(x,y) = f^{-1}(\max(f(x), f(y)))$$

式中：$f(x)=\dfrac{1-x}{x}$，既而

$$\max(f(x), f(y)) = f(\min(x,y))$$

因为 f 在[0,1]上严格递增，它遵循

$$\lim_{n\to\infty} T(x,y) = \min(x,y)$$

以下是几个融合运算算子得出的结果。在 x 轴上，x 以 0.1 步长递增；同样地，在 y 轴，y 也以 0.1 步长递增。

- 通过乘积运算算子 $x \circ y \triangleq x * y$ 得到的结果：

0.0100	0.0200	0.0300	0.0400	0.0500	0.0600	0.000	0.0800	0.0900	0.1000
0.0200	0.0400	0.0600	0.0800	0.1000	0.1200	0.1400	0.1600	0.1800	0.2000
0.0300	0.0600	0.0900	0.1200	0.1500	0.1800	0.2100	0.2400	0.2700	0.3000
0.0400	0.0800	0.1200	0.1600	0.2000	0.2400	0.2800	0.3200	0.3600	0.4000
0.0500	0.1000	0.1500	0.2000	0.2500	0.3000	0.3500	0.4000	0.4500	0.5000
0.0600	0.1200	0.1800	0.2400	0.3000	0.3600	0.4200	0.4800	0.5400	0.6000
0.0700	0.1400	0.2100	0.2800	0.3500	0.4200	0.4900	0.5600	0.6300	0.7000
0.0800	0.1600	0.2400	0.3200	0.4000	0.4800	0.5600	0.6400	0.7200	0.8000
0.0900	0.1800	0.2700	0.3600	0.4500	0.5400	0.6300	0.7200	0.8100	0.9000
0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000	0.6000	0.7000	0.8000	0.9000	1.0000

- 通过运算算子 $x\circ_n y=\dfrac{1}{1+\sqrt[n]{\left(\dfrac{1-z}{z}\right)^n+\left(\dfrac{1-y}{y}\right)^n}}$得到的结果（这里 $n=3$）：

0.0810	0.0975	0.0995	0.0999	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000
0.0975	0.1656	0.1905	0.1973	0.1992	0.1998	0.1999	0.2000	0.2000	0.2000
0.0995	0.1905	0.2538	0.2838	0.2947	0.2984	0.2996	0.2999	0.3000	0.3000
0.0999	0.1973	0.2838	0.3460	0.3794	0.3933	0.3982	0.3996	0.4000	0.4000
0.1000	0.1992	0.2947	0.3794	0.4425	0.4784	0.4937	0.4987	0.4999	0.5000
0.1000	0.1998	0.2984	0.3933	0.4784	0.5435	0.5810	0.5959	0.5996	0.6000
0.1000	0.1999	0.2996	0.3982	0.4937	0.5810	0.6494	0.6872	0.6988	0.7000
0.1000	0.2000	0.2999	0.3996	0.4987	0.5959	0.6872	0.7605	0.7955	0.8000
0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.4999	0.5996	0.6988	0.7955	0.8772	0.9000
0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000	0.6000	0.7000	0.8000	0.9000	1.0000

$n=3$ 时，注意到这个运算非常接近 $x\circ y\triangleq\min(x,y)$。

- 通过融合运算 $x\circ y\triangleq\min(x,y)$ 得到的结果：

0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000
0.1000	0.2000	0.2000	0.2000	0.2000	0.2000	0.2000	0.2000	0.2000	0.2000
0.1000	0.2000	0.3000	0.3000	0.3000	0.3000	0.3000	0.3000	0.3000	0.3000
0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.4000	0.4000	0.4000	0.4000	0.4000	0.4000
0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000	0.6000	0.6000	0.6000	0.6000	0.6000
0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000	0.6000	0.7000	0.7000	0.7000	0.7000
0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000	0.6000	0.7000	0.8000	0.8000	0.8000
0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000	0.6000	0.7000	0.8000	0.9000	0.9000
0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000	0.6000	0.7000	0.8000	0.9000	1.0000

获得函数 w_n 的值并不是很明显，模糊运算算子$\circ=\min$ 是来自融合序列$\circ_n$ 的极限，该序列的每个元素在信度变换成 $w_n[A/e]$和 $w_n[B/e]$以后，都符合传统实数乘积的分解过程。

11.3.1 独立性与相关性

如果考虑到在给定环境中两种情形的信息之间存在着相互联系，则第二个函数关系式

$$w([A \wedge B/e]) = w([A/e])w([B/e])$$

将被抛弃。这个约束尽管先后被 Cox 和 Tribus 认可，但是不能对所有的不确定性模型都适用。我们给出两个实例，Tribus 对此给出的论据是不够的。在概率论中，随机取球问题在替换或者不替换时产生了两个不同的模型。不同的人所给出的对于问题的陈述是另一个例子，这里他们可以分别给出陈述，或是在一个会议中给出陈述。

因此，由于信息的获得条件不同，由基本定理产生了两个不同的理论——概率理论和模糊逻辑。

另外，当增加相互依赖性假设和对一个精确基本定理（导致了附加规则）的认可，根据上面解释过的四个基本定理以及对三大理论（概率论、证据理论和模糊逻辑）的有效性，可以（很容易）获得概率、转换概率以及可信度。

11.3.2 t一模描述

通过对先前证明的修正和扩展，我们获得了描述 t一模的又一个结果，这是第三个结果。

定理 2： 令$\circ$是$[0,1]\times[0,1]\rightarrow[0,1]$上的一个连续的 t一模，则区间$[0,1]$是如下区间的并集：

（1）满足式 $s\circ s=s$ 的闭区间$[b, c]$；

（2）满足式 $a\circ a=a$ 和 $b\circ b=b$ 以及不等式 $s\circ s\neq s$ 的开区间(a, b)。

对第一类区间$[b, c]$：$\forall x\in[b,c]$，$\forall y\in[x,1]$，$x\circ y=x\wedge y$。

对每个第二类区间(a, b)，存在一个从$[a, b]$到$[0, 1]$上严格递增的函数 w，使得 $w(b)=1$。

如果 $\forall s\in(a,b)$，$s\circ s\neq a$，则 $w(a)=0$ 且 $\forall x,y\in[a,b]$，$x\circ y=w^{-1}(w(x)w(y))$；

如果 $\exists s\in(a,b)$，$s\circ s=a$，则 $w(a)>0$ 且 $\forall x,y\in[a,b]$，$x\circ y=w^{-1}(w(x)w(y))\vee a$。

在每个类似的区间(a, b)上，当 x 随着 a 发生改变时，运算算子$\circ$可以始终如一。但是，函数的区间是否保持不变依赖于第二个变量 y 的取值。空间$[a,b]\times$

$[a,b]$上的分离曲线$\{(x,y)\in[a,b]\times[a,b];x\circ y=a\}$由下式给出：

$$w(x\circ y)=w(a)=w(x)w(y)$$

这个定理缘于之后的引理。

引理 2： 集合$\{x\in[0,1];T(x,x)=x\}$是区间$[0,1]$上闭区间的并集。

根据 T 的连续性，一个序列的任何附着点$(s_n:n\in\mathbb{N},T(s_n,s_n)=s_n)$都满足$T(s,s)=s$，因此 s 属于该闭区间。例如$\left\{[0],\left[\frac{1}{3^n},\frac{2}{3^n}\right];n\in\mathbb{N}\right\}$，组成了闭区间的一个无限集合。在它的可数无限补集的每个开区间上，都足以通过一个连续且递增的函数 w 来定义一个 t—模，每个函数 w 都依赖于所考虑的开区间。

引理 3： 如果 α 存在于开区间$(0,1)$中，且 $T(\alpha,\alpha)\neq\alpha$，则存在两个实数 a，b 满足不等式 $0\leqslant a<\alpha<b\leqslant 1$，有 $T(a,a)=a$ 且 $T(b,b)=b$。更重要的是，对开区间(a,b)中的所有实数，都满足不等式 $T(s,s)\neq s$。

引理 4： 令 T 是一个连续的 t—模，对于$[0,1]$中的所有(x,y)，存在 a 使得 $x\leqslant a\leqslant y$ 且 $T(a,a)=a$，则有

$$T(x,y)=x=\min(x,y)$$

任何连续的 t—模 T 在$[0,1]\times[0,1]$上都与 min 函数相一致，除了(x,y)上的点，对于 $x\leqslant y$，不能找到一个实数值 α，使得

$$x\leqslant\alpha\leqslant y,T(\alpha,\alpha)=\alpha$$

下面必须研究第二类区间$[a,b]$的区域$[a,b]\times[a,b]$中 T 的行为。

引理 5： 考虑$[a,b]\times[a,b]\rightarrow[a,b]$上具有交换性和结合性的运算算子$\circ$是连续的，且关于两个变量是递减的，有 $a\circ a=a$，$b\circ b=b$，但对于开区间(a,b)中的所有 s 有不等式 $s\circ s\neq s$。令 u 在闭区间$[a,b]$中，它满足 $v\circ v=a$ 的 v 的上限，也就是说 $u\triangleq\sup\{v\in[a,b];v\circ v=\alpha\}$。运算算子$\circ$对两个变量中的每一个都是严格递增的，无论何处的 $x\circ y\neq a$，如果 $u=a$，则$\circ$在$[a,b]\times[a,b]$上是严格递增的。

引理 6： 在引理 5 应用的有效条件下，如果 $u=a$，则对于(a,b)中的所有 α 及所有非零正有理数 q，α 的实幂集 $\alpha^{\circ q}$ 被定义成(a,b)中的一个实数。

备注 1： 容易证明

$$\alpha^{\circ\frac{n}{m}}=\alpha^{\circ\frac{m}{rm}}$$

因此

$$\alpha^{\circ\frac{n}{m}}\circ\alpha^{\circ\frac{r}{s}}=\alpha^{\circ\frac{sn}{sm}}\circ\alpha^{\circ\frac{rm}{sm}}=\alpha^{\circ\frac{rm+sn}{sm}}=\alpha^{\circ(\frac{n}{m}+\frac{r}{s})}$$

引理 7： 在引理 5 应用的有效条件下，如果 $u=a$，则 $q\in\mathbb{Q}_+^*\rightarrow\alpha^{\circ q}\in(a,b)$是严格递减的，并且满足 $\lim_{q\rightarrow 0}\alpha^{\circ q}=b$ 和 $\lim_{q\rightarrow\infty}\alpha^{\circ q}=a$。

引理 8： $r\in[0,\infty)\rightarrow\alpha^{\circ r}\triangleq\sup\{\alpha^{\circ q};r<q\}$是连续且递减的，并且 $\alpha^{\circ r}\triangleq\inf\{\alpha^{\circ q}:q<r\}$。

引理 9： 在引理 5 应用的有效条件下，如果 $u>a$，则和往常一样，在$[a, b]$中定义 $r\in[0,\infty)\to u^{\circ r}$。$u^{\circ r}$ 在$[0, 2]$上严格递减，且 $u^{\circ 0}=b$，$u^{\circ 2}=a$，以及对于所有的 $r\geqslant 2$ 都有 $u^{\circ r}=a$。

引理 10： 在引理 5 应用的有效条件下，假设 $u>a$，对于所有的 $\alpha\in(a,b)$，在$[a, b]$中定义 $r\in[0,\infty]\to\alpha^{\circ r}$。在这种情况下，存在一个正实数 r_0，使得 $\alpha^{\circ r}$ 在$[0, r_0]$上严格递减，且 $\alpha^{\circ 0}=b$，$\alpha^{\circ r_0}=a$，并且对于所有的 $r\geqslant r_0$，都有 $\alpha^{\circ r}=a$。

引理 11： 考虑到$[a,b]\times[a,b]\to[a,b]$上具有结合性和交换性的运算算子$\circ$是连续的，且关于两个变量是严格递增的，它满足 $a\circ a=a$，$b\circ b=b$，并对于开区间(a, b)中所有的 s 有不等式 $s\circ s\neq s$。因此，存在一个连续且严格递增的函数 w，使得

$$x\circ y=w^{-1}(w(x)w(y))\vee a=\max(a,w^{-1}(w(x)w(y)))\qquad(11.22)$$

该引理的结果完成了定理 2 的证明。

11.4 结论

最后，基于我们推导的函数表达式，在不同的情形下（如相互联系或者相互独立的情形下），在信度上采用的这几个基本原理都意味着在不确定性鉴别框下各种现有信息融合理论的共同基础。不必要从概率的意义上理解基本信度间的独立性。在环境 e 的条件下，事件 A 的概率形式 $P(A/e)=P(A)$没有任何意义。必须避开概率概念，找到另一个表示独立形式的概念。

当所有的情形都用到融合分析时，必须要提出新的模型。下面介绍以下隐含逻辑的例子：

$$P \text{ 和 } Q\Rightarrow R$$

每个逻辑命题 P、Q、R 只是取 0、1 两个值之一。但是通过概率，这些命题可以取$[0, 1]$中的任何数值，用这些值可以表示当试验尽可能的重复时这些命题的统计极限。现在，当条件 e 在环境中已经被很好地定义时，数值$[P/e]$、$[Q/e]$和$[R/e]$只给出了直观的信度。

为了更加精确地描述，考虑一个近乎合理的医学情况，即许多病人都出现神经系统紊乱。是否根据确定性的混乱状态 P 以及药物 Q 就能得到疾病的治愈情况 R 呢？

在这样一个医学情形中，没有理由引入隐含逻辑的局限性。此外，我们有关于两个信度$[P/e]$（表示紊乱程度的 P）及$[Q/e]$（表示药物效能的 Q）上的融合"与"，希望这个融合能根据两个信度$[P/e]$和$[Q/e]$准确地给出康复程度 R 的信度$[R/e]$。

另外，这里继续讨论在第 5 章中已经讨论过的 Zadeh 的例子，根据融合规则进

行新的分析,存在如下值:

$$m(M)=0 \quad m(C)=0 \quad m(T)=1$$

式中:M 代表脑膜炎;C 代表脑挫伤;T 代表肿瘤。它们是来自 Dempster-Shafer 的归一化过程后的信度质量,其中归一化系数为

$$1-m(\varnothing)=0.0001$$

根据我们的观点,给出一个适合全局模型的信度是可能的。没有归一化时,两个医生给出了信度,即

$$[T/e]_1=0.01 \quad [T/e]_2=0.01$$

采用本章的规则,对产生这两个信度的任何融合的数值是小于等于 $0.01=\min([T/e]_1,[T/e]_2)$ 的,因此 Dempster-Shafer 的归一化不是一个融合。归一化过程与本章的观点是相冲突的。注意到在这个例子中,第 1 章提出的混合 DSm 组合规则(在第 5 章 5.3.1 节中进行了详细介绍)提供的信度是 $C_r(T)=m(T)=0.0001\leqslant\min([T/e]_1,[T/e]_2)$,它与信度度量是相一致的。

可能解释 Dempster-Shafer 的归一化过程是该模型的唯一错误。假设对来自于 Demspter-Shafer 规则的初始信度进行整体结合。在数学上,在整个复平面内调整解析函数往往是不可能的,整体结合往往也是不可能的。例如,对数函数是定义在任何邻域中,但是并没有定义在整个复平面内。整体的结合很可能就是个错误。而 DSmT 框架似乎提供了一个更好的模型来满足信度度量和融合基本定理。本书的有关部分已经对 DSmT 进行了深入的分析。

另一种解释 Dempster-Shafer 理论中信度质量的缺失是由于引入新的集合。在任何概率的扩展中,有时会发现概率质量分配到无穷大空间上。令在位置$\{n\}$处信度质量为 1,随着 n 增大到无穷大,赋予信度质量 1 到$\{\infty\}$上。类似地,可以将位置$\{-n\}$和位置$\{n\}$上都赋予信度 0.5,当 n 增加到无穷大时,将信度分配到$\{-\infty\}$和$\{\infty\}$上。在 Dempster-Shafer 模型中,有时会分配信度到空集$\{\varnothing\}$和(或)一个其他的集合上,这仅仅是为了解释消失的信度质量。

Dempster-Shafer 的归一化可能是解释该模型错误的唯一原因,这是由于信度质量的全局属性的假设是错误的,知道这个必要的公理是非常重要的。

外界环境如此不同以至于只通过乘积描述融合显然是一个很有局限性的解释。

在这些结果具体应用的处理过程中,还需要有另外的假设,因为任何信息融合都引入了单调严格递增的函数,它们的存在性已在本文中证实。这些函数(不止一个)在每个应用中仍然需要被重新确定。理论上允许保持某些典型的函数族,如果这些函数族是参数化的,那么实验结果将确定这些未知的参数。

在信息融合中可以应用这样的方法进行处理。例如,根据传感器给出的信息

对空气污染进行测定。

此外，随着时间的演变，信息融合可以通过连续的 t 一模来描述，这需要引入概率理论。

参考文献

[1] Aczel J., *Lectures on functional equations and their applications*, Academic press New York and London 1966.

[2] Bloch I., *Incertitude, imprécision et additivité en fusion de données: point de vue historique*, Traitement du Signal, 13(4): pp. 267—288, 1996.

[3] Bouchon-Meunier B., *Théorie des possibilités. Application à la présentation des connaissances en informatique*, Masson, Paris, 2nd édition, 1988.

[4] De Brucq D., Colot O., Sombo A., *Identical Foundation of Probability theory and Fuzzy Set Theory*, IF 2002, 5th International Conference on InformationFusion, Annapolis, Maryland, July 7—11, pp. 1442—1449, 2002.

[5] Cox R. T., *Pobability frequency and reasonable expectation*, American Journal of Physics, 14(1) pp. 1—14,1946.

[6] Dempster A. P., *Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping*, Annals of mathematical statistics, 1967.

[7] Denoeux T., *Decision analysis in evidence theoritical pattern classification*, Pattern recognition, 1997.

[8] Dubois D., Prade H., *Théorie des possibilités. Application à la présentation des connaissances en informatique*, Masson, Paris, 2nd édition, 1988.

[9] Gacogne L., *Eléments de logique floue*, Hermes, Paris, 1997.

[10] Jaynes E. T., *Probability theory: The logic of science*, http: //omega. albany. edu:8008/JaynesBook. html, 1994.

[11] Paris J. B., *The uncertain reasoner's companion. A mathematical perspective*, Cambridge University Press, 1994.

[12] Shafer G., *A mathematical theory of evidence*, Princeton Ujiversity Press, 1976.

[13] Smets P., *Probability, possibility, belief: Which and where?*, Handbook of defeasible Reasonning and Uncertainty Management Systems, pp. 1—24. 1998.

[14] Tribus M., *Décisions rationnelles dans l'incertain*, Masson et Cie, Paris, 1972.

[15] Zadeh L. A., *Fuzzy sets*, Volume 8 Information and Control, Academic Press, New York, 1965.

[16] Zadeh L. A., *Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility*, Fuzzy Sets and Systems, 1: pp. 3—28, 1978.

第二部分

DSmT 的应用

第 12 章　TPTP 问题

Jean Dezert	Florentin Smarandache
ONERA	Department of Mathematics
29 Av. de la Division Leclerc	University of New Mexico
92320 Châtillon	Gallup, NM 8730
France	U. S. A.

摘要:本章介绍著名且非常具有挑战性的 TPTP(Tweety Penguin Triangle Problem,也称为 TP2)问题,这个问题是 Judea Pearl 在他的一本书中提出来的。我们首先用贝叶斯推理来解答这个问题,并且证明贝叶斯推理不能用来确定“类企鹅鸟 Tweety 是否具有飞翔的能力”;然后,详细阐述从 DS 理论(Dempster—Shafer Theory)得到的该问题的反直觉解;最后,介绍如何利用我们的新理论 DSmT 来得到该问题的解。

12.1　引言

Judea Pearl 提出:DS 证据理论无法针对哪怕是很简单的证据组合问题给出正解[11,12]。许多的质疑已经由 Philippe Smets 进行了解答[22,23]。但是,TPTP 问题是一个对于所有的处理不确定和冲突事件理论的典型的具有挑战性的遗留问题,因为当典型的传递性(实质含义的基础)不成立时,该问题蕴含了对于自动推理系统要得到正解的真正难点。Judea Pearl 在他的书中指出并讨论了贝叶斯推理和 DS 推理之间存在的矛盾。本章将针对该问题进行分析,并给出 TPTP 问题的新解,它是基于我们提出的一种似是而非和自相矛盾问题推理(Plausible and Paradoxical Reasoning)的新理论,即 DSmT(Dezert-Smarandache Teory)的解。我们将阐述如何利用 DSm 联合规则(见第 4 章)来解决这一问题。本章旨在对 DSm 推理、贝叶斯推理以及 DS 推理进行比较,而不是收集所有资料和方法来解决 TPTP 问题。在文献[1,22]中也能找到很多关于 TPTP 问题的有趣而复杂的推理以及相关的信度函数 ε。而更多的基于 Zadeh 模糊逻辑[25]和概率论[5,6]对 TPTP 问题

的研究也在进行之中。在参考文献[7]中,一些在去年提出的关于条件事件代数(Conditional Event Algebras, CEA)的理论研究也可以提供针对 TPTP 问题的解。遗憾的是他们并没有提供清晰、简单和有说服力的例子来证明这些理论研究的效果和有效性。

12.2 TPTP 问题

TPTP 问题(Tweety Penguin Triangle Problem)又称为 TP2 问题,是 Judea 在他的文章[11]中提出来的。下面,我们再简单地陈述一下该问题,并给出基于贝叶斯推理和 DS 推理的解。然后,我们将采用 DSmT 分析框架和 DSm 推理来讨论 TPTP 问题。

来看规则集 $R = \{r_1, r_2, r_3\}$(在文献[1]中被称为预设规则集)。

- r_1:企鹅一般不会飞 $\Leftrightarrow$ ($P \rightarrow \neg f$)
- r_2:鸟一般会飞 $\Leftrightarrow$ ($b \rightarrow f$)
- r_3:企鹅属于鸟 $\Leftrightarrow$ ($P \rightarrow b$)

为了强调对这三个规则的信任情况,我们分别给这三个规则赋予在区间[0,1]之间的一个比较高的信度值 ω_1、ω_2 和 ω_3。

其中 $\omega_1 = 1 - \varepsilon_1$,$\omega_2 = 1 - \varepsilon_2$,$\omega_3 = 1$($\varepsilon_1$,$\varepsilon_2$ 是小正数)。这三个规则的信度将由集合 $W = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$来表示。

Judea Pearl[11]在他的书中提出了一个用于描述这三个不同权重的规则的表示方法,这是一种比较有效并很常见的方法,其表述如下:

$$r_1 : p \xrightarrow{\omega_1} (\neg f) \quad r_2 : b \xrightarrow{\omega_2} f \quad r_3 : p \xrightarrow{\omega_3} b$$

当 ω_1、ω_2、$\omega_3 \in \{0, 1\}$时,经典逻辑学是用来证明建立在这个规则之上的命题是真还是假的最好工具,经典逻辑利用三大基础规则(肯定前件式(Modus Ponens)、否定后件式(Modus Tollens)及 AAA 式(Modus Barbara,即传递性))为主要内容的标准数学命题来对问题进行求解。

当 $0 < \omega_1$、ω_2、$\omega_3 < 1$ 时,由于肯定前件式、否定后件式、AAA 式不再成立,经典逻辑学就失效了。此时,就需要寻找其他的工具,这将在 12.3.2 节进行详细讨论。

问题:假设有一种属于鸟类(b)和企鹅类(p)的动物,我们把它叫做 Tweety (T)。也就是说,我们所掌握的信息是

$$O \triangleq [T = (b \cap p)] = [(T = b) \cap (T = p)]$$

式中:$T = b \cap P$ 表示实体 T 具有 $b \cap P$ 的性质。那么,问题是,在给定已知信息 O 以及所有在知识库(即我们的规则系统 R 和 W)里所能得到的信息,Tweety

能够飞的可信度是多少(或者可能性——如果有这样的可能性的话)?

对于大多数的人工推理系统(ARS)而言,该问题的难点在于,传递性($p \to b$,$b \to f$)$\Rightarrow$($p \to f$)通常被假定满足实质蕴含的解释在这里不再成立(见12.3.2节)。在这个有趣的例子里面,经典的继承原理被推翻。不过,一个强大的人工推理系统本应能够处理这类问题,不管给定的信度值是多少(而不是限制其近似为0或者1),都应能够通过一个普遍的推理机制,得到一个可信的结果。本章对三个人工推理系统(ARS)进行验证,包括基于贝叶斯推理的ARS,发现其是不正确和不适用于该问题的;另外,还分别对基于Dempster-Shafer理论(DST)[16]和基于Dezert-Smarandache Theory (DSmT)(见本书的第1部分)的人工推理系统进行验证。

12.3 靠不住的贝叶斯推理

首先来看J. Pearl在他的书中所阐述的基于贝叶斯推理的解[11],解释为什么表面上看起来正确的结果实际上是错误的;然后进一步说明为什么通常看似合理的直觉结果却是错误的,以及贝叶斯推理的缺陷。

12.3.1 Pearl的推理

为了保证逻辑上的严谨性,我们明确地提出所有在这个推导中能得到的信息。换言之,要利用贝叶斯推理来评估条件概率 $P(T=f \mid O, R, W) = P(T=f \mid T=p, T=b, R, W)$ 的大小(如果存在)。Pearl的推理是基于"一个给定规则的信度能够表示为条件概率"(见文献[11]第4页)。换句话说,如果给定规则 $a \xrightarrow{\omega} b$($\omega \in [0, 1]$),则至少在数学上,借助ω(即$P(b \mid a)$),能够通过概率论及贝叶斯推理来得到问题的解。在后续内容中,我们会证明该模型的不合理性。现在,我们假设该概率模型确实如Judea Pearl所述一样成立。基于这一假设,因为规则r_3的必然性($\omega_3=1$),所以给定的条件($T=p, T=b, R, W$)必等效于($T=b, R, W$),这样一来,我们很容易得到如下错误的直觉性的Pearl结果:

$$P(T=f \mid O,R,W) = P(T=f \mid T=p, T=b, R, W)$$
$$P(T=f \mid O,R,W) = P(T=f \mid T=p, R, W)$$
$$P(T=f \mid O,R,W) = 1 - P(T=\neg f \mid T=p, R, W)$$
$$P(T=f \mid O,R,W) = 1 - w_1 = \varepsilon_1$$

在这一简单的推理过程里,Tweety的"鸟"的属性并没有如直觉一样增加其相比一个普通企鹅而言有更大的会飞的可能性,而且Tweety能够飞的概率依然很低(尽管这看起来很正常)。为此,我们进一步强调,在他的贝叶斯推理里面,

J. Pearl假设规则 r_1 的的信度值 ω_1 可以被描述为一个可测的实际概率 $P(\neg f \mid p)$。为了对 $P(T = f \mid O, R, W)$进行严格的推导,这个假设是必需的。但是,就如我们将在下一节中所证明的一样,在逻辑规则上的信度值 ω_i 不能够称为概率。

当规则 r_3 不是绝对肯定(即 $\omega_3 = 1$),而是存在例外时,即 $\omega_3 = 1-\varepsilon_3 < 1$,贝叶斯推理就失效了(为了节约版面起见,下面将 $T = f$, $T = b$ 和 $T = p$ 简写为 f、b 和 p):

$$P(f \mid O,R,W) = P(f \mid p,b,R,W)$$

$$P(f \mid O,R,W) = \frac{P(f,p,b \mid R,W)}{P(p,b \mid R,W)}$$

$$P(f \mid O,R,W) = \frac{P(f,b \mid p,R,W)P(p \mid R,W)}{P(b \mid p,R,W)P(p \mid R,W)}$$

假设 $P(P \mid R, W) > 0$,经过简化可以得到

$$P(f \mid O,R,W) = \frac{P(f,b \mid p,R,W)}{P(b \mid p,R,W)}$$

$$P(f \mid O,R,W) = \frac{P(b \mid f,p,R,W)P(f \mid p,R,W)}{P(b \mid p,R,W)}$$

如果假设 $P(b \mid p, R, W) = \omega_3 = 1-\varepsilon_3$ 以及 $P(f \mid p, R, W) = 1-P(\neg f \mid p, R, W) = 1-\omega_1 = \varepsilon_1$,可以得到

$$P(f \mid O,R,W) = P(b \mid f,p,R,W) \times \frac{\varepsilon_1}{1-\varepsilon_3}$$

因为 $0 \leqslant P(b \mid f, p, R, W) \leqslant 1$,所以最后得到 Pearl 的结果[11]为

$$P(f \mid O,R,W) \leqslant \frac{\varepsilon_1}{1-\varepsilon_3} \tag{12.1}$$

这一结果意味着只要 ε_3 的值很小而不管有多少鸟不会飞(ε_2),我们的研究对象 Tweety(一种类企鹅鸟)能飞的可能性就非常的小。而又因为事件 f 和$\overline{f}$是独立和互斥的,$P(f \mid O, R, W) + P(\overline{f} \mid O, R, W) = 1$,所以 Tweety 不能飞的可能性非常大(假设 Pearl 的概率模型成立)。

12.3.2 Pearl 推理的缺陷

我们证明了贝叶斯推理事实上是错误的,经过深入的分析可知,Tweety 是否能飞这一问题事实上是不可判定的。实际上,贝叶斯推理不是一个经典推断(参见第 8 章)。的确,在上一节盲目地使用贝叶斯推理之前,必须首先通过分析检查该概率模型是否能够很好地描述该系统规则的信度值。下面证明该概率模型不能对这一问题以及所有的基于非绝对规则的问题(具有小于 1 的正的信度值)进行合适

而有效的描述。

1. 预备知识

在我们的推理中会用到少量重要的经典数学逻辑命题演算原则，一些在逻辑上看起来有些奇怪和简单的符号是为了表示的方便。关于命题演算和数学逻辑的详细情况可以很容易地在许多标准数学课本中找到[15,10,9]。这些重要的规则罗列如下：

- 非 0 即 1 原则：逻辑变量要么是真，要么是假，即

$$a \vee \neg a \tag{12.2}$$

- 不自相矛盾法则：逻辑变量不能既是真的又是假的，即

$$\neg(a \wedge \neg a) \tag{12.3}$$

- 肯定前件式：这一命题数学法则是说，如果逻辑变量 a 真，且 $a \to b$ 真，则 b 也真，即

$$(a \wedge (a \to b)) \to b \tag{12.4}$$

- 否定后件式：这一命题数学法则是说，如果逻辑变量 $\neg b$ 真，且 $a \to b$ 真，则 $\neg a$ 也真，即

$$(\neg b \wedge (a \to b)) \to \neg a \tag{12.5}$$

- AAA 式：这一命题数学法则是说，如果 $a \to b$ 真且 $b \to c$ 真，则 $a \to c$ 真（传递性），即

$$((a \to b) \wedge (b \to c)) \to (a \to c) \tag{12.6}$$

用真值表法，我们很容易从这些原则推导出以下性质（关于数学逻辑的更多的一般性推论可以在文献[18,19]里面找到）：

$$((a \to b) \wedge (c \to d)) \to ((a \wedge c) \to (b \wedge d)) \tag{12.7}$$

2. 当 $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$ 时的分析

首先来看当给定的规则系统里面的规则都绝对正确时的情况，即

$$\begin{cases} r_1: p \overset{w_1=1-\varepsilon_1=1}{\to} (\neg f) \\ r_2: b \overset{w_2=1-\varepsilon_2=1}{\to} f \\ r_3: p \overset{w_3=1-\varepsilon_2=1}{\to} b \end{cases}$$

根据规则 r_1 和 r_2，同时根据式(12.7)的性质，可以得到

$$p \wedge b \to (f \wedge \neg f)$$

同时，根据“不自相矛盾法则”(12.3)以及“否定后件式法则”(12.5)，最终得到

$$\neg(f \wedge \neg f) \to \neg(p \wedge b)$$

上式表明，不管规则 r_3 是什么，$p \wedge b$ 恒假。该结果说明，事件 $T = P \cap b$ 确实

是不可能事件。又因为 $T = f$ 和 $T = \overline{f}$ 是独立互斥事件,我们可以得到的结果是:这种叫 Tweety 的类似企鹅的鸟根本不存在!

如果接受以上概率论的标记法,尝试利用贝叶斯推理来推导 $p(T = f \mid T = p \cap b)$ 和 $P(T = \overline{f} \mid T = p \cap b)$ 是行不通的,因为根据概率论的定理,必须有 $P(\varnothing) = 0$,根据实际规则,只能得到如下的不确定的值的表达式:

$$P(T = f \mid T = p \cap b) = P(T = f \mid T = \varnothing)$$

$$P(T = f \mid T = p \cap b) = \frac{P(T = f \cap \varnothing)}{P(T = \varnothing)}$$

$$P(T = f \mid T = p \cap b) = \frac{P(T = \varnothing)}{P(T = \varnothing)}$$

$$P(T = f \mid T = p \cap b) = \frac{0}{0}\text{(不确定的)}$$

同样地,有

$$P(T = \overline{f} \mid T = p \cap b) = P(T = \overline{f} \mid T = \varnothing)$$

$$P(T = \overline{f} \mid T = p \cap b) = \frac{P(T = \overline{f} \cap \varnothing)}{P(T = \varnothing)}$$

$$P(T = \overline{f} \mid T = p \cap b) = \frac{P(T = \varnothing)}{P(T = \varnothing)}$$

$$P(T = \overline{f} \mid T = p \cap b) = \frac{0}{0}\quad\text{(不确定的)}$$

3. 当 $0 < \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 < 1$ 时的分析

现在来看更普遍的情况。当允许对这些规则有少许的怀疑时,表示为 $\varepsilon_1 \gtrsim 0$,$\varepsilon_2 \gtrsim 0$ 且 $\varepsilon_3 \gtrsim 0$,来检查此时基于这些规则之上的概率模型的结果。

首先注意到,因为非 0 即 1 原则(Third Middle Excluded Principle),以及关于基于已量化了规则的信任度的概率模型存在的假设,可以同时考虑"概率论/贝叶斯"规则,即

$$\begin{cases} a \xrightarrow{P(b \mid a) = w} b \\ a \xrightarrow{P(\overline{b} \mid a) = 1 - w} \neg b \end{cases} \tag{12.8}$$

在客观概率论里面,这些已赋予信度值的规则仅表示命题"如果 a 真则 b 真"有$(100 \times \omega)\%$的可能性。换言之,随机事件 a 发生后,有$(100 \times \omega)\%$的可能性随机事件 b 发生。当不参考经典概率论时,参数 ω 以及 $1 - \omega$ 仅表示规则有效的可信任水平。

首先证明：根据一个“概率化的”规则 $a^{P(b|a)=w}_{\rightarrow}b$，我们不能够在否定后件式法则之上对信度值进行严谨的评估。换句话说，根据式(12.8)可以得到

$$\begin{cases} \neg b^{P(\overline{a}|\overline{b})=?}_{\rightarrow} \neg a \\ b^{P(\overline{a}|b)=?}_{\rightarrow} \neg a \end{cases} \tag{12.9}$$

从贝叶斯调节规则（如果概率模型成立的话它也必须成立），可以将 $P(\overline{a}|\overline{b})$ 和 $P(\overline{a}|b)$表述如下：

$$\begin{cases} P(\overline{a} \mid \overline{b}) = 1 - P(a \mid \overline{b}) = 1 - \dfrac{P(a \cap \overline{b})}{1 - P(b)} = 1 - \dfrac{P(\overline{b} \mid a)P(a)}{1 - P(b)} \\ P(\overline{a} \mid b) = 1 - P(a \mid b) = 1 - \dfrac{P(a \cap b)}{P(b)} = 1 - \dfrac{P(b \mid a)P(a)}{P(b)} \end{cases}$$

将 $P(b|a)$及 $P(\overline{b}|a)$用它们的信度值 ω 及 $1-\omega$ 代替后等效表述如下：

$$\begin{cases} P(\overline{a} \mid \overline{b}) = 1 - (1 - w)\dfrac{P(a)}{1 - P(b)} \\ P(\overline{a} \mid b) = 1 - w\dfrac{P(a)}{P(b)} \end{cases} \tag{12.10}$$

以上关系说明由于先验概率 $P(a)$ 和 $P(b)$未知，因此没有办法在理论上完全得到概率 $P(\overline{a}|\overline{b})$ 和 $P(\overline{a}|b)$。

一种基于无差别原理的简化解决办法是：假设 $P(a) = P(\overline{a}) = 1/2$ 和 $P(b) = P(\overline{b}) = 1/2$（但没有充分理由）。有了这一假设，可以分别为 $P(\overline{a}|\overline{b})$ 和 $P(\overline{a}|b)$得到如下估算结果：$\hat{P}(\overline{a}|\overline{b}) = \omega$ 和 $\hat{P}(\overline{a}|b) = 1-\omega$。由此可以进行下一步的推理。

现在，让我们回到 TPTP 问题。基于概率模型（假设成立），可以由下式开始推导：

$$\begin{cases} r_1: p^{P(\overline{f}|p)=1-\varepsilon_1}_{\rightarrow} \neg f \\ r_2: b^{P(f|b)=1-\varepsilon_2}_{\rightarrow} \neg f \\ r_3: p^{P(b|p)=1-\varepsilon_3}_{\rightarrow} \neg b \end{cases} \quad \begin{cases} p^{P(f|p)=\varepsilon_1}_{\rightarrow} f \\ b^{P(\overline{f}|b)=\varepsilon_2}_{\rightarrow} \neg f \\ p^{P(\overline{b}|p)=\varepsilon_3}_{\rightarrow} \neg b \end{cases} \tag{12.11}$$

如果考虑到我们的初步分析以及接受上述的无差别原理，那么，也会得到如下两个已赋值的规则：

$$\begin{cases} f^{\hat{P}(\overline{p}|f)=1-\varepsilon_1}_{\rightarrow} \neg p \\ \neg f^{\hat{P}(\overline{b}|f)=1-\varepsilon_2}_{\rightarrow} \neg b \\ \neg b^{\hat{P}(p|\overline{b})=1-\varepsilon_3}_{\rightarrow} \neg p \end{cases} \quad \begin{cases} \neg f^{\hat{P}(\overline{p}|\overline{f})=\varepsilon_1}_{\rightarrow} \neg p \\ f^{\hat{P}(\overline{b}|f)=\varepsilon_2}_{\rightarrow} \neg b \\ b^{\hat{p}(\overline{P}|b)=\varepsilon_3}_{\rightarrow} \neg p \end{cases} \tag{12.12}$$

将信度（假设类似于条件概率）纳入如下规则：

$$p \wedge b^{P(f|p)\cap b=?}_{\rightarrow} f \tag{12.13}$$

$$p \wedge b^{P(\overline{f}|p\cap b)=?}_{\rightarrow} \neg f \tag{12.14}$$

问题在于如何根据所有事先可获得的所有信息来严格地推导概率 $P(f \mid p \cap b)$ 及 $P(\overline{f} \mid p \cap b)$。结果是：如果没有附加假设（无法证明其正确性），就无法只

根据独立条件来进行推导。当然，可以给出 $P(f|p\cap b)$ 及 $P(\overline{f}|p\cap b)$ 如下：

$$\begin{cases} P(f \mid p \cap b) = \dfrac{P(f,p,b)}{P(p,b)} = \dfrac{P(p,b \mid f)P(f)}{P(b \mid p)P(p)} \\ P(\overline{f} \mid p \cap b) = \dfrac{P(\overline{f},p,b)}{P(p,b)} = \dfrac{P(p,b \mid \overline{f})P(\overline{f})}{P(b \mid p)P(p)} \end{cases} \tag{12.15}$$

如果按照 J. Pearl 的假设，附加独立性依然成立，即 $P(p, b|f)=P(p|f)P(b|f)$ 及 $P(p, b|\overline{f}) = P(p|\overline{f})P(b|\overline{f})$，那么可得

$$\begin{cases} P(f \mid p \cap b) = \dfrac{P(p \mid f)P(b \mid f)P(f)}{P(b \mid p)P(p)} \\ P(\overline{f} \mid p \cap b) = \dfrac{P(p \mid \overline{f})P(b \mid \overline{f})P(\overline{f})}{P(b \mid p)P(p)} \end{cases}$$

通过再一次接受无差别原理，$P(f)=P(\overline{f})=1/2$ 和 $P(P)=P(\overline{p})=1/2$，可以得到

$$\begin{cases} \hat{P}(f \mid p \cap b) = \dfrac{P(p \mid f)P(b \mid f)}{P(b \mid p)} \\ \hat{P}(\overline{f} \mid p \cap b) = \dfrac{P(p \mid \overline{f})P(b \mid \overline{f})}{P(b \mid p)} \end{cases} \tag{12.16}$$

将概率 $P(p|f)$、$P(b|f)$、$P(b|p)$、$P(p|\overline{f})$ 及 $P(b|\overline{f})$ 用它们的信度值表示(式 12.16)，最后得到

$$\begin{cases} \hat{P}(f \mid p \cap b) = \dfrac{\varepsilon_1(1-\varepsilon_2)}{1-\varepsilon_3} \\ \hat{P}(\overline{f} \mid p \cap b) = \dfrac{(1-\varepsilon_1)\varepsilon_2}{1-\varepsilon_2} \end{cases} \tag{12.17}$$

我们看到，因为互斥事件 f 和 $\overline{f}$ 的条件概率之和不为 1，所以即使接受无差别原理及附加的独立假设，得到的近似的概率依然很小而与实际不符。当 ω_1、ω_2 及 ω_3 趋近于 0 时，有

$$\hat{P}(f \mid p \cap b) + \hat{P}(\overline{f} \mid p \cap b) \approx 0$$

事实上，我们基于无差别原理和附加的独立假设，以及由 Judea Pearl 提出的模型的推理，已经很清楚贝叶斯推理不可能在此类问题上进行严格的应用，因为没有一个能够准确描述此类问题的概率模型。如果考虑到 Lewis 的理论，已在文献[7](第 11 章)详细讨论过，那么上述结果是不足为奇的。

现在来看看上述在直觉上看起来条理清楚的推理但实际是错误的推理过程的陷阱。这个问题产生的直接原因是，“企鹅”和“鸟”仅根据“会飞”和“不会飞”来进行界定。如果考虑只有这些属性，那么将没有任何动物“Tweety”可以明确划分为企鹅鸟(Penguin-bird)，因为由于这些排他的并且完备的性质，“类企鹅鸟”在现实中并不存在(如果我们仅考虑规则 r_1、r_2 及 r_3 所给的信息)。其实大家都知道，企

鹅能够归为鸟，是因为性质“鸟”不是由动物的“能否飞翔”的特性做出界定的，而是由其他动物特征(包括鸟是脊椎卵生热血动物，一个喙，羽毛和翅膀)来界定的。这些信息必须适当地考虑进规则系统，以避免落入这种歪理的陷阱。我们的直觉(正是直觉在支持错误的推理结果)事实上恰恰是一种偏见，因为我们已经知道了在现实世界中企鹅(企鹅是因为一些其他的标准而被归为鸟类)不能飞，也因此我们对企鹅鸟是否能够飞翔持很低的信度(或者是一种主观意愿，而不是概率表示)。因此，非常遗憾的是，Pearl 在文献[11]中的分析似乎是不完整的和错误的。

12.4 DS 推理

正如 Pearl 在文献[11]中指出，DS 推理(Dempster-Shafer Reasoning)在这里失效了，对于这个问题，得到了一个反直觉的结果：属性“鸟(Birdness)”似乎给 Tweety 赋予了特别的飞行能力！下面，我们基于 DS 推理给出对此问题的分析。

让我们详细地检查所有可以得到的由规则“r_1：企鹅一般是不能飞的 $\Leftrightarrow (p \rightarrow \neg f)$”(规则 r_1 的信度为 $\omega_1 = 1-\varepsilon_1$，其中 ε_1 是一个接近 0 的正数)所归纳出来的先验信息。在 DST 辨识框架里，这些信息必须以附加条件的信度函数 $\mathrm{Bel}_1(\bar{f} \mid p) = 1-\varepsilon_1$ 来进行准确的描述而不是直接用基本的可信度赋值 $m_1(\bar{f} \cap p) = 1-\varepsilon_1$。

选择信度函数 $\mathrm{Bel}_1(\bar{f} \mid p) = 1-\varepsilon_1$ 意味着“企鹅类动物(Penguin-animal)依然是非飞行动物(不管我们讨论的是何种动物)”具有非常高的信度值。当基于可信度赋值 $m_1(\bar{f} \cap p) = 1-\varepsilon_1$ 的错误而粗糙的模型没有办法分辨 r_1 和其他一些与之有相同信任值 ω_1 的规则(但有可能是错误的)，如“r'_1：$(\neg f \rightarrow p)$”时，该式可以很好地表示出我们的先验知识。这一正确的模型通过考虑两个不同的条件信度函数 $\mathrm{Bel}_1(\bar{f} \mid p) = 1-\varepsilon_1$ 和 $\mathrm{Bel}'_1(P \mid \bar{f}) = 1-\varepsilon_1$ 允许我们分辨 r_1 和 r'_1(即使它们有相同的数值上的信度值)。这个对于冲突事件粗糙而不适当的基本可信度赋值模型(如果接受它)完全无法区分规则 r_1 和 r'_1。接下来，将不得不存在 $m_1(\bar{f} \cap p) = m'_1(p \cap \bar{f})$。因此，这一模型不能够作为分析的原始模型。

同样，和分别具有信度值 $\omega_2 = 1-\varepsilon_2$ 和 $\omega_3 = 1-\varepsilon_3$ 的规则“r_2：$(b \rightarrow f)$”和“r_3：$(P \rightarrow b)$”相关的先验信息也必须要通过条件信度函数引入到模型中来。

我们首先要面对的问题是，由信度函数 $\mathrm{Bel}_1(\bar{f} \mid p) = 1-\varepsilon_1$，$\mathrm{Bel}_2(f \mid b) = 1-\varepsilon_2$ 和 $\mathrm{Bel}_3(b \mid p) = 1-\varepsilon_3$ 所描述的三个先验信息的融合。所有可以得到的先验信息都可以看作是三组相互独立的证据 B_1、B_2 和 B_3，这些由信度函数 $\mathrm{Bel}_1(\bar{f} \mid p)$，$\mathrm{Bel}_2(f \mid b)$ 及 $\mathrm{Bel}_3(b \mid p)$ 的值所表达的证据分别提供了部分信息。为了实现信息的融合，需要在不引入新的知识的前提下，定义与部分条件信度函数兼容的基本

可信度赋值 $m_1(\cdot)$、$m_2(\cdot)$ 和 $m_3(\cdot)$。我们不想在这个推理中引入一些我们事实上没有的信息。下面会详细阐述选择基本可信度赋值 $m_1(\cdot)$的理由，$m_2(\cdot)$ 和$m_3(\cdot)$的选择遵循同样的理由。

证据 B_1 仅通过信度函数 $\mathrm{Bel}_1(\bar{f}\mid p)$的值提供了关于$\bar{f}$和 p 的一些信息，而没有涉及 b。因此，由证据 B_1 导出的并符合 Shafer 模型(即一个完备而独立的事件的有限集)的辨识框架为

$$\Theta_1=\{\theta_1\triangleq\bar{f}\cap\bar{p},\theta_2\triangleq f\cap\bar{p},\theta_3\triangleq\bar{f}\cap p,\theta_4\triangleq f\cap p\}$$

用示意图表述如下：

$$\overbrace{\begin{array}{|c|}\hline \theta_4\triangleq f\cap p\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{|c|}\hline \theta_3\triangleq \bar{f}\cap p\\\hline\end{array}}^{p=\theta_3\cup\theta_4}$$

$$f=\theta_2\cup\theta_4\left\{\begin{array}{cc}\theta_4\triangleq f\cap p & \theta_3\triangleq\bar{f}\cap p\\ \theta_2\triangleq f\cap\bar{p} & \theta_1\triangleq\bar{f}\cap\bar{p}\end{array}\right\}\bar{f}=\theta_1\cup\theta_3$$

$$\underbrace{\begin{array}{|c|}\hline \theta_2\triangleq f\cap\bar{p}\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{|c|}\hline \theta_1\triangleq \bar{f}\cap\bar{p}\\\hline\end{array}}_{\bar{p}=\theta_1\cup\theta_2}$$

我们正在寻找的由超幂集 2^{Θ_1}(超幂集 2^{Θ_1}必须与信度函数 $\mathrm{Bel}_1(\bar{f}\mid p)$相一致)定义的完整基本可信度分度实际上是由未知的(至少现在未知)基本可信度赋值 $m'_1(\cdot)$和特别可信度赋值 $m''_1(\cdot)$(由 $m''_1(p\triangleq\theta_3\cup\theta_4)=1$ 定义的)的 Dempster 联合的结果。换句话说，有

$$m_1(\cdot)=[m'_1\oplus m''_1](\cdot)$$

从现在起，为了避免混淆，我们将条件术语引入到符号表示里面。因此我们将使用 $m_1(\cdot\mid p)=m_1(\cdot\mid\theta_3\cup\theta_4)$来代替 $m_1(\cdot)$。

根据 $m''_1(p\triangleq\theta_3\cup\theta_4)=1$ 以及所有的一般性未知基本可信度赋值，$m'_1(\cdot)$由如下式子定义：

$$m'_1(\varnothing)\triangleq 0,m'_1(\theta_1),m'_1(\theta_2),m'_1(\theta_3),m'_1(\theta_4),m'_1(\theta_1\cup\theta_2),$$
$$m'_1(\theta_1\cup\theta_3),m'_1(\theta_1\cup\theta_4),m'_1(\theta_2\cup\theta_3),m'_1(\theta_2\cup\theta_4),$$
$$m'_1(\theta_3\cup\theta_4),m'_1(\theta_1\cup\theta_2\cup\theta_3),m'_1(\theta_1\cup\theta_2\cup\theta_4),$$
$$m'_1(\theta_1\cup\theta_3\cup\theta_4),m'_1(\theta_2\cup\theta_3\cup\theta_4),m'_1(\theta_1\cup\theta_2\cup\theta_3\cup\theta_4)$$

利用 Demper 规则，很容易得到如下关于 $m_1(\cdot\mid\theta_3\cup\theta_4)$的表达式(实际所有的信度赋值 $m_1(\cdot\mid\theta_3\cup\theta_4)$都为 0)：

$$m_1(\theta_3\mid\theta_3\cup\theta_4)=\overbrace{m''_1(\theta_3\cup\theta_4)}^{1}[m'_1(\theta_3)+m'_1(\theta_1\cup\theta_3)+m'_1(\theta_2\cup\theta_3)+m'_1(\theta_1\cup\theta_2\cup\theta_3)]/K_1$$

$$m_1(\theta_4\mid\theta_3\cup\theta_4)=\overbrace{m''_1(\theta_3\cup\theta_4)}^{1}[m'_1(\theta_4)+m'_1(\theta_1\cup\theta_4)+m'_1(\theta_2\cup\theta_4)+m'_1(\theta_1\cup\theta_2\cup\theta_4)]/K_1$$

$$m_1(\theta_3 \cup \theta_4 \mid \theta_3 \cup \theta_4) = \overbrace{m''_1(\theta_3 \cup \theta_4)}^{1}[m'_1(\theta_3 \cup \theta_4) + m'_1(\theta_1 \cup \theta_3 \cup \theta_4) + m'_1(\theta_2 \cup \theta_3 \cup \theta_4) + m'_1(\theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3 \cup \theta_4)]/K_1$$

式中

$$K_1 \triangleq 1 - \overbrace{m''_1(\theta_3 \cup \theta_4)}^{1}[m'_1(\theta_1) + m'_1(\theta_2) + m'_1(\theta_1 \cup \theta_2)]$$

为了完成$m_1(\cdot \mid \theta_3 \cup \theta_4)$的推导，根据定义$\mathrm{Bel}_1(\bar{f} \mid p) = 1-\varepsilon_1$可以得到如下表达式：

$$\mathrm{Bel}_1(\bar{f} \mid p) = \mathrm{Bel}_1(\theta_1 \cup \theta_3 \mid \theta_3 \cup \theta_4) = m_1(\theta_1 \mid \theta_3 \cup \theta_4) + m_1(\theta_3 \mid \theta_3 \cup \theta_4) + m_1(\theta_1 \cup \theta_3 \mid \theta_3 \cup \theta_4) = 1 - \varepsilon_1$$

根据$m_1(\cdot \mid \theta_3 \cup \theta_4)$的一般表达式，可知$m_1(\theta_1 \mid \theta_3 \cup \theta_4)=0$以及$m_1(\theta_1 \cup \theta_3 \mid \theta_3 \cup \theta_4)=0$。因此，$\mathrm{Bel}_1(\bar{f} \mid p)=1-\varepsilon_1$意味着

$$m_1(\theta_3 \mid \theta_3 \cup \theta_4) = [m'_1(\theta_3) + m'_1(\theta_1 \cup \theta_3) + m'_1(\theta_2 \cup \theta_3) + m'_1(\theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3)]/K_1 = 1 - \varepsilon_1$$

然而，这还不足以定义$m_1(\theta_1 \mid \theta_3 \cup \theta_4)$的所有组件，或者同等意义上$m'_1(\cdot)$的所有组件。为了在不引入额外的且不一定正确的信息，需要应用极小承担准则(Minimal Commitment Principle，MCP)，这一准则要求不能给予一个命题比已经证明其正确性更多的信任值。根据这一准则，赋一个非空值给弱广义命题来描述$m_1(\theta_1 \mid \theta_3 \cup \theta_4)$。换句话说，MCP 允许进行合理的选择。

$$m'_1(\theta_1) = m'_1(\theta_2) = m'_1(\theta_3) = 0$$
$$m'_1(\theta_1 \cup \theta_2) = m'_1(\theta_1 \cup \theta_3) = m'_1(\theta_2 \cup \theta_3) = 0$$
$$m'_1(\theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3) \neq 0$$

因此$K_1=1$，并将$m_1(\theta_1 \mid \theta_3 \cup \theta_4)$简化为

$$m_1(\theta_3 \mid \theta_3 \cup \theta_4) = m'_1(\theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3) = 1 - \varepsilon_1$$

由于基本可信度赋值之和应为 1，因此有如下剩余信度(目前未确定的)约束条件：

$$m'_1(\theta_4) + m'_1(\theta_1 \cup \theta_4) + m'_1(\theta_2 \cup \theta_4) + m'_1(\theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_4) + m'_1(\theta_3 \cup \theta_4) + m'_1(\theta_1 \cup \theta_3 \cup \theta_4) + m'_1(\theta_2 \cup \theta_3 \cup \theta_4) + m'_1(\theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3 \cup \theta_4) = \varepsilon_1$$

令$m'_1(\theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3 \cup \theta_4)=\varepsilon_1$，再一次应用 MCP 准则。

最后，与证据集B_1提供的先验信息$\mathrm{Bel}_1(\bar{f} \mid p)=1-\varepsilon_1$相一致的一般信任值赋值$m_1(\cdot \mid p)$可以简化为

$$m_1(\theta_3 \mid \theta_3 \cup \theta_4) = m'_1(\theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3) = 1 - \varepsilon_1 \tag{12.18}$$

$$m_1(\theta_3 \cup \theta_4 \mid \theta_3 \cup \theta_4) = m'_1(\theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3 \cup \theta_4) = \varepsilon_1 \tag{12.19}$$

或者等效地表达为

$$m_1(\overline{f} \cap p \mid p) = m'_1(\overline{p} \cup \overline{f}) = 1 - \varepsilon_1 \tag{12.20}$$

$$m_1(p \mid p) = m'_1(\overline{p} \cup \overline{f} \cup p \cup f) = \varepsilon_1 \tag{12.21}$$

很容易检查，根据信任值赋值(Mass)，可以得到 $\mathrm{Bel}_1(\overline{f} \mid p) = 1 - \varepsilon_1$。事实上，有

$$\mathrm{Bel}_1(\overline{f} \mid p) = \mathrm{Bel}_1(\theta_1 \cup \theta_3 \mid p)$$

$$\mathrm{Bel}_1(\overline{f} \mid p) = \mathrm{Bel}_1((\overline{f} \cap \overline{p}) \cup (\overline{f} \cap p) \mid p)$$

$$\mathrm{Bel}_1(\overline{f} \mid p) = \underbrace{m_1(\overline{f} \cap \overline{p} \mid p)}_{0} + m_1(\overline{f} \cap p \mid p)$$

$$+ \underbrace{m_1((\overline{f} \cap \overline{p}) \cup (\overline{f} \cap p) \mid p)}_{0}$$

$$\mathrm{Bel}_1(\overline{f} \mid p) = m_1(\overline{f} \cap p \mid p)$$

$$\mathrm{Bel}_1(\overline{f} \mid p) = 1 - \varepsilon_1$$

根据同样的方法，由

$$\Theta_2 = \{\theta_1 \triangleq f \cap \overline{b}, \theta_2 \triangleq \overline{b} \cap \overline{f}, \theta_3 \triangleq f \cap b, \theta_4 \triangleq \overline{f} \cap b\}$$

所定义的证据集 B_2 可以表示为

$$\overline{f} = \theta_2 \cup \theta_4 \left\{ \overbrace{\underbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \theta_4 \triangleq \overline{f} \cap b & \quad & \theta_3 \triangleq f \cap b \\ \hline \theta_2 \triangleq \overline{f} \cap \overline{b} & & \theta_1 \triangleq f \cap \overline{b} \\ \hline \end{array}}_{\overline{b} = \theta_1 \cup \theta_2}}^{b = \theta_3 \cup \theta_4} \right\} f = \theta_1 \cup \theta_3$$

根据 $m''_2(b) = m''_2(\theta_3 \cup \theta_4) = 1$ 来求 $m_2(\cdot \mid b) = [m'_2 \otimes m''_2](\cdot)$。由 MCP 条件 $\mathrm{Bel}_2(f \mid b) = 1 - \varepsilon_2$ 进行简单的数学变换，可以得到

$$m_2(\theta_3 \mid \theta_3 \cup \theta_4) = m'_2(\theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3) = 1 - \varepsilon_2 \tag{12.22}$$

$$m_2(\theta_3 \cup \theta_4 \mid \theta_3 \cup \theta_4) = m'_2(\theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3 \cup \theta_4) = \varepsilon_2 \tag{12.23}$$

或者等效地表达为

$$m_2(f \cap b \mid b) = m'_2(\overline{b} \cup f) = 1 - \varepsilon_2 \tag{12.24}$$

$$m_2(b \mid b) = m'_2(\overline{b} \cup \overline{f} \cup b \cup f) = \varepsilon_2 \tag{12.25}$$

根据同样的方法，由

$$\Theta_3 = \{\theta_1 \triangleq b \cap \overline{p}, \theta_2 \triangleq \overline{b} \cap \overline{p}, \theta_3 \triangleq p \cap b, \theta_4 \triangleq \overline{b} \cap p\}$$

所定义的证据集 B_3 可以表示为

$$\overline{b} = \theta_2 \cup \theta_4 \left\{ \overbrace{\underbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \theta_4 \triangleq \overline{b} \cap p & \quad & \theta_3 \triangleq b \cap p \\ \hline \theta_2 \triangleq \overline{b} \cap \overline{p} & & \theta_1 \triangleq b \cap \overline{p} \\ \hline \end{array}}_{\overline{p} = \theta_1 \cup \theta_2}}^{p = \theta_3 \cup \theta_4} \right\} b = \theta_1 \cup \theta_3$$

根据 $m''_3(p)=m''_3(\theta_3\cup\theta_4)=1$ 来求 $m_3(\cdot\mid p)=[m'_3\otimes m''_3](\cdot)$。由 MCP 条件 $\mathrm{Bel}_3(b|p)=1-\varepsilon_3$ 进行简单的数学变换,可以得到

$$m_3(\theta_3 \mid \theta_3 \cup \theta_4) = m'_3(\theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3) = 1-\varepsilon_3 \tag{12.26}$$

$$m_3(\theta_3 \cup \theta_4 \mid \theta_3 \cup \theta_4) = m'_3(\theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3 \cup \theta_4) = \varepsilon_3 \tag{12.27}$$

或者等效地表达为

$$m_3(b \cap p \mid p) = m'_3(\bar{p} \cup b) = 1-\varepsilon_3 \tag{12.28}$$

$$m_3(p \mid p) = m'_3(\bar{b} \cup \bar{p} \cup b \cup p) = \varepsilon_3 \tag{12.29}$$

至此,由于所有的完全先验基本信任值赋值都已得到,我们可以用 Dempster 规则将它们联合起来,归纳所有来自简单的规则专家系统的先验信息,而该专家系统是由规则库 $R=\{r_1, r_2, r_3\}$ 以及这些规则的信度集 $W=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ 来表示。

信息的融合要求选择辨识框架 Θ 的如下部件:

$$\Theta = \{\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\theta_5,\theta_6,\theta_7,\theta_8\}$$

式中

$$\theta_1 \triangleq f \cap b \cap p \qquad \theta_5 \triangleq \bar{f} \cap b \cap p$$

$$\theta_2 \triangleq f \cap b \cap \bar{p} \qquad \theta_6 \triangleq \bar{f} \cap b \cap \bar{p}$$

$$\theta_3 \triangleq f \cap \bar{b} \cap p \qquad \theta_7 \triangleq \bar{f} \cap \bar{b} \cap p$$

$$\theta_4 \triangleq f \cap \bar{b} \cap \bar{p} \qquad \theta_8 \triangleq \bar{f} \cap \bar{b} \cap \bar{p}$$

用 Dempster 联合规则对由式(12.20)和式(12.21)给出的信度赋值 $m_1(\cdot)$及由式(12.24)和式(12.25)给出的信度赋值 $m_2(\cdot)$进行融合可以得出 $m_{12}(\cdot)=[m_1\otimes m_2](\cdot)$,有如下非空构成:

$$m_{12}(f \cap b \cap p) = \varepsilon_1(1-\varepsilon_2)/K_{12}$$

$$m_{12}(\bar{f} \cap b \cap p) = \varepsilon_2(1-\varepsilon_1)/K_{12}$$

$$m_{12}(b \cap p) = \varepsilon_1\varepsilon_2/K_{12}$$

式中

$$K_{12} \triangleq 1-(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2) = \varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_1\varepsilon_2$$

对由 Dempster 规则给出的先验信息 $m_{123}(\cdot)=[m_1\otimes m_2\otimes m_3](\cdot)=[m_{12}\otimes m_3](\cdot)$的融合可以得到如下最终结果:

$$m_{123}(f \cap b \cap p) = m_{123}(\theta_1) = \varepsilon_1(1-\varepsilon_2)/K_{123}$$

$$m_{123}(\bar{f} \cap b \cap p) = m_{123}(\theta_5) = \varepsilon_2(1-\varepsilon_1)/K_{123}$$

$$m_{123}(b \cap p) = m_{123}(\theta_1 \cup \theta_5) = \varepsilon_1\varepsilon_2/K_{123}$$

式中

$$K_{123} = K_{12} \triangleq 1-(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2) = \varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_1\varepsilon_2$$

该式准确地定义了条件信度赋值 $m_{123}(\cdot \mid p\cap b)$。结果显示，在这一特殊问题中，用上述基本信度赋值 $m_3(\cdot)$ 进行的融合与用 $m_{12}(\cdot)$ 进行融合没有什么区别。

由于我们感兴趣的是评估被称为 Tweety 的企鹅类动物（表示为 $T=(p\cap b)$）会飞的可能性，所以需要将所有知道的有关对 Tweety 描述的先验信息联合起来，而这些先验信息是用信任度赋值函数 $m_o(T=(p\cap b))=1$ 从规则系统中提取出来的。再一次应用 Demspter 规则，最终可得到如下结论性的条件基本信度函数 $m_{o123}=[m_o\otimes m_{123}](\cdot)$：

$$m_{o123}(T=(f\cap b\cap p)\mid T=(p\cap b))=\varepsilon_1(1-\varepsilon_2)/K_{12}$$

$$m_{o123}(T=(\bar{f}\cap b\cap p)\mid T=(p\cap b))=\varepsilon_2(1-\varepsilon_1)/K_{12}$$

$$m_{o123}(T=(b\cap p)\mid T=(p\cap b))=\varepsilon_1\varepsilon_2/K_{12}$$

根据 DS 推理（Dempster-Shafer Reasoning），Tweety 能飞的可信度及可能性由下式给出：

$$\mathrm{Bel}(T=f\mid T=(p\cap b))=\sum_{x\in 2^{\Theta},x\subseteq f} m_{o123}(T=x\mid T=(p\cap b))$$

$$\mathrm{Pl}(T=f\mid T=(p\cap b))=\sum_{x\in 2^{\Theta},x\cap f\neq\varnothing} m_{o123}(T=x\mid T=(p\cap b))$$

由 $f=[(f\cap b\cap p)\cup(f\cap b\cap\bar{p})\cup(f\cap\bar{b}\cap p)\cup(f\cap\bar{b}\cap\bar{p})]$ 以及信任值赋值 $m_{o123}(\cdot)$ 的值，可以得到

$$\mathrm{Bel}(T=f\mid T=(p\cap b))=m_{o123}(T=(f\cap b\cap p)\mid T=(p\cap b))$$

$$\mathrm{Pl}(T=f\mid T=(p\cap b))=m_{o123}(T=(f\cap b\cap p)\mid T=(p\cap b))+m_{o123}(T=(b\cap p)\mid T=(p\cap b))$$

最后有

$$\mathrm{Bel}(T=f\mid T=(p\cap b))=\frac{\varepsilon_1(1-\varepsilon_2)}{K_{12}} \tag{12.30}$$

$$\mathrm{Pl}(T=f\mid T=(p\cap b))=\frac{\varepsilon_1(1-\varepsilon_2)}{K_{12}}+\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{K_{12}}=\frac{\varepsilon_1}{K_{12}} \tag{12.31}$$

类似地，可以得到 Tweety 不能飞的信度值和概率，即

$$\mathrm{Bel}(T=\bar{f}\mid T=(p\cap b))=\frac{\varepsilon_2(1-\varepsilon_1)}{K_{12}} \tag{12.32}$$

$$\mathrm{Pl}(T=\bar{f}\mid T=(p\cap b))=\frac{\varepsilon_2(1-\varepsilon_1)}{K_{12}}+\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{K_{12}}=\frac{\varepsilon_2}{K_{12}} \tag{12.33}$$

当 ε_1 和 ε_2 都是很小的正数时，取其首项作为近似值，最终可以得到

$$\mathrm{Bel}(T=f\mid T=(p\cap b))=\mathrm{Pl}(T=f\mid T=(p\cap b))\approx\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$$

类似地，可以得到 Tweety 不能飞的信度值，即

$$\text{Bel}(T=\bar{f} \mid T=(p\cap b))=\text{Pl}(T=\bar{f} \mid T=(p\cap b))\approx\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$$

尽管采用了不同的推理过程和表述，这一结果与 Judea Pearl 的结果相符。该结果表明，这个简单而完备的推理实际上是与 Ballooning Extension 和由 Smets 在文献[21, 24]中提出、Shafer 也在文献[17]中进行了详细论述的一般贝叶斯理论相一致的，尽管前者是由 Smets 独立完成的。正如 Judea Pearl 所指出的："这一基于 DST 及 Dempster 联合规则的结果看起来非常自相矛盾或者说与直觉相违背，因为它意味着，如果不能飞的鸟非常少(即 $\varepsilon_2\approx 0$)，企鹅类鸟 Tweety 就有非常大的飞翔的可能。Judea Pearl 在文献[11]的第 448～449 页中指出："和直觉的冲突不是存在于信度函数 Bel(f)的具体的值，而是对于表示了企鹅是鸟的一个子类的规则 r_3 在这一推理过程中没有起到任何作用。对于 Tweety 同时属于企鹅和鸟这一事实仅为信度 Bel($T=f|T=(p\cap b)$)提供了两个函数 $m_1(\cdot)$ 和 $m_2(\cdot)$，而不管企鹅和鸟的关系是什么。这与日常我们希望的具体的子类的属性优先于分类属性的想法持相反立场。在典型的逻辑里面，这个例子里的三个规则构成了一个不可调和的矛盾。但是，这些规则的不确定性与 Dempster 量化规格一起解决了这一问题。然而，当我们把 if－then 规则视为实质蕴含类的随机逻辑公式而不是条件概率的表示时，就对其进行了错误的处理。"然而，我们注意到 Pearl 的这一说明是用来陈述 DS 推理和错误的贝叶斯推理之间的语义冲突，并支持贝叶斯推理的。

12.5 DSm 推理

本节将用 DSmT(见本书第 1 部分对 DSmT 的表述)来对 TPTP 问题进行分析。因为 r_1 没有涉及到 b，r_2 没有涉及到 p，r_3 没有涉及到 f 或 $\bar{f}$，所以将由规则集 $R=\{r_1, r_2, r_3\}$ 及信度集 $W=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ 所描述的先验信息模型化为三个独立的证据源，这三个证据源定义在单独的最小潜在矛盾(即内部矛盾)的识别框架 $\Theta_1\equiv\{p, \bar{f}\}$、$\Theta_2\equiv\{b, f\}$ 和 $\Theta_3\equiv\{p, b\}$ 上。注意到 DSmT 不像 DST 那样要求框架的精确性(见上一节)。接下来，我们将采用和上一节相同的分析方法来进行分析，不过现在是基于我们的 DSm 推理和 DSm 联合规则。

与具有信任值 $\omega_1=1-\varepsilon_1$ 的规则 r_1 相关的证据集 B_1 给我们提供了一个定义在自相矛盾的基本信任值赋值 $m_1(\cdot)$上的条件信度 $\text{Bel}_1(\bar{f}|p)$，基本信任值赋值 $m_1(\cdot)$是由 $m''(p)=1$ 和定义在超幂集 $D^{\Theta_1}=\{\varnothing, p, \bar{f}, p\cap\bar{f}, p\cup\bar{f}\}$上的 $m''_1(\cdot)$的 DSm 联合得到的。$m'_1(\cdot)$的选择则是根据 DSm 规则和 MCP 的应用

推导出来的。事实上,非空集$m_1(\cdot)$由下式给出(为了方便起见,直接将条件事件用符号表示):

$$m_1(p \mid p) = \overbrace{m''_1(p)}^{1} m'_1(p) + \overbrace{m''_1(p)}^{1} m'_1(p \cup \overline{f})$$

$$m_1(p \cap \overline{f} \mid p) = \overbrace{m''_1(p)}^{1} m'_1(\overline{f}) + \overbrace{m''_1(p)}^{1} m'_1(p \cap \overline{f})$$

信息 $\mathrm{Bel}_1(\overline{f}|p)=1-\varepsilon_1$ 意味着

$$\mathrm{Bel}_1(\overline{f} \mid p) = m_1(\overline{f} \mid p) + m_1(p \cap \overline{f} \mid p) = 1-\varepsilon_1$$

因为 $m_1(p|p) + m_1(p\cap\overline{f}|p)=1$,所以必有 $m_1(\overline{f}|p)=0$,由此根据之前的等式 $m_1(\overline{f}\cap p|p)=1-\varepsilon_1$,有

$$m_1(p \mid p) = \varepsilon_1$$

$$m_1(p \cap \overline{f} \mid p) = \overbrace{m''_1(p)}^{1} m'_1(\overline{f}) + \overbrace{m''_1(p)}^{1} m'_1(p \cap \overline{f}) = m'_1(\overline{f}) + m'_1(p \cap \overline{f}) = 1-\varepsilon_1$$

应用 MCP,结果显示必须选择

$$m'_1(\overline{f}) = 1-\varepsilon_1 \text{ 和 } m'_1(p \cap \overline{f}) = 0$$

$m'_1(\cdot)$余下的信度赋值之和必为 ε_1,即

$$m'_1(p) + m'_1(p \cup \overline{f}) = \varepsilon_1$$

对最后的约束条件再一次应用 MCP,最终得到

$$m'_1(p) = 0 \text{ 和 } m'_1(p \cup \overline{f}) = \varepsilon_1$$

最后,与证据源 B_1 相关的并满足约束条件 $\mathrm{Bel}_1(\overline{f}|p)=1-\varepsilon_1$ 的信度赋值 $m_1(\cdot|p)$有一个与在 DST 推理里面相同的数值,表示如下:

$$m_1(p \cap \overline{f} \mid p) = 1-\varepsilon_1$$

$$m_1(p \mid p) = \varepsilon_1$$

该结果是从如下两个信度赋值(即 $m_1(\cdot)=[m'_1\otimes m''_1](\cdot) =[m''_1\otimes m'_1](\cdot)$)的 DSm 联合得到的:

$$\begin{cases} m'_1(\overline{f}) = 1-\varepsilon_1 \quad \text{且} \quad m'_1(p \cup \overline{f}) = \varepsilon_1 \\ m''_1(p) = 1 \end{cases} \tag{12.34}$$

根据同样的方式,着眼于具有条件信度 $\mathrm{Bel}_2(f|b)=1-\varepsilon_2$ 的证据源 B_2 的框架 $\Theta_2=\{b, f\}$,信度赋值 $m_2(\cdot|b)$可以根据如下两个可信度赋值的内部 DSm 联合得到:

$$\begin{cases} m'_2(f) = 1-\varepsilon_2 \quad \text{且} \quad m'_2(b \cup f) = \varepsilon_2 \\ m''_2(b) = 1 \end{cases} \tag{12.35}$$

同样，着眼于具有条件信度 $\mathrm{Bel}_3(b|p)=1-\varepsilon_3$ 的证据源 B_3 的框架 $\Theta_3=\{p, b\}$，信度赋值 $m_3(\cdot|p)$可以根据如下两个可信度赋值的内部 DSm 联合得到：

$$\begin{cases} m'_3(b) = 1-\varepsilon_3 \quad \text{且} \quad m'_3(b \cup p) = \varepsilon_3 \\ m''_3(p) = 1 \end{cases} \tag{12.36}$$

很容易证明，由这些非特定的基本信度赋值函数可以得到条件信度赋值 $\mathrm{Bel}_1(\bar{f}|p)=1-\varepsilon_1$，$\mathrm{Bel}_2(f|b)=1-\varepsilon_2$ 和 $\mathrm{Bel}_3(b|p)=1-\varepsilon_3$。

现在来检查所有这些信度赋值函数的基于 DSmT 的融合结果，即对下列基本信度赋值运用 DSmT 联合规则：

$$m_1(p \cap \bar{f} \mid p) = 1-\varepsilon_1 \quad \text{和} \quad m_1(p \mid p) = \varepsilon_1$$
$$m_2(b \cap f \mid b) = 1-\varepsilon_2 \quad \text{和} \quad m_2(b \mid b) = \varepsilon_2$$
$$m_3(p \cap b \mid p) = 1-\varepsilon_3 \quad \text{和} \quad m_3(p \mid p) = \varepsilon_3$$

我们注意到，尽管这些基本信度赋值与在上一节利用 DST 识别框架对这一特定问题进行推理所得到的结果一致，但是，这一结果实际上是来自于与 DST 有轻微区别也更加简单的基于 DSmT 的推理过程。因此，尽管我们会用与基于 DST 的推理过程相同的信息来解决 TP2 问题，但是我们会示意 DSm 推理能够得到一个条理更加清晰的结果。

这里强调一下，必须对前提/元素 p, b, f 和$\bar{f}$进行处理，因此整个识别框架由式 $\Theta=\{b, p, f, \bar{f}\}$给出。注意到由于 Θ 里的元素并非都是排他的，因此框架 Θ 与 Shafer 的模型并不一致，这是 DSmT 体系和 DST 体系的主要区别。由于只有 f 和$\bar{f}$是真正互斥的，即$\bar{f} \cap f=\emptyset$，所以要处理一个简单的混合 DSm 模型 $\mathscr{M}$，必须运用混合 DSm 联合规则而不是典型 DSm 规则。这里用一个给定的 $K>2$ 的混合 DSm 模型来简单回顾一下混合 DSm 联合规则（完整的推导、论述和例子可以在第 4 章中找到）。对于所有的 $A \in D^{\Theta}$，独立的信息源被定义为

$$m_{\mathscr{M}(\Theta)}(A) \triangleq \phi(A)[S_1(A)+S_2(A)+S_3(A)] \tag{12.37}$$

式中：$\phi(A)$是集合 A 的典型的非空函数，即如果 $A \notin \emptyset$，则$\phi(A)=1$，否则 $\phi(A)=0$（$\emptyset \triangleq \{\emptyset, \emptyset_{\mathscr{M}}\}$是所有的相对和绝对空的元素的集合），并且

$$S_1(A) \triangleq \sum_{\substack{X_1, X_2, \cdots, X_k \in D^{\Theta} \\ (X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_k)=A}} \prod_{i=1}^{k} m_i(X_i) \tag{12.38}$$

$$S_2(A) \triangleq \sum_{\substack{X_1, X_2, \cdots, X_k \in \emptyset \\ [u=A] \vee [(u \in \emptyset) \wedge (A=I_t)]}} \prod_{i=1}^{k} m_i(X_i) \tag{12.39}$$

$$S_3(A) \triangleq \sum_{\substack{X_1, X_2, \cdots, X_k \in D^\Theta \\ (X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_k) = A \\ (X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_k) \in \varnothing}} \prod_{i=1}^{k} m_i(X_i) \tag{12.40}$$

包含有 $u \triangleq u(X_1) \cup u(X_2) \cup \cdots \cup u(X_k)$（其中，$u(X)$是所有组成 X 的独立 θ_i 的联合，$I_t \triangleq \theta_1 \cup \theta_2 \cup \cdots \cup \theta_n$）的如下定义在框架 $\Theta = \{\theta_1, \cdots, \theta_n\}$上的式子完全是自相矛盾的。例如，如果 X 是独立的，则 $u(X) = X$；如果 $X = \theta_1 \cap \theta_2$ 或者 $X = \theta_1 \cup \theta_2$，则 $u(X) = \theta_1 \cup \theta_2$；如果 $X = (\theta_1 \cap \theta_2) \cup \theta_3$，则 $u(X) = \theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3$。其中，约定 $u(\varnothing) \triangleq \varnothing$ 。

第一个和式 $S_1(A)$与信度赋值 $m_{\mathcal{M}^f(\Theta)}(A)$相符，后者是用基于自由 DSm 模型 $\mathcal{M}^f$（即基于自由框架 D^Θ）的经典 DSm 联合规则得到的。混合 DSm 联合规则(12.37)中的第二个和式 $S_2(A)$代表了所有的被转化为完全或相对无知的绝对/相对空集。混合 DSm 联合规则(12.37)中的第三个和式 $S_3(A)$用同样的方式将相对空集的和转化为非空集，因为 $S_3(A)$是根据 DSm 经典规则计算出来的。

为了应用混合 DSm 联合规则，必须注意到由于 $f \cap \bar{f} = \phi$ 导致$(p \cap \bar{f}) \cap (b \cap f) \cap p \equiv p \cap b \cap f \cap \bar{f} = \varnothing$，也因此有 $(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)\varepsilon_3$ 被转化为混合命题 $H_1 \triangleq (p \cap \bar{f}) \cup (b \cap f) \cup p \equiv (b \cap f) \cup p$；相似地，由于 $f \cap \bar{f} = \varnothing$ 导致$(p \cap \bar{f}) \cap (b \cap f) \cap (p \cap b) \equiv p \cap b \cap f \cap \bar{f} = \varnothing$，因此有与之相对应的 mass$(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)(1-\varepsilon_3)$被转化为混合命题 $H_2 \triangleq (p \cap \bar{f}) \cup (b \cap f) \cup (p \cap b)$。在这一 TPTP 问题里面不需要再进行其他的转换，所以我们最终根据混合 DSm 联合规则(式12.37)可以得到如下关于信度赋值 $m_{123}(\cdot \mid p \cap b) = [m_1 \otimes m_2 \otimes m_3](\cdot)$的结果(符号$\otimes$在这里相当于 DSm 联合符号，并且由于排版空间的限制略去了条件项 $p \cap b$)：

$$m_{123}((b \cap f) \cup p \mid p \cap b) = (1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)\varepsilon_3$$

$$m_{123}((p \cap \bar{f}) \cup (b \cap f) \cup (p \cap b) \mid p \cap b) = (1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)(1-\varepsilon_3)$$

$$m_{123}(p \cap b \cap \bar{f}) \mid p \cap b) = (1-\varepsilon_1)\varepsilon_2\varepsilon_3 + (1-\varepsilon_1)\varepsilon_2(1-\varepsilon_3) = (1-\varepsilon_1)\varepsilon_2$$

$$m_{123}(p \cap b \cap f) \mid p \cap b) = \varepsilon_1(1-\varepsilon_2)\varepsilon_3 + \varepsilon_1(1-\varepsilon_2)(1-\varepsilon_3) = \varepsilon_1(1-\varepsilon_2)$$

$$m_{123}(p \cap b \mid p \cap b) = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2(1-\varepsilon_3) = \varepsilon_1\varepsilon_2$$

可以验证这些信度赋值之和为 1，并且这些结果是与我们的直觉完全一致的，因为 $m_{123}(\cdot \mid p \cap b)$的非空部分可以简化为

$$m_{123}((p \cap \bar{f}) \cup (b \cap f) \cup (p \cap b) \mid p \cap b) = (1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)$$

$$m_{123}(p \cap b \cap \bar{f}) \mid p \cap b) = (1-\varepsilon_1)\varepsilon_2$$

$$m_{123}(p \cap b \cap f \mid p \cap b) = \varepsilon_1(1-\varepsilon_2)$$

$$m_{123}(p \cap b \mid p \cap b) = \varepsilon_1\varepsilon_2$$

这一结果说明，根据我们的 DSm 推理规则，结果中存在非常大的不确定性(因

为我们的规则系统中的规则自相冲突)：当 ε_1 和 ε_2 是一个小的正数时，企鹅类鸟既是一个不能飞的企鹅类动物又是一个可以飞的鸟类动物。$m_{123}(p\cap b \mid p\cap b)$的这个很小的值 $\varepsilon_1\varepsilon_2$ 充分说明了如下事实：因为我们是在框架 $\Theta=\{p, b, f, \bar{f}\}$上进行讨论的，所以不能仅根据 $p\cap b$ 赋予一个大的信度赋值；因为“鸟”或“企鹅”的属性均赋予了“飞”或“不飞”的性质，因此我们也不能单独考虑 $p\cap b$ 的性质。

因此，对于这个我们特别关注的“企鹅鸟”的信度值(与特别的信度赋值 $m_o(T=(p\cap b))=1$)相对应)，可以从对由 $m_{123}(\cdot \mid p\cap b)$所概括的所有的先验信息和由 $m_o(\cdot)$所概括的可以得到的资料进行的 DSm 联合很容易地得到

$$m_{o123}(T=(p\cap b\cap \bar{f}) \mid T=(p\cap b))=(1-\varepsilon_1)\varepsilon_2$$

$$m_{o123}(T=(p\cap b\cap f) \mid T=(p\cap b))=\varepsilon_1(1-\varepsilon_2)$$

$$m_{o123}(T=(p\cap b) \mid T=(p\cap b))=\varepsilon_1\varepsilon_2$$

$$m_{o123}(T=(b\cap f)\cup p \mid T=(p\cap b))=(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)\varepsilon_3$$

$$m_{o123}(T=(p\cap \bar{f})\cup(b\cap f)\cup(p\cap b) \mid T=(p\cap b))=(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)(1-\varepsilon_3)$$

根据 DSm 推理，Tweety 能够飞的信度由下式给出：

$$\mathrm{Bel}(T=f \mid T=(p\cap b))=\sum_{x\in D^\Theta, x\subseteq f} m_{o123}(T=x \mid T=(p\cap b))$$

利用 $m_{o123}(\cdot \mid T=(P\cap b))$的所有组成，直接得到

$$\mathrm{Bel}(T=f \mid T=(p\cap b))=m_{o123}(T=(f\cap b\cap p) \mid T=(p\cap b))$$

最终得到

$$\mathrm{Bel}(T=f \mid T=(p\cap b))=\varepsilon_1(1-\varepsilon_2) \tag{12.41}$$

根据相似的途径，可以得到 Tweety 不能飞的信度，即

$$\mathrm{Bel}(T=\bar{f} \mid T=(p\cap b))=\varepsilon_2(1-\varepsilon_1) \tag{12.42}$$

我们发现这两种情况的信度都非常低，这一结果是正常的并与 12.3.2 节的推理一致。现在来检查 Tweety 飞或不飞的能力的有理性，分别由如下两式给出：

$$\mathrm{Pl}(T=f \mid T=(p\cap b))\triangleq\sum_{x\in D^\Theta, x\cap f\neq\varnothing} m_{o123}(T=x \mid T=(p\cap b))$$

$$\mathrm{Pl}(T=\bar{f} \mid T=(p\cap b))\triangleq\sum_{x\in D^\Theta, x\cap \bar{f}\neq\varnothing} m_{o123}(T=x \mid T=(p\cap b))$$

经过数学变换之后，可以得到

$$\mathrm{Pl}(T=f \mid T=(p\cap b))=(1-\varepsilon_2) \tag{12.43}$$

$$\mathrm{Pl}(T=\bar{f} \mid T=(p\cap b))=(1-\varepsilon_1) \tag{12.44}$$

所以我们断定，正如理性所期待的那样，我们无法确定 Tweety 是否具有飞翔的能力。因为有

$$[\mathrm{Bel}(f \mid p \cap b), \mathrm{Pl}(f \mid p \cap b)] = [\varepsilon_1(1-\varepsilon_2), (1-\varepsilon_2)] \approx [0,1]$$

$$[\mathrm{Bel}(\overline{f} \mid p \cap b), \mathrm{Pl}(\overline{f} \mid p \cap b)] = [\varepsilon_2(1-\varepsilon_1), (1-\varepsilon_1)] \approx [0,1]$$

注意到，如果令 $\varepsilon_1=0$ 及 $\varepsilon_2=1$（或 $\varepsilon_1=1$ 及 $\varepsilon_2=0$），也就是强制让规则系统的初始化规则具有一致性，那么可以得到与实际相符合的 Tweety 肯定不能飞的结果（如果是 $\varepsilon_1=1$ 及 $\varepsilon_2=0$，则相应的结果是一定能飞）。

这一与基于 DS 推理完全不同却源于完全一致的可获信息的合理结果来自于混合 DSm 联合规则，而这一规则将部分的空集信度赋值 $m(\varnothing)=(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)\varepsilon_3+(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)(1-\varepsilon_3)\varepsilon_1$ 转换为命题 $(b\cap f)\cup p$ 和 $(p\cap\overline{f})\cup(b\cap f)\cup(p\cap b)$。

然而，我们可以清楚地看到，在 TP2 问题中“$m(\varnothing)$ 具有一个很大的值”这一事实指出了一个明显的融合问题，并由此证明：TP2 问题确实是一个几乎不可能解决的问题，并且这一基于 DSmT 的融合结果可以让我们断定 Tweety 是否具有飞翔能力是不可判定的。换句话说，基于 DSmT 的融合甚至可以运用在这一类几乎不可能的问题上，并根据它自己的推理过程得出一个合理的解。另一种简化的结果是说，由于 $m(\varnothing)\geqslant 0.5$，这一问题自然必须认定为一个不可能问题。

12.6 结论

本章针对非常具有挑战性的 TPTP 问题进行了深入的分析。这一推理证明，即使接受中立原则和条件独立假设，但由于概率模型不成立，贝叶斯推理仍然不能用来准确描述这一问题。任何基于假设概率模型对这一问题的描述所得到的结论实际上都是基于错误的贝叶斯推理的，这是一个基本的事实。然后，有人描述了 DS 推理如何来解决这一问题中的不确定性和冲突性，而我们感觉这一方法是错误的。进而，我们证明了 DSmT 能够处理这一问题，并且根据它自己的方式针对这一不确定性给出了一个有根据的、合理的解。

致谢

感谢 Roy Streit 博士以及位于罗德岛州纽波特的美国海军水下作战中心（Naval Undersea Warfare Center Newport，RI）。感谢他们在 2003 国际信息融合会议（澳大利亚 Cairns，2003 年 7 月）期间介绍和鼓励我们去研究这一非常令人兴奋的、具有挑战性的问题。感谢 Smets 教授与我们进行讨论、提出建议并提供了有助于本文提高的非常重要的参考资料。

参 考 文 献

[1] Benferhat S., Saffioti A., Smets Ph., *Belief functions and default reasoning*, Artificial Intelligence 122, pp. 1—69, 2000.

[2] Buchanan B. G., Shortliffe E. H., *Rule Bases Expert Systems. The MYCIN Experiments of the Stanford Heuristic Programming Project*, Addison Wesley, 1984.

[3] Dezert J., Smarandache F., *Partial ordering of hyper—power sets and matrix represerntation of belief functions within DSmT*, Proc. of Fusion 2003 Conf., Cairns, Australia, July 8—11, 2003.

[4] Dezert J., Smarandache F., *On the generation of hyper—power sets for the DSmT*, Proceedings of the 6th International Conference on Information Fusion, Cairns, Australia, July 8—11, 2003.

[5] Dubois D., Prade H., *Fuzzy sets and systems, theory and applications*, Academic Press, 1980.

[6] Dubois D., Prade H., *Théorie des possibilités, application à la représentation des connaissances en informatique*, Masson, (2nd edition), 1987.

[7] Goodman I. R, Mahler R. P. S., Nguyen H. T., *Mathematics of Data Fusion*, Kluwer Acad. Press, 1997.

[8] Klawonn F., Smets Ph., *The Dynamic of Belief in the Transferable Belief Model and Specialization-Generalization Matrices*, Proc. of the 8th Conf. on Uncertainty in AI. Dubois D., Wellman M. P., D'Ambrosio B. and Smets Ph. (eds). Morgan Kaufmann Publ., San Mateo, CA, pp. 130—137, 1992.

[9] Kleene, S. C., *Mathematical Logic.*, New York,Dover, 2002.

[10] Mendelson, E., *The Propositional Calculus*, Ch. I in Introduction to Mathematical Logic, 4th ed. London: Chapman & Hall, pp. 12—44, 1997.

[11] Pearl J., *Probabilistic reasoning in Intelligent Systems: Networks of Plausible Inference*, Morgan Kaufmann Publishers, San Mateo, CA, 1988.

[12] Pearl J., *Reasoning with belief functions and analysis of compatibility*, Int. Journal of Approximate Reasoning, 4, pp. 363—390, 1990.

[13] Lewis D., *Probabilities of conditonals and conditional probabilities*. Philsophical Review. 85, 1976.

[14] Poole D. L., *On the comparison of theories: preferring the most specific explanation*, Proc. 9th Int. Joint Conf. on Artif. Intelligence, Los Angeles, pp. 465—474. 1985.

[15] Nidditch. P. H, *Propositional Calculus*, New York, Free Press of Glencoe. 1962.

[16] Shafer G., *A Mathematical Theory of Evidence*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1976.

[17] Shafer G., *Belief functions and parametric models*, J. Roy. Statist. Soc., B., 44, pp. 322—352, 1982.

[18] Smarandache F., *Deducibility Theorems in Mathematics logics*, Ann. Univ. Timisoara, Seria ST., Matematica, Vol. XVII, Fasc. 2, pp. 163—168, 1979 (available in [19])

[19] Smarandache F., *Collected Papers, Vol. I*, Editura Tempus Romania SRL, 1995, pp. 232—239, avail able at http://www.gallup.unm.edu/~smar and ache/CP1.pdf.

[20] Smarandache F., Dezert J. (Editors), *Advances and Applications of DSmT for Information Fusion (Collected works)*, American Research Press, June 2004.

[21] Smets Ph. , *Un modèle mathématico—statistique simulant le processus de diagnostic médical*, Ph. D. Thesis, Université Libre de Bruxelles (available through University Microfilm International, 30—32 Mortimer Street London, WIN 7RA, Thesis 80—70,003), 1978.

[22] Smets Ph. , Hsia Y. T. , *Default reasoning and the transferable belief model*, In M. Henrion, L. N. Kanal and J. F. Lemmer (Editors), Uncertainty in Artificial Intelligence 5, Elsevier Science Publishers, pp. 495—504, 1990.

[23] Smets Ph. , *Resolving misunderstandings about belief functions: A response to the many criticisms raised by Judea Pearl*, Int. J. Approximate Reasoning, 6, pp. 321—344, 1992.

[24] Smets Ph. , *Belief functions: The disjunctive rule of combination and the Generalized Bayesian Theorem*, Int. J. Approximate Reasoning, 9, pp. 1—35, 1993.

[25] Zadeh L. , *Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility*, Fuzzy sets and systems 1, pp. 3—28, 1978.

第 13 章　运用 DSmT 预测目标的行为趋向①

Albena Tchamova，Tzvetan Semerdjiev
Institute of Parallel Processing
Bulgarian Academy of Sciences
Sofia，Bulgaria

Jean Dezert
ONERA
29 Av. de la Division Leclerc
92320 Châtillon，France

摘要：本章提出一种预测目标行为趋向（“离开”、“靠近”）的方法。该方法将 DSmT 的似是而非和自相矛盾的推理方法运用到常规声纳幅度测量中，为相应的决策过程提供证据。在某些实际情况下，由于量度解释上的差异，难以确定测量方案。在这种情况下，决策过程会产生冲突，很难用现有的方法解决。本章研究的目的是阐明在存在量度解释差异的情况下，运用 DSmT 方法能够成功地进行决策，实现对目标的行为趋向的预测。文中给出的实例表明运用 DSmT 推理方法比采用模糊逻辑的方法更好，可全面提高系统的跟踪性能。

13.1　引言

基于声纳的角度跟踪系统由于其复杂性而发展缓慢，这种系统在检测精度上比基于其他一些类型传感器的系统要差，但它有一个重要优点就是隐密性好。在只有一个角度传感器的情况下，仅能获得目标的单一方向信息，而目标的实际位置和行为趋向（“靠近”或“离开”）是未知的。近年来，计算机技术的发展提高了数据处理能力，改善了声纳系统性能。大量的基于单一角度传感器测量数据与其他信息融合的目标跟踪技术得到了迅速发展。本研究利用一种标准发射装置连续发射振幅信号，来预测目标的行为趋向，从而提高单一角度跟踪系统的整体性能。该项研究的目的是阐明在存在量度解释差异的情况下，运用 DSmT 方法能够成功地进行决策，实现对目标的行为趋向的预测。本章给出了与其他方法的比较，而并未介

① 本章内容曾于 2003 年 7 月在澳大利亚凯恩斯举行的国际信息融合大会上发表[7]，经国际信息融合学会同意转载于此，本文工作部分得到了勃朗峰基金（MONT：I－1205/02，I－1202/02）和卓越中心基金（BIS21：ICA1－2000－70016）的资助。

绍模糊逻辑方法。

13.2　问题的表述

为了使单一角度测量系统能够跟踪目标，需要通过附加的发射装置获得未知范围的信息。在我们的研究中，假设在检测局部角度的同时，被观测的目标发射出恒定信号，该信号被传感器以非恒定方式检测到，而其强度（或幅值）不变。在每个时刻 $k=1, 2, \cdots$ 获得的附加信号矢量为 $\mathbf{Z}=\{Z_\theta, Z_A\}$，这里 $Z_\theta=\theta+v_\theta$ 表示检测的含有零均值高斯噪声 $v_\theta=N(0, \sigma_{v_\theta})$ 的局部测量角度，σ_{v_θ} 为协方差；$Z_A=A+v_A$ 表示含有零均值高斯噪声 $v_A=N(0, \sigma_{v_A})$ 的信号的幅值，σ_{v_θ} 为协方差。幅值的变化是由杂乱的环境和与目标的距离变化引起的，它可作为描述目标行为模式（“靠近”或“离开”）的条件。我们的目的是，利用接收的振幅特征测量值，预测和估计可能的目标行为趋向。

图 13.1 是目标行为跟踪系统的框图。关于表达式问题，我们主张用两个基于单一模型的卡尔曼滤波器来实现目标行为的两种模式——“靠近”和“离开”。在初始时刻 k，用模糊振幅状态估计量来表征目标行为，其模型分别为 $A^{\mathrm{App}}(k|k)$ 和 $A^{\mathrm{Rec}}(k|k)$。新的观测值 $Z_A(k+1)=A(k+1)+v_A(k+1)$ 假定为加入了噪声的真值。由于选用了模糊化界面，它是不确定的。

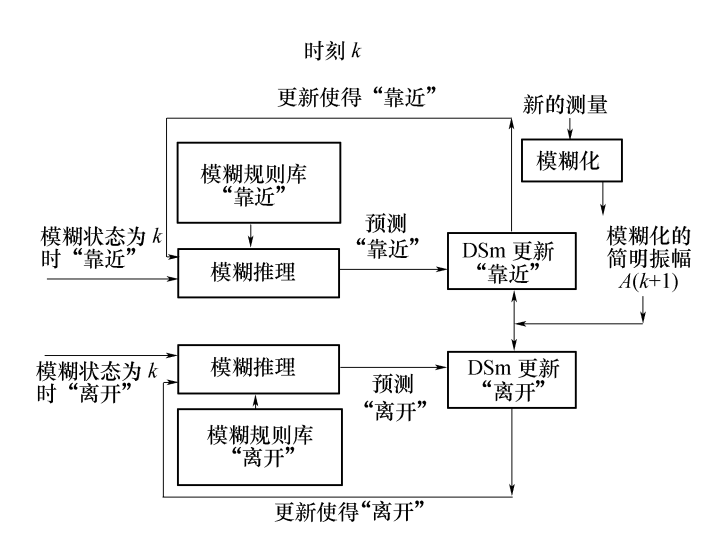


图 13.1　目标行为跟踪系统框图

现有的行为趋向预测方法是依据 Zadeh 的混合规则。最新的方法是基于 DSm 模型的 Dezert-Smarandache 的经典组合规则来估计目标的行为趋向。

Dezert-Smarandache 理论提出了一个特殊的非排他性框架，可成功地处理那些理性的、不确定的或自相矛盾的数据。该系统结构图有点类似于常用的普通跟踪系统[1,2]，其特点表现在主要步骤的细节方面。

13.3 预测目标行为趋向的方法

在目标行为跟踪系统框图中有几个特别的基本组成部分。

13.3.1 模糊化界面

在我们的任务中，一个决定性的变量是系统接收的由发射器在连续时间时刻 $k=1, 2, \cdots$ 发射的振幅值。我们将模糊化界面（图 13.2）映射为两个模糊集，将其定义为两个不同的语义识别框架 $\Theta=\{S \triangleq \text{Small}, B \triangleq \text{Big}\}$。其隶属函数不是任意选择，而是与测量幅值和对应目标距离之间的关系成反比。

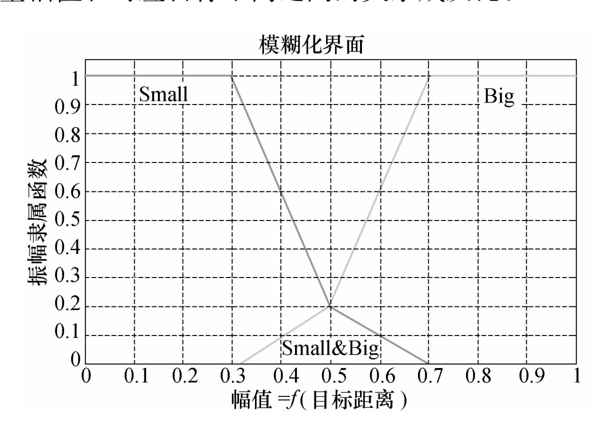


图 13.2　模糊化界面

模糊集基数的长度提供设计参数，通过标定可得到令人满意的性能。这些函数根据先验信息 $A \approx f\ (1/\delta D)$ 进行调整。相邻模糊集之间的重叠程度反映了在特定距离间隔边界点处幅值变化的梯度。

13.3.2 行为模式

根据我们的任务，模糊规则的定义与在连续时刻 $k=1, 2, \cdots$ 的跟踪幅值变化相一致。有一个特点值得关注，那就是模糊规则只有一个，且具有相同的前件和后件。我们通过前面段落中规定的语言条款和相关隶属函数来确定其含义（见 13.3.1 节的有关内容）。我们认为有如下两个基本的目标行为模式：

“靠近”目标——其行为特征是振幅值逐步增加的一个稳定过程，也就是 $S \to S \to B \to B$ 的转换是一种固定模式；

“离开”目标——其行为特征是振幅值逐步减小的一个稳定过程，也就是 $B \to B \to S \to S$ 的转变是一种固定模式。

为了恰当地构建这些模型，需要建立下列基本规则库。

行为模式 1："靠近"目标。

规则 1：如果 $A(k)=S$ 则 $A(k+1)=S$

规则 2：如果 $A(k)=S$ 则 $A(k+1)=B$

规则 3：如果 $A(k)=B$ 则 $A(k+1)=B$

行为模式 2："离开"目标。

规则 1：如果 $A(k)=B$ 则 $A(k+1)=B$

规则 2：如果 $A(k)=B$ 则 $A(k+1)=S$

规则 3：如果 $A(k)=S$ 则 $A(k+1)=S$

这些模糊模型的推导方法是建立在每一个建模过程的基本原则之上的。文献[4]已证明，最小化和乘推论由于保持因果关系而在工程应用中得到广泛采用。由模糊图得到的模型为

$$g = \max_i(\mu_{A_1 \times B_1}(u,v)) = \max_i(\mu_{A_1}(u) \cdot \mu_{B_1}(v)) \tag{13.1}$$

其中：$\mu_{A_1 \times B_1}(u,v)=\mu_{A_1}(u) \cdot \mu_{B_1}(v)$是模糊关联 Larsen 算子；$g=\max_i(\mu_{A_1 \times B_1})$是模糊关联算子的最大值；$\mu_{B'}(y)=\max_{x_i}(\min(\mu_{A'}(x_i),\mu_{A \times B}(x_i,y_i)))$是 Zadeh 最大一最小算子的组成规则。

与两种模型相关的模糊曲线图可通过上述数学表达式获得。通过采用“Small”和“Big”的隶属函数，其所有可能的语义表达都包含在超幂集 $D^\Theta=\{S, B, S\cap B, S\cup B\}$中。

关系 1：靠近目标

$k \to k+1$	S	$S\cap B$	B	$S\cup B$
S	1	0	1	0
$S\cap B$	0	0	0	0
B	0.2	0	1	0
$S\cup B$	0	0	0	0

关系 2：离开目标

$k \to k+1$	S	$S\cap B$	B	$S\cup B$
S	1	0	0.2	0
$S\cap B$	0	0	0	0
B	1	0	1	0
$S\cup B$	0	0	0	0

13.3.3 振幅状态预测

在初始时刻 k，目标由模型 $\mu_{A^{\text{App}}}(k|k)$和 $\mu_{A^{\text{Rec}}}(k|k)$来估计模糊振幅状态。将

模糊集和 Zadeh 最大一最小原理应用到模式 1 和模式 2 中[4]，我们可得到 $k+1$ 时刻模型的条件振幅状态预测值，也就是 $\mu_{A^{\mathrm{App}}}(k+1|k)$ 可通过$(\min(\mu_{A^{\mathrm{App}}}(k|k), \mu_{\mathrm{App}}(k\to k+1)))$求得，$\mu_{A^{\mathrm{Rec}}}(k+1|k)$可通过$(\min(\mu_{A^{\mathrm{Rec}}}(k|k), \mu_{\mathrm{Rec}}(k\to k+1)))$求得。

13.3.4 采用 DSmT 的状态更新

这里采用经典的 DSm 组合规则进行状态更新，这一过程是对所提出的模型（“靠近”、“离开”）状态预测和新的测量值进行融合的基础上实现的。由于经过$\cup$和$\cap$运算后 D^{Θ} 是闭集合，为了确保 $m(\cdot): D^{\Theta}\to[0, 1]$ 是适当的归一化信息粒度，有必要将表示预测状态和新的测量的模糊隶属函数转变为质量函数。它通过统一时间间隔的标准化来实现，模型的条件幅值状态预测向量 $\mu_{\mathrm{pred}}^{\mathrm{App/Rec}}(\cdot)$由下式得到：

$$[\mu_{\mathrm{pred}}^{\mathrm{A/R}}(S), \mu_{\mathrm{pred}}^{\mathrm{A/R}}(S\cap B), \mu_{\mathrm{pred}}^{\mathrm{A/R}}(B), \mu_{\mathrm{pred}}^{\mathrm{A/R}}(S\cup B)] \tag{13.2}$$

通常，包含在 $\mu_{\mathrm{pred}}^{\mathrm{App/Rec}}(\cdot)$中的那些项代表了预测幅值行为的可能性，并构成了超幂集 D^{Θ} 中的元素，没有必要将它们总和起来。为了运用经典的 DSm 组合规则，必须对 $\mu_{\mathrm{pred}}^{\mathrm{App/Rec}}(\cdot)$进行标准化处理，从而获得各自的广义基本信度赋值（gbba）$\forall C\in D^{\Theta}=\{S, S\cap B, B, S\cup B\}$：

$$m_{\mathrm{pred}}^{\mathrm{App/Rec}}(C)=\frac{\mu_{\mathrm{pred}}^{\mathrm{App/Rec}}(C)}{\sum_{A\in D^{\Theta}}\mu_{\mathrm{pred}}^{\mathrm{App/Rec}}(A)} \tag{13.3}$$

在运用 DSm 组合规则前必须对新的测量数据进行同样的标准化处理。

案例

以 $\mu(S)=0.6$，$\mu(S\cap B)=0.15$，$\mu(B)=0.05$ 和 $\mu(S\cup B)=0.0$ 代入“靠近”模型 $\mu_{\mathrm{pred}}^{\mathrm{App/Rec}}(4|3)$，得到预测向量，其标准化常数 $K=0.6+0.15+0.05+0.0=0.8$，广义基本信度赋值(gbba)分别为

$$m_{\mathrm{pred}}^{\mathrm{App/Rec}}(S)=0.6/K=0.75 \qquad m_{\mathrm{pred}}^{\mathrm{App/Rec}}(S\cap B)=0.15/K=0.1875$$

$$m_{\mathrm{pred}}^{\mathrm{App/Rec}}(\mathrm{B})=0.05/K=0.0625 \qquad m_{\mathrm{pred}}^{\mathrm{App/Rec}}(S\cup B)=0.0/K=0.0$$

由此，可以得到目标行为预测的归一化信息粒度 $m_{\mathrm{pred}}^{\mathrm{App/Rec}}(\cdot)$。然后测量时刻的目标行为估计值 $m_{\mathrm{upd}}^{\mathrm{App/Rec}}(\cdot)$通过 DSm 经典组合规则由 $m_{\mathrm{pred}}^{\mathrm{App/Rec}}(\cdot)$和幅值信度赋值 $m_{\mathrm{mes}}(B)$（由新接收到的归一化模糊幅值测量值确定）得到。

$$m_{\mathrm{pred}}^{\mathrm{App/Rec}}(C)=[m_{\mathrm{pred}}^{\mathrm{App/Rec}}\oplus m_{\mathrm{mes}}](C)=\sum_{A,B\in D^{\Theta}, A\cap B=C} m_{\mathrm{pred}}^{\mathrm{App/Rec}}(A)m_{\mathrm{mes}}(B) \tag{13.4}$$

与 DST 相比，DSmT 使用一种更加全面的鉴别框架，通常情况下不具有排他

性（如在 $\Theta=\{S, B\}$ 的情况下）。我们可以考虑和利用看似自相矛盾的信息 $S\cap B$，尽管它没有得到精确的定义。在此种情况下，当移动目标驻留在中间重叠区域时，很难预测其准确的行为趋向。因此，冲突处理模型有助于更好地理解目标运动并确保在上述的情况下正确地认识目标的行为趋向。

13.4　决策准则

可根据以下过程建立模型 M＝（A）"靠近"和（R）"离开"。主观概率测量值 $P_{\text{upd}}^{\text{M}}(\cdot)$ 从广义 Pignistic 变换（GPT）[3, 6]得到，由下面给出的式子定义 $\forall A\in D^{\Theta}$。

$$P_{\text{upd}}^{\text{M}}\{A\} = \sum_{C\in D^{\Theta} \mid A\cap C\neq\varnothing} \frac{C_{\mathscr{M}^f}(C\cap A)}{C_{\mathscr{M}^f}(C)} m_{\text{upd}}^{\text{M}}(C) \tag{13.5}$$

式中：$C_{\mathscr{M}^f}(X)$ 表示 DSm 中不受约束的模型 $\mathscr{M}^f$ 中最重要的变量 X 的值。正确的预测模型 $\mathscr{M}$ 的决策准则是根据 Pignistic 熵和最新振幅状态联合计算的结果，即

$$H_{pig}^{\text{M}}(P_{\text{upd}}^{\text{M}}) \triangleq -\sum_{A\in v} P_{\text{upd}}^{\text{M}}\{A\}\ln(P_{\text{upd}}^{\text{M}}\{A\}) \tag{13.6}$$

式中：v 表示非约束 DSm 模型 $\mathscr{M}^f$ 中的维恩图（Venn）部分。k 时刻的模型估计值 $\hat{\text{M}}(k)$ 由 $H_{pig}^{\text{A}}(P_{\text{upd}}^{\text{A}})$ 和 $H_{pig}^{\text{R}}(P_{\text{upd}}^{R})$ Pignistic 熵的最小值给出。

13.5　仿真研究

非实时仿真是在 X，Y 平面坐标上研究单一目标以恒定速度运动的轨迹（图 13.3）。跟踪系统位于（0km，0km）处，目标的初始点是（$x_0=5\text{km}$，$y_0=10\text{km}$），两段轨迹的跟随速度分别是（$\dot{x}=100\text{m/s}$，$\dot{y}=100\text{m/s}$）和（$\dot{x}=-100\text{m/s}$，$\dot{y}=-100\text{m/s}$）。

采样周期为 $T=10\text{s}$。目标运动模型的动态方程是

$$x(k) = x(k-1) + \dot{x}T, y(k) = y(k-1) + \dot{y}T$$

由声纳测量的幅值 $Z_A(k)=A(k)+v_A(k)$ 服从高斯随机分布，平均值为 $A(k)=1/D(k)$，协方差是 $\sigma_A(k)$（图 13.4）。$D(k)=\sqrt{x^2(k)+y^2(k)}$ 是目标距离，$(x(k), y(k))$ 是对应的坐标向量，$v_A(k)$ 是测量噪声。在每一个测量点获得的振幅值（真实值加噪声）由图 13.1 给出的方框图处理得到。

图 13.5 和 13.6 显示了观测目标在整个运动过程中的测量结果。图 13.5 表示没有噪声的情况下的测量，即 $Z(k)=A(k)$。图 13.6 表示在有噪声的情况下的测量。上述图形显示了预测目标的行为趋向，它通过估计的振幅状态的连续变化得到。

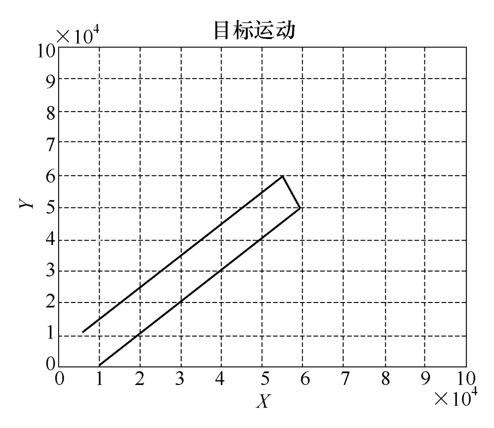


图 13.3　目标轨迹

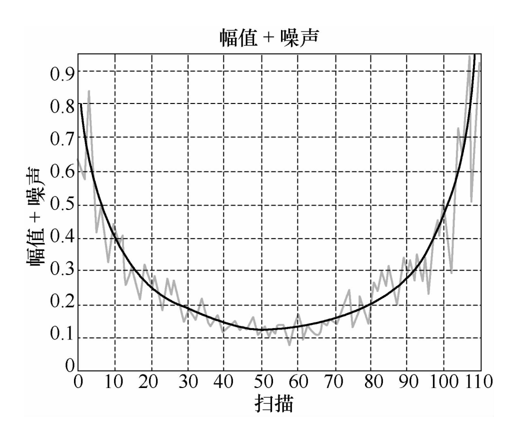


图 13.4　测量统计

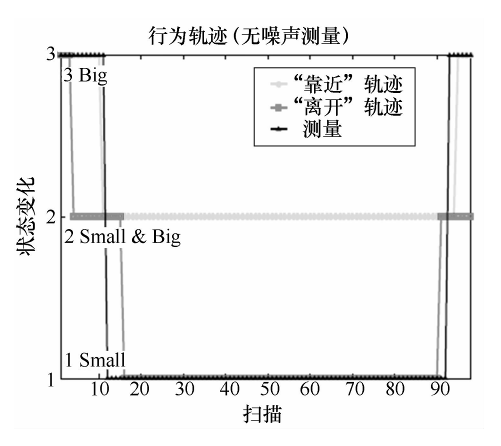


图 13.5　行为轨迹(无噪声测量)

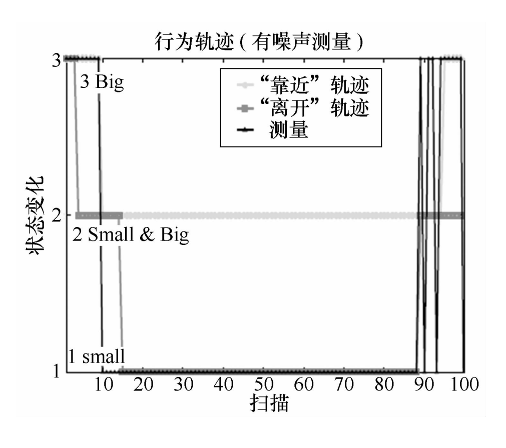


图 13.6　行为轨迹(有噪声测量)

图 13.7 显示有噪声情况下的"靠近"和"离开"模型中 Pignistic 熵随幅值状态变化的情况。它与无噪声的测量图类似,说明了选择正确模型的决策准则。由图 13.5 和图 13.7 可以看出,在第 1 次和第 15 次扫描之间的目标运动符合"靠近"模型,因为其对应的熵值最小,这意味着它更加可靠。

由于这些扫描中的测量幅值都稳定在"大"状态,"靠近"模型占主导地位,这很容易在图 13.2 所示的模糊化界面中观察出来。同时,"靠近"模型支持转变为"小"状态的重叠区域 $S\cap B$。在第 16 次和第 90 扫描次之间,由于幅值变化为最小,其振幅值稳定在"小"状态,"离开"模型成为主流。在这些扫描中,"靠近"模型对测量统计有微小的回应,处于自相矛盾的状态 $S\cap B$。令我们感兴趣和重要的是,在第 16 和第 30 次扫描之间,"靠近"和"离开"模型熵的差在逐渐增大。这一事实使我们确信"离开"模式已占据主导地位。然而,在第 75 和第 90 次扫描之间,熵的差异

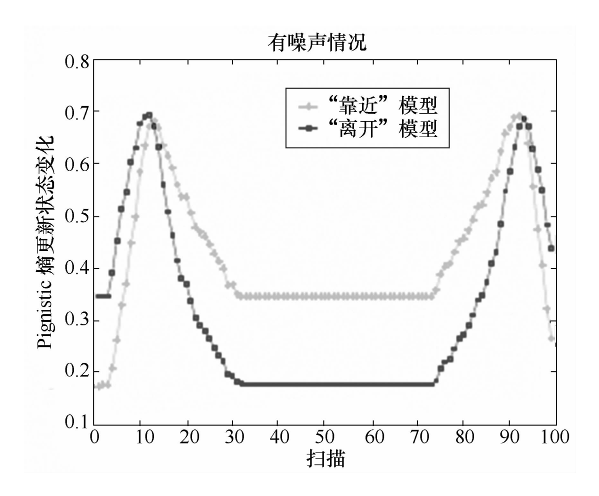


图 13.7　Pignistic 熵更新状态的演变

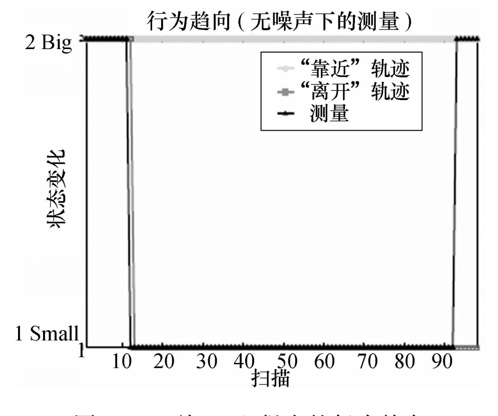
在减少，这意味着我们不能肯定"离开"模型还处于主导地位。经过转折性的第 91 次扫描，"靠近"模型开始占据主导地位，直到第 100 次扫描。总之，目标运动变化所引起的参考模型的反应不是立即的，因为整个行为的评估过程涉及含糊不清的命题"小"和"大"，在连续扫描中这幅值序列经常稳定在同一个水平。

比较图 13.5 和图 13.6 的结果，很明显，尽管估计行为趋向有些混乱，但是我们可以利用 DSmT 处理冲突的能力做一个近似准确的决定，这样有助于我们更好地理解目标行为和预测风险。

13.6　DSm 和模糊逻辑方法的比较

本节将比较在同一个仿真场景中用 DSm 理论获得的结果和模糊逻辑方法(FLA)[4, 8, 9]的结果。这两种方法的主要区别在于考虑问题的方法和更新过程。在我们的研究中运用的 DSm 组合规则是将预测状态与估计行为状态的测量相结合的结果，而模糊方法是通过两者的交集获得。从图 13.8 和图 13.9 很容易看出，我们只需处理两个命题 $\Theta=\{\text{Small}, \text{Big}\}$，不用去管重叠区域的行为趋向，只需考虑从 $S\cap B$ 到 B 或从 $S\cap B$ 到 S 的每一个可能的目标运动。

图 13.8 显示了没有噪声情况下的测量，可以看出在第 10 次和第 90 次扫描之间，目标行为由"离开"模型支持，而"靠近"模型此时根本没有反应。如果将图13.5(SDm 情况)和图 13.8 比较，可以看出，在 DSm 方法中"离开"模型更能体现目标的行为趋向，因为它有可能要处理目标从 B 运动到 $B\cap S$ 的实际情况。而在 FLA 中不可能有这种情况，在第 1 次和第 10 次扫描之间"离开"模型对目标运动到 $B\cap S$ 没有反应。图 13.9 显示了测量幅值被噪声污染的情况，此时对行为趋向很难作



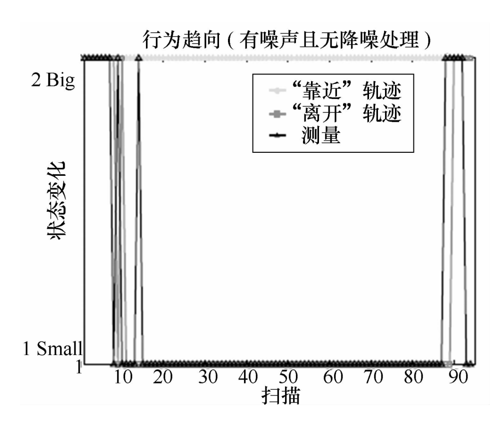


图 13.8　从 FLA 得出的行为趋向（无噪声下的测量）

图 13.9　无降噪处理时从 FLA 得到的行为趋向(有噪声的情况)

出合适的决断，尤其是在第 90 次扫描之后，"靠近"模型和"离开"模型是一致的。为了减少噪声对行为估计的影响，降噪处理可使测量更加可靠。它的应用提高了行为估计的整体效率。从 DSmT 和 FLA 的应用结果，我们可以得出如下结论：

- DSmT 和 FLA 识别框架通常涉及不精确的和模糊的情况以及 $\Theta=\{S, B\}$ 概念，但 DSmT 能够运用超幂集 $D^{\Theta}=\{S, B\cap S, B, S\cup B\}$ 来处理那些不确定和/或自相矛盾的数据。在我们的特定应用中能够在重叠区域 $S\cap B$ 灵活跟踪目标的行为变化。
- 基于 DSmT 的行为估计具有抗噪的特点，而 FLA 方法需要额外的降噪处理，以"平滑"行为估计。

13.7　结论

本章提出了一种预测目标行为趋向的方法，它将 Dezert-Smarandache 理论应用到传统的声纳测量系统，利用计算机仿真来进行评估。所提供的例子说明了 DSm 方法比模糊逻辑方法要好，在同时处理具有不确定性和自相矛盾的数据时，提供一个灵活而健全的推理方法，克服了模糊逻辑方法的局限性。在单一角度测量的情况下，DSmT 方法可确保对目标行为趋向决策的合理性。对于那些复杂的和不确定的工程问题而言，本章提出的方法无疑具有良好的应用前景。

参 考 文 献

[1] Bar-Shalom Y. (Ed.), *Multitarget-Multisensor Tracking: Advanced Applications*, Norwood, MA, Artech House, 1990.

[2] Blackman S., Popoli R., *Design and Analysis of Modern Tracking*, Artech House, 1999.

[3] Dezert J., Smarandache F., Daniel M., *The Generalized Pignistic Transformation*, Proc. of Fusion 2004 Conf., Stockholm, Sweden, June, 2004.

[4] Mendel J. M., *Fuzzy Logic Systems for Egineering: A Tutorial*, Proc. of the IEEE, pp. 345—377, March 1995.

[5] Shafer G., *A Mathematical Theory of Evidence*, Princeton Univ. Press, Princeton. NJ, 1976.

[6] Smarandache F. Dezert J. (Editors), *Advances and Applications of DSmT for Information Fusion (Collected Works)*, American Research Press, 2004.

[7] Tchamova A., Semerdjiev T., Dezert J., *Estimation of Target Behavior Tendencies using Dezert-Smarandache Theory*, Proc. of Fusion 2003 Conf., Cairns, Australia, July 8—11, 2003.

[8] Zadeh L., *Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility*, Fuzzy Sets and Syst. 1, pp. 3—28, 1978.

[9] Zadeh L., *From Computing with Numbers to Computing with Words-From Manipulation of Measurements to Manipulation of Perceptions*, IEEE Trans. on Circuits and Systems 45,1, pp. 105—119. Jan. 1999.

第 14 章　杂波环境中多目标跟踪的广义数据关联[①]

A. Tchamova，T. Semerdjiev，
P. Konstantionova
Institute for Parallel Processing
Bulgarian Academy of Sciences
'Acad. G. Bonchev'，Str.，bl. 25-A，
1113 Sofia Bulgaria

Jean Dezert
ONERA
29 Av. de la Division Leclerc
92320 Châtillon
France

摘要：本章的目标是在杂波环境中，当运动学数据不足以作出正确决策时，为目标跟踪提出一种方法。该方法引入了先进的广义数据(运动学和属性)关联(GDA)的概念，以改善在复杂情况下(近地空间和/或交叉目标)的跟踪性能。它采用类全局最近邻空间方法和 Munkres 算法求解广义关联矩阵。其主要特点在于应用了 Dezert-Smarandache 理论(DSmT)中的似是而非和自相矛盾问题的推理方法来建模和处理属性数据。这种新的广义 Dezert-Smarandache 混合组合规则被用来处理与某些自由赋值栅格元素关联的完整性约束。本项研究的目的是提出与广义数据关联相关的和连贯的决策过程及改善系统的整体跟踪性能，本文的研究结果与 Dempster-Shafer 理论的相应结果进行了比较。

14.1　引言

在杂波环境中，雷达监测系统的一项重要功能就是保持并提高目标的跟踪性能。它已经成为一项重要和具有挑战性的问题，特别是在近地空间和/或交叉目标的复杂情况下。在这种现实的复杂环境下设计一个现代化的多目标跟踪(MTT)算法促进了与广义数据关联这种先进概念的融合。为了解决关联模糊并选择最好的观察-跟踪对，本研究提出了一个特殊的与 MTT 算法相结合的广义数据关联

①　本章工作部分得到勃朗峰基金(MONT：I-1205/02，I-1202/02)和卓越中心基金(BIS21：ICA1-2000-70016)的资助。

(GDA)方法。该方法将目标属性引入基于一般 Dezert-Smarandache 组合规则的关联逻辑，这种逻辑适合处理那些与现实自然因素有关的完整性约束问题。本章内容扩展了最近发表在文献[15]上的仅限于在非杂波环境中的目标跟踪研究。

14.2 跟踪过程的基本要素

跟踪过程包括两个基本要素：数据关联和跟踪过滤。第一个因素往往被视为最重要的。它的目的是把观测和现有的跟踪关联起来。

14.2.1 数据关联

为了消除不可靠的观察-跟踪对，首先在预测跟踪位置中设定一个有效区域（门限）。门限内的测量值是对应跟踪关联的候选值。

1. 门限设定

假定对零均值高斯白噪声进行测量。接收到目标 i 的测量向量 $\boldsymbol{Z}_j(k)$ 与预测向量 $\tilde{\boldsymbol{Z}}_i(k|k-1)$之间的向量差定义为残差向量（称为新息），即

$$\tilde{\boldsymbol{Z}}_{ij}(k) = \boldsymbol{Z}_j(k) - \tilde{\boldsymbol{Z}}_1(k \mid k-1)$$

残差协方差矩阵 $\boldsymbol{S}= \boldsymbol{HPH}' + \boldsymbol{R}$ 中，$\boldsymbol{P}$ 是状态预测协方差矩阵，$\boldsymbol{H}$ 是测量值矩阵，$\boldsymbol{R}$ 是测量值协方差矩阵[2, 3, 4, 5]。为标记方便，设定扫描标识 k 递减。新息的规范值定义为归一化距离函数，即

$$d_{ij}^2 = \tilde{\boldsymbol{Z}}'_{ij}\boldsymbol{S}^{-1}\tilde{\boldsymbol{Z}}_{ij}$$

定义一个门限阈值常数 γ，可得到和满足以下关系式：

$$d_{ij}^2 \leqslant \gamma \tag{14.1}$$

假设测量值向量大小是 M。d_{ij}^2 就是 M 个独立零均值高斯随机变量与单位标准偏差的平方和。因此，d_{ij}^2 有 X_M^2个分布状态，该分布状态有 M 个自由度和一个落入门限外的有效观测概率。阈值常数 γ 可以从文献[3]给出的卡-方（X_M^2）分布表中得到。

2. 广义数据关联(GDA)

如果一个单独的观测是在门限内，并且这个观测不在其他任何一个跟踪的门限中，那么该观测可以与本次跟踪关联，并被用来更新跟踪滤波器。但在密集目标环境中，当一次观测落入多目标跟踪的门限内或是多个观测落入一个目标跟踪的门限内部时，则要求额外的逻辑运算。

当属性数据可用时，其广义概率可以用来改善相应的任务。鉴于运动学和属性测量误差的独立性，由跟踪 i 得到的测量 j 的广义概率为

$$P_{\text{gen}}(i,j) = P_{\text{k}}(i,j)P_{\text{a}}(i,j)$$

其中 $P_{\text{k}}(i, j)$和 $P_{\text{a}}(i, j)$分别为运动学和属性概率。

我们的目的是选择一个任务集$\{X_{ij}\}$,其中 $i=1,2,\cdots,n,j=1,2,\cdots,m$,以保证广义概率的总和为最大值。可用下式来求解该值:

$$\min\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}X_{ij}$$

式中

$$X_{ij}\begin{cases}1 & (\text{如果测量值 } j \text{ 被赋值给跟踪 } i)\\ 0 & (\text{其他情况})\end{cases}$$

为使赋值数量最大化,如果赋值规则选择一对不符合门限的值,则该赋值在此后将被删除。

由于概率变化为 $0\leqslant P_{\text{k}}(i,j)P_{\text{a}}(i,j)\leqslant 1$,同时为满足最小化的条件,这些特别赋值的矩阵元素被定义为

$$\alpha_{ij} = 1-P_{\text{gen}}(i,j) = 1-P_{\text{k}}(i,j)P_{\text{a}}(i,j)$$

14.2.2 滤波

采用的跟踪滤波器是一阶扩展卡尔曼滤波器[7],对目标状态向量 $\boldsymbol{x}=[x,\dot{x},y,\dot{y}]'$进行滤波,其中 x 和 y 是笛卡儿坐标,$\dot{x}$ 和 $\dot{y}$ 是沿着笛卡儿坐标轴的速率;测量向量 $\boldsymbol{z}=[\beta D]'$,其中 β 为方位角(测量从北向开始),D 是从观测点到待测目标之间的距离。

测量函数 $\boldsymbol{h}(\cdot)$为(假定传感器位于坐标(0, 0)的位置)

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = [h_1(\boldsymbol{x})h_2(\boldsymbol{x})]' = \left[\arctan\left(\frac{x}{y}\right)\sqrt{x^2+y^2}\right]'$$

雅可比矩阵为[3]

$$\boldsymbol{H} = [H_{ij}] = \left[\frac{\partial h_i}{\partial x_j}\right]\ (i=1,2;j=1,\cdots,4)$$

假定为恒速目标模型,过程中噪声协方差矩阵为 $\boldsymbol{Q}=\sigma_v^2\boldsymbol{Q}_T$,其中 T 为采样周期,σ_v是过程噪声的标准偏离量,$\boldsymbol{Q}_T$ 的表达式为[8]

$$\boldsymbol{Q}_T = \text{diag}(\boldsymbol{Q}_{2*2},\boldsymbol{Q}_{2*2})\ \text{和}\ \boldsymbol{Q}_{2*2} = \begin{bmatrix}\dfrac{T^2}{4} & \dfrac{T^3}{2}\\ \dfrac{T^3}{2} & T^2\end{bmatrix}$$

测量误差矩阵 $\boldsymbol{R}=\text{diag}(\sigma_\beta^2,\sigma_D^2)$,其中 σ_β 和 σ_D 分别为方位角和距离的标准测量误差的偏离。

跟踪的初始化通过两点差分实现[7]。在收到开始两个扫描数据之后,初始状

态向量估算为 $\hat{\boldsymbol{x}}=\left[x(2)\frac{x(2)-x(1)}{T}y(2)\frac{y(2)-y(1)}{T}\right]'$，其中$(x(1),\ y(1))$和$(x(2),\ y(2))$分别为第一次和第二次扫描的目标位置，时间分别标记为 $k=1$，$k=2$。初始状态(起始时刻 $k=2$)协方差矩阵 $\boldsymbol{P}$ 赋值为

$$\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}(\boldsymbol{P}_{2*2}^{x},\boldsymbol{P}_{2*2}^{y})\ 和\ \boldsymbol{P}_{2*2}^{(\cdot)}=\begin{vmatrix}\sigma_{(\cdot)}^{2} & \dfrac{\sigma_{(\cdot)}^{2}}{T}\\ \dfrac{\sigma_{(\cdot)}^{2}}{T} & \dfrac{2\sigma_{(\cdot)}^{2}}{T^{2}}\end{vmatrix}$$

式中：指数(·)由 x 或 y 相关指数 $\sigma_D^2\sin^2(Z_\beta)+Z_D^2\sigma_\beta^2\cos^2(Z_\beta)$ 和 $\sigma_y^2\approx\sigma_D^2\cos^2(Z_\beta)+Z_D^2\sigma_\beta^2\sin^2(Z_\beta)$ 代替。Z_β 和 Z_D 是在时刻 $k=2$ 接收的测量向量的分量。

$$\boldsymbol{z}=[Z_\beta Z_D]'=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{w}\ (\boldsymbol{w}\sim\mathrm{N}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{R}))$$

14.3 属性对 GDA 的作用

观测目标与跟踪的数据数据关联是任何监视系统的一个关键技术。当运动学数据不足以作出连续的决策过程时，为了改善复杂情况下的跟踪性能，一种先进方法是与广义数据(运动学和属性)关联相结合。与动态跟踪类似，属性跟踪可以被视为随着时间推移从一个或多个传感器中获取的信息与那些不断变化的目标属性相结合的过程。属性融合的动机来源于确定目标的类型和对提高跟踪性能有重要意义的相关信息的必要性。有多种技术及概率理论可用于属性融合。这些技术和理论分析使我们相信，Dempster-Shafer 理论非常适用于不确定性证据推理，特别是在解决低冲突事件时效果良好。当冲突增加而且变得较高时(往往发生在数据关联过程中的那些事件)，Dempster 的融合规则潜在着产生不确定性的风险。为避免这种严重的风险，我们采用了 DSm 理论中属性似然函数的形式，即被用来计算数据关联假设的有效性概率的形式。有几个基本步骤来实现属性数据关联。

14.3.1 模糊界面输入

模糊界面(图 14.1)将从传感器接收的测量数值按照事先定义的输入空间的模糊划分转换到模糊集中，即识别框架 Θ。该框架包含了所有选择的特殊输入变量及其相应的隶属函数的语言值。这些模糊化的感知数据需要除以一个最佳隶属度才能得到一个合适数目的模糊集[14]。在实际应用中，这种除法有利于关联模糊集的平滑过渡和交迭。

在特定情况下，相当大的输入变量是观测目标的回波面积(RCS)。在我们的研究中，通过分析模型化 RCS 数据以确定目标的大小，然后得出观察到的目标是某种类型的飞行器(战斗机、运输机)还是虚警信号。为此，我们定义了两种识别框

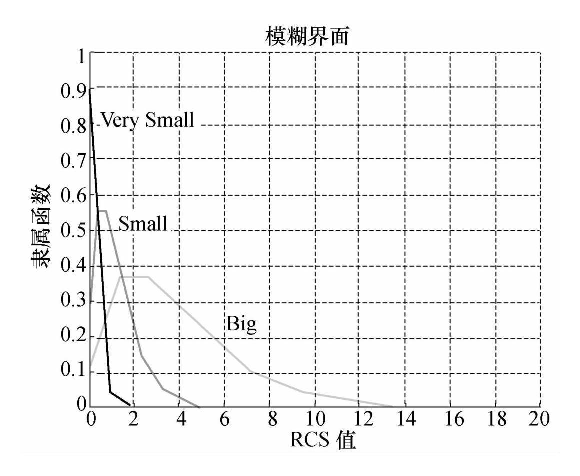


图 14.1　模糊界面

架：首先识别 RCS 的大小，$\Theta_1 = \{\text{Very Small (VS), Small (S), Big (B)}\}$；然后确定相应目标的类别，$\Theta_2 = \{\text{False Alarms (FA), Fighter (F), Cargo (C)}\}$。

根据实际目标，我们对回波面积建立了三种类型的模型，其中 RCS σ 的密度函数如下：

$$f(\sigma) = \frac{4\sigma}{\sigma_{\text{ave}}^2}\exp\left[-\frac{2\sigma}{\sigma_{\text{ave}}}\right]$$

RCS（σ_{ave}）的平均值随着目标的类型不同而改变[16]。RCS 的累积分布函数如下：

$$F(\sigma_0) = P\{0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_0\} = 1 - \left(1 + \frac{2\sigma_0}{\sigma_{\text{ave}}}\right)\exp\left[-\frac{2\sigma_0}{\sigma_{\text{ave}}}\right]$$

由于概率函数 $F(\sigma_0)$ 对具有不同回波面积值随时间均匀地分布在区间[0,1]上（即这些值在时间上无关），对 RCS 的抽样观察可以通过求解如下方程进行仿真：

$$\left(1 + \frac{2\sigma_0}{\sigma_{\text{ave}}}\right)\exp\left[-\frac{2\sigma_0}{\sigma_{\text{ave}}}\right] = 1 - x$$

式中：x 为在均匀区间[0,1]内的一个随机数。

我们工作中所考虑到的任务通过 RCS 的平均来处理目标的类型战斗机（F）和军用运输机（C）：

$$\sigma_{\text{ave}}^{\text{F}} = 1.2\text{m}^2,\ \sigma_{\text{ave}}^{\text{C}} = 4\text{m}^2$$

根据误报警回波面积可建立两种类型的模型[1]，其中 RCS 的密度函数如下：

$$f(\sigma) = \frac{1}{\sigma_{\text{ave}}}\exp\left[-\frac{\sigma}{\sigma_{\text{ave}}}\right]\ (\sigma_{\text{ave}} = 0.3\text{m}^2)$$

累计分布函数如下：

$$F(\sigma_0) = P\{0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_0\} = 1 - \exp\left[-\frac{\sigma_0}{\sigma_{\text{ave}}}\right]$$

对 RCS 观测的采样可以由解如下方程计算得到：

$$\exp\left[-\frac{\sigma_0}{\sigma_{\text{ave}}}\right] = 1 - x$$

式中：x 是一个在 0～1 之间均匀分布的随机数。

输入模糊界面将模型化的 RCS 值绘制为三个模糊集：VerySmall、Small 和 Big，其中定义了相应的语言值及变量“RCS”。其隶属函数不能被任意选取，而是依靠各自在 10000 蒙特卡罗运行下经计算后的直方图。其实这些模糊集形成了分辨力 Θ_1 的框架。模糊化后新的 RCS 值通过如下形式获得：

$$\text{rcs} \Rightarrow [\mu_{\text{VerySmall}}(\text{rcs}), \mu_{\text{Small}}(\text{rcs}), \mu_{\text{Big}}(\text{rcs})]$$

一般来说，等级 $\mu_{\text{VerySmall}}(\text{rcs})$、$\mu_{\text{Small}}(\text{rcs})$、$\mu_{\text{Big}}(\text{rcs})$ 描述了一个新的属于框架 Θ_1 的要素的概率 RCS 值，同时也没有要求把它们总和在一起。图 14.2 显示了蒙特卡罗运行 500 次时对货运机、战斗机和误报的最新观测的仿真结果，其中采用了相关功能类型 3 和 2。很显然，它们过于混杂，这就影响了二者的区分。这在实际上掩盖了融合体之间的内在冲突的可能性（目标跟踪和观测的广义基本信度赋值(gbba)），由于它们不精确的可信度函数，结果目标跟踪的效果很差。为了更好地处理这种情况，我们需要用 DSm 理论灵活并充分地处理这些冲突。

14.3.2 跟踪更新过程

1. 经典 DSm 关联规则的运用

在接收当前第 k 次扫描中检测的新的观测值后，为满足并保证它们特殊的期望赋值 $m(\cdot)$是综合信息颗粒的需求，在每次测量的一系列模糊隶属等级被融合之前很有必要将其转变成相应的质量函数。这是通过对相应实体进行标准化来实现的，即

$$m_{\text{meas}}(C) = \frac{\mu_C(\text{rcs})}{\sum_{C \in \Theta_1} \mu_C(\text{rcs})}, \quad \forall C \in \Theta_1 = \{\text{VS}, \text{S}, \text{B}\}$$

广义基本信度赋值(gbba)的跟踪过程可由如下公式描述：

$$\begin{aligned} D^{\Theta_1} = \{ & \varnothing, \text{VS}, \text{S}, \text{B}, \text{VS} \cap \text{S} \cap \text{B}, \text{VS} \cap \text{S}, \text{VS} \cap \text{B}, \text{S} \cap \text{B}, (\text{VS} \cup \text{S}) \cap \text{B}, \\ & (\text{VS} \cup \text{B}) \cap \text{S}, (\text{S} \cup \text{B}) \cap \text{VS}, (\text{VS} \cap \text{S}) \cup (\text{VS} \cap \text{B}) \cup (\text{S} \cap \text{B}), \\ & (\text{VS} \cap \text{S}) \cup \text{B}, (\text{VS} \cap \text{B}) \cup \text{S}, (\text{S} \cap \text{B}) \cup \text{VS}, \\ & \text{VS} \cup \text{S}, \text{VS} \cup \text{B}, \text{S} \cup \text{B}, \text{VS} \cup \text{S} \cup \text{B}\} \end{aligned}$$

DSm 经典关联规则(详见第 1 章)用来进行跟踪的更新,有

$$m_{\text{upd}}^{ij}(C) = [m_{\text{hist}}^{i} \oplus m_{\text{meas}}^{j}](C) = \sum_{A,B \in D^{\Theta_1}, A \cap B = C} m_{\text{hist}}^{i}(A) m_{\text{meas}}^{j}(B)$$

式中:$m_{\text{upd}}^{ij}(\cdot)$代表 gbba 的第 i 次更新路线值和第 j 次最新观测值;m_{hist}^{i}与 m_{meas}^{j}分别为 gbba 向量路线的过去第 i 次值和第 j 次最新观测值。

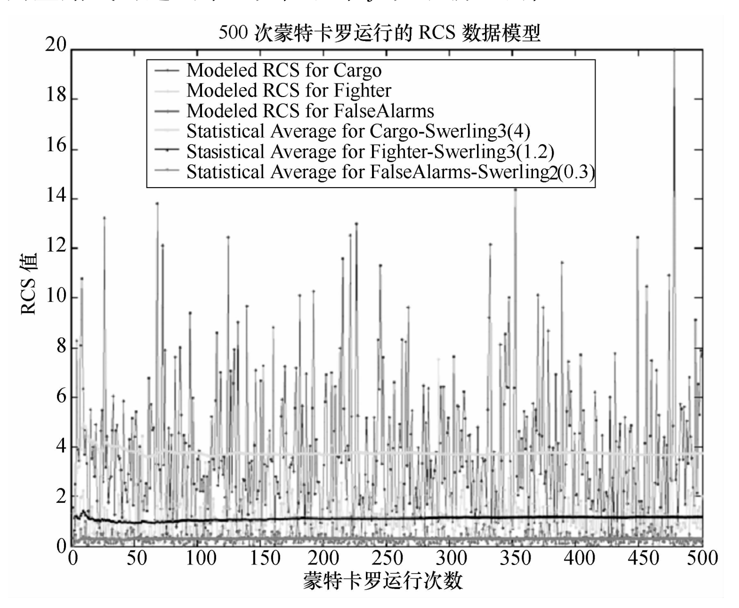


图 14.2　蒙特卡罗运行 500 次时 RCS 的仿真值

必须指出的是,对于我们来说,跟踪过程及最新观测的数据才是值得考虑的两个独立信息源。由此可以确保在所有的扫描中获取并保持根据目标类型的结果。

由于 DSmT 使用了一种很详尽但在一般情况下并不排他的识别框架,这样我们能够考虑并利用这些自相矛盾的信息 VS∩S∩B、VS∩S、VS∩B 和 S∩B。这些信息涉及以下一些情况:RCS 的值落在一个重叠的区域中,或是很难对这个值的变化趋势作出一个正确的判断。其实这些非空子集和其相关的质量测试有助于更好地理解整体跟踪过程。

2. 混合 DSm 关联规则的运用

正如上文提到的,RCS 数据主要用来分析并得出观测目标的特殊类型。因此借助识别二次框架 Θ_2={Flase,Alarm(FA),Fighter (F),Cargo(C)},可根据目标的类型作出结论。为完成这些工作,我们考虑如下相关方面:

- 如果 RCS 属于 Very Small,那么目标属于误报。
- 如果 RCS 属于 Small,那么目标属于战斗机。
- 如果 RCS 属于 Big,那么目标属于货机。

我们可以将 D^{Θ_1} 最新航迹的 gbba 分别转换为 D^{Θ_2} 的 gbba，即

$$m_{\text{upd}}^{ij}(C_{C\in D^{\Theta_2}}) = m_{\text{upd}}^{ij}(C_{C\in D^{\Theta_1}})$$

但是，当我们再去深入考虑命题中二次超幂集的意义时，它应该为

$$D^{\Theta_2} = \{\varnothing, \text{FA}, \text{F}, \text{C}, \text{FA}\cap\text{F}\cap\text{C}, \text{FA}\cap\text{F}, \text{FA}\cap\text{C}, \text{F}\cap\text{C}, (\text{FA}\cup\text{F})\cap\text{C}, (\text{FA}\cup\text{C})\cap\text{F}, (\text{F}\cup\text{C})\cap\text{FA}, (\text{FA}\cap\text{F})\cup(\text{FA}\cap\text{C})\cup(\text{F}\cap\text{C}), (\text{FA}\cap\text{F})\cup\text{C}, (\text{FA}\cap\text{C})\cup\text{F}, (\text{F}\cap\text{C})\cup\text{FA}, \text{FA}\cup\text{F}, \text{FA}\cup\text{C}, \text{F}\cup\text{C}, \text{FA}\cup\text{F}\cup\text{C}\}$$

不过在现实中，一个不争的事实就是目标不能在同一个时间为误报和战斗机，或为误报和货机，再或是误报、战斗机和货机。这就引出了混合 DSm 模型 $\mathscr{M}_1(\Theta_2)$，该模型是通过引入如下排他性约束建立的（详见第 4 章介绍的混合 DSm 模型和混合 DSm 组合规则）。

$$\text{FA}\cap\text{F}\overset{\mathscr{M}_1}{\equiv}\varnothing \quad \text{FA}\cap\text{C}\overset{\mathscr{M}_1}{\equiv}\varnothing \quad \text{F}\cap\text{C}\overset{\mathscr{M}_1}{\equiv}\varnothing \quad \text{FA}\cap\text{F}\cap\text{C}\overset{\mathscr{M}_1}{\equiv}\varnothing$$

这些排他性约束可以直接推出如下形式：

$$(\text{FA}\cup\text{F})\cap\text{C}\overset{\mathscr{M}_1}{\equiv}\varnothing \quad (\text{FA}\cap\text{F})\cup\text{C}\overset{\mathscr{M}_1}{\equiv}\text{C}$$

$$(\text{FA}\cup\text{C})\cap\text{F}\overset{\mathscr{M}_1}{\equiv}\varnothing \quad (\text{FA}\cap\text{C})\cup\text{F}\overset{\mathscr{M}_1}{\equiv}\text{F}$$

$$(\text{F}\cup\text{C})\cap\text{FA}\overset{\mathscr{M}_1}{\equiv}\varnothing \quad (\text{F}\cap\text{C})\cup\text{FA}\overset{\mathscr{M}_1}{\equiv}\text{FA}$$

更普遍的形式为

$$(\text{FA}\cap\text{F})\cup(\text{FA}\cap\text{C})\cup(\text{F}\cap\text{C})\overset{\mathscr{M}_1}{\equiv}\varnothing$$

该模型实际上与 Shafer 模型完全一致，它可以被看作是一个广义自由 DSm 模型的特例。

由于 D^{Θ_1} 内相应集合通常为非空集，又因为排他性约束，所以在二次框架 Θ_2 中，超幂集 D^{Θ_2} 减少为经典幂集，即

$$D_{\mathscr{M}_1}^{\Theta_2} = \{\varnothing, \text{FA}, \text{F}, \text{C}, \text{FA}\cup\text{F}, \text{FA}\cup\text{C}, \text{F}\cup\text{C}, \text{FA}\cup\text{F}\cup\text{C}\}$$

因此，我们必须更新以前的融合结果，这些结果是通过经典 DSm 组合规则与模型 $\mathscr{M}_1(\Theta_2)$ 的新信息相结合而得到的。它由混合 DSm 规则（详见第 4 章）解决，该规则将大量的空集传递到 $D_{\mathscr{M}_1}^{\Theta_2}$ 的非空集内。

14.4 广义数据关联算法

现在来考虑一个特定的组群并假设在当前扫描中存在 n 条轨迹和 m 个观测值。一次有效的测量应是在内部或者是目标边界的有效阈值内。不等式(14.1)是一种验证测试。它主要用来填充赋值矩阵 $\boldsymbol{A}$，即

$$\boldsymbol{A}=[A_{ij}]=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

赋值矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的元素值获取如下[13]：

$$a_{ij}=\begin{cases} \alpha & (d_{ij}^2>\gamma) \\ 1 \quad P_{\mathrm{k}}(i,j)P_{\mathrm{a}}(i,j) & (d_{ij}^2\leqslant\gamma) \end{cases}$$

赋值矩阵的解是所选择元素总和的最小值。通过扩展 Munkres 算法来解决赋值问题，该算法参见文献[10]。这样，我们就可以获得最佳的跟踪关联的测量。因为考虑交叉和/或近距离接近目标的情景，为得到概率条件 P_{k} 和 P_{a}，我们运用了连接盖然论方法[7]，这为它们的定义提供了一个共同基础，同时使得它们能够相互兼容。由于产生设想的数量和赋值问题解的时间均呈指数增长，连接盖然论数据关联(JPDA)方法在问题的规模上强加了一些约束。这就是在解决数据关联问题之前进行聚类是一种明智选择的原因。组群是一系列近距离的物体。在我们的案例中，如果两条轨迹在它们的门限重叠区内进行观测，它们就形成了组群，即它们的组合在一起了。如此一来，组群的数量将小于等于被跟踪的航迹的数量。至少有以下两个原因显示了组群的优越性：

(1) 组群赋值矩阵的大小和得到它的解的时间减少了；

(2) 对 JPDA 假设的数量而言，诸如运动学定义和属性的概率同样会减少。

最坏的情况就是所有的 m 次测量值均落入所有的 n 条轨迹的有效区域内，此时假设的数量可以定义为

$$S(n,m)=\sum_{i=0}^{\min(n,m)} C_m^i A_n^i$$

式中

$$C_m^i \triangleq \frac{m!}{i!(m-i)!} \quad (0\leqslant i\leqslant m) \text{ 和 } A_n^i \triangleq \frac{n!}{(n-i)!} \quad (0\leqslant i\leqslant n)$$

通过这些公式，在 m 和 n 取不同值时假设的数量见表 14.1。可以看到假设数目的增长速度是很惊人的。

表 14.1 最坏情况的假设数量

	假设		假设		假设
$n=2,m=2$	7	$n=4,m=4$	209	$n=6,m=6$	13327
$n=2,m=3$	13	$n=4,m=5$	501	$n=7,m=8$	394353
$n=3,m=3$	34	$n=5,m=5$	1546	$n=10,m=9$	58941091
$n=3,m=4$	73	$n=5,m=6$	4051	$n=10,m=10$	234662231

进一步改进。首先运用 k 最优方法[12]减少假设的数量，使得大量的假设实际上不影响结果。另一个最初的假设架构也已经被优化了[9]，因此它成为 Murty 方法的一个实用的选择。

为了在不同的情景下定义数据关联的概率并使用随机的误报数，我们在每次扫描中采用如下步骤：

(1) 检查门限：利用接收到的观测值和跟踪的目标（当前所跟踪的）以及每一个信息对（第 i 次跟踪和第 j 次观测）的信息来检验不等式（14.1）。由于一个数组表示了每次观测，结果使观测的门限下降。

(2) 构建组群：将那些落入门限内的轨迹和观测定义为组群。

(3) 对于每个组群：

① 在一定的约束下[17]，根据深度优先搜索（DFS）程序生成假设。针对一个实际的事例，JPDAF 方法中必须满足该事例的如下两个约束：

a) 每次观测只能有一个激励源（特定的目标或是杂波）；

b) 一个目标只能有一次观测。

由于每个假设产生一组数字，代表了相应的观测值并赋给了相应的轨迹，其中零代表没有观测到特定的轨迹。

② 计算运动学和属性的假设概率（详见下一节）。

③ 构建赋值矩阵，解决赋值问题，定义跟踪关联的观测。

14.4.1 广义数据关联的运动学概率

在已定义的假设的基础上，运动学概率计算如下：

$$P'(H_l) = \beta^{N_M-(N_T-N_{nD})}(1-P_d)^{N_{nD}} P_d^{(N_T-N_{nD})} \prod_{i\neq 0, j\neq 0 \mid (i,j)\in H_l} g_{ij}$$

式中：N_M 为组群中观测的数目；N_T 为目标的数目；N_{nD} 为未探测到的目标的数目。乘积项中相关的 $(i, j) \in H_l$，其表示在假设 H_l 中所有轨迹关联的可能的观测。观测 j 到轨迹 i 的赋值的似然函数为

$$g_{ij} = \frac{e^{-d_{ij}^2/2}}{(2\pi)^{M/2}\sqrt{|\boldsymbol{S}_i|}}$$

P_d 为检测的概率；β 为外部返回密度，包括最新轨迹和误报的概率密度，有

$$\beta = \beta_{NT} + \beta_{FA}$$

归一化概率计算如下：

$$P_{\mathrm{k}}(H_l) = \frac{P'(H_l)}{\sum_{k=1}^{N_{\mathrm{H}}} P'(H_k)}$$

式中：N_H 为假设的数量。为了计算概率 $P_{\mathrm{k}}(i, j)$，应将观测 j 赋值给轨迹 i，对假

设 H_l 计算概率 $P_k(\cdot)$ 的和，产生赋值。

一个由两条轨迹和两次新的观测组成的组群的特例详见图 14.3，它是在近地空间运动瞬间探测到的，其中 $P1$ 和 $P2$ 为轨迹的预测值，$O1$ 和 $O2$ 为接收到的观测值。表 14.2 给出了目标跟踪和关联概率选择的特定假设。

表 14.2　基于运动学的目标导向假设

假 设	轨 迹 1	轨 迹 2	假设概率 $P'(H_l)$
H_1	0	0	$(1-P_d)^2\beta^2$
H_2	1	0	$g_{11}P_d(1-P_d)\beta$
H_3	2	0	$g_{12}P_d(1-P_d)\beta$
H_4	0	1	$g_{21}P_d(1-P_d)\beta$
H_5	0	2	$g_{22}P_d(1-P_d)\beta$
H_6	1	2	$g_{11}g_{22}P_d^2$
H_7	2	1	$g_{12}g_{21}P_d^2$

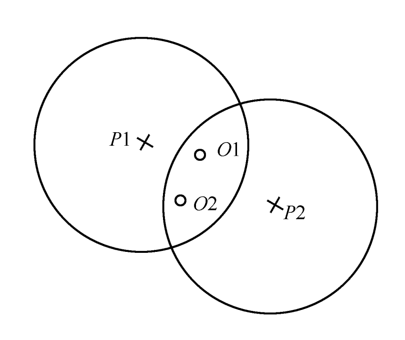


图 14.3　具有两条轨迹和两个观测的情形

14.4.2　广义数据关联的属性概率

计算属性概率可用如下的连接盖然论算法：

$$P''(H_l) = \prod_{i\neq 0,\, j\neq 0 \mid (i,j)\in H_l} d_e(i,j)$$

式中

$$d_e(i,j) = \sqrt{\sum_{C\in D^{\Theta_1}} [m_{\text{hist}}^{i}(C) - m_{\text{CandHist}}^{ij}(C)]^2}$$

$m_{\text{CandHist}}^{ij}(C)$为跟踪结果的候选历史值，它由 DSm 经典规则与新接收到的观测 j 的属性值和轨迹 i 的属性状态的预测（以前扫描中得到的确定的轨迹历史值）融合在一起后获得。

在存在两条轨迹和两次新的观测的情况下，考虑前面章节内容并在假设矩阵的基础上，根据表 14.3 可以得到假设的概率。

表 14.3 基于属性的目标导向假设

假设	轨迹 1	轨迹 2	测量接近度
H_1	0	0	$P''(H_1)=d_e(0,0)=0$
H_2	1	0	$P''(H_2)=d_e(1,1)$
H_3	2	0	$P''(H_3)=d_e(1,2)$
H_4	0	1	$P''(H_4)=d_e(2,1)$
H_5	0	2	$P''(H_5)=d_e(2,2)$
H_6	1	2	$P''(H_6)=d_e(1,1)d_e(2,2)$
H_7	2	1	$P''(H_7)=d_e(1,2)d_e(2,1)$

对应的由属性信息得到的归一化关联概率可通过下式计算得到：

$$P_{\mathrm{a}}(H_l)=\frac{P''(H_l)}{\sum_{k=1}^{N_H}P''(H_k)}$$

式中：N_H 为关联假设的数量。

为了计算概率 $P'_{\mathrm{a}}(i,\ j)$，应将观测 j 得到的数值赋给轨迹 i，由假设 H_l 计算概率 $P_{\mathrm{a}}(\cdot)$的总和，完成赋值过程。由于欧几里得距离随着关联概率的变化而呈反比的变化，因此概率条件 $P_{\mathrm{a}}(i,\ j)=1-P'_{\mathrm{a}}(i,\ j)$ 用来匹配相应的运动学概率。

14.5 仿真实验

14.5.1 仿真情景 1:交叉目标

仿真情景包括两个空中目标(战斗机和货机)和一个固定的传感器，其初始条件设为 $T_{\mathrm{scan}}=5\mathrm{s}$，方位角和距离的测量误差分别为 0.3°和 60m。目标以 250m/s 匀速由西向东运动。以北为基准，战斗机和货机的方位角分别为 225°和 315°。在第 11 次到第 14 次扫描中目标的机动性为 $2.5g$，在两个交叉点附近它们的轨迹比较靠近，如图 14.4 所示。两个目标的目标探测概率均设为 0.99，外部返回密度 β 设为 10^{-6}。在设定的情景中，我们还考虑了更为复杂的情况，即误报设为有效。误报呈 Poisson 分布，它们的位置也均匀地分布在观测区间内。

14.5.2 仿真情景 2:近距离目标

第二种仿真情景是受到 Bar-Shalom、Kirubarajan 和 Gogberk 最新研究工

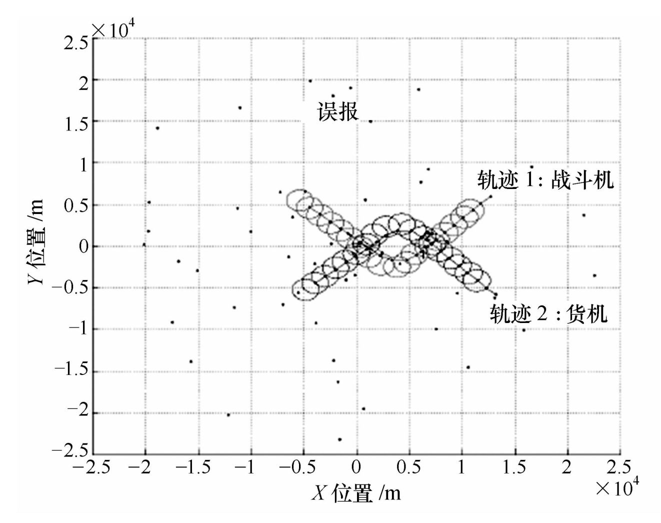


图 14.4　情景 1 的典型事例仿真——两个交叉目标的轨迹

作[6]的启发,该项研究考虑了低空并平行移动的目标的情况。在这种情况中,有四个空中目标(战斗机、货机、战斗机、货机的交替情况),它们以 100m/s 匀速行进。以北为基准,初始的方位角为 155°。目标的机动性为 0.85g(右转、左转、右转)。传感器参数和误报分布与情景 1 相同,如图 14.5 所示。

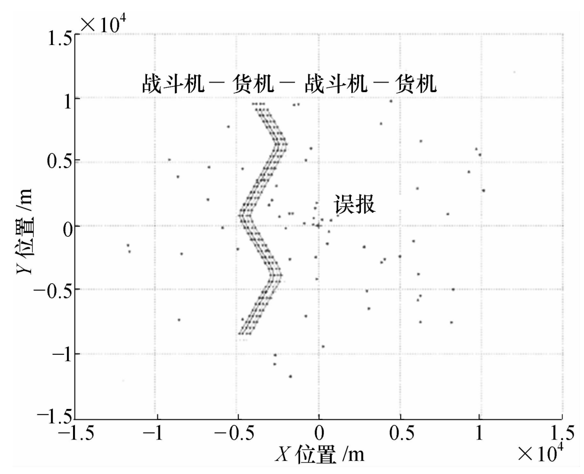


图 14.5　情景 2 的典型事例仿真——四个近距离空中目标的轨迹

14.6　仿真结果

本节主要介绍基于 100 次蒙特卡罗运行的仿真结果,目的就是论证跟踪改进后的属性测量是如何工作的,特别是在轨迹交叉和/或近距离的临界情况下。

14.6.1 两个交叉目标的仿真结果

在只考虑采用运动学数据的数据关联(图 14.6)的情形时，很明显，在 15 次扫描之后(两个目标的第二次交叉后)，跟踪运算已经失去了目标的正确方向。

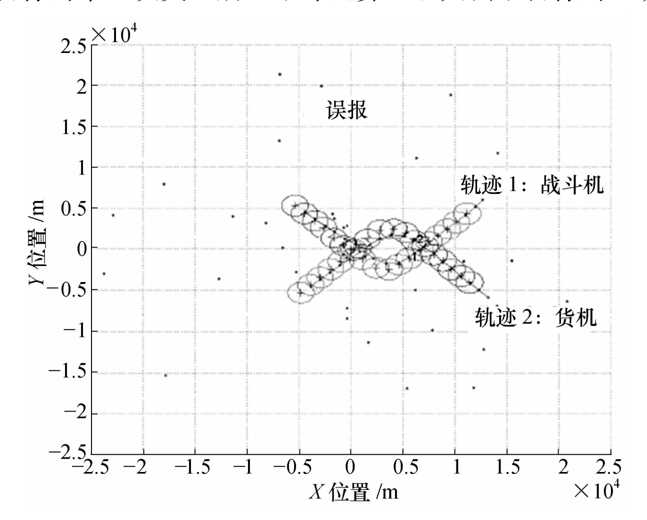


图 14.6　仅用运动学数据关联的跟踪性能(一)

这里跟踪的“纯度性能标准”主要用来检查正确关联率。跟踪纯度表示跟踪期间在总的有效观测次数上目标观测关联的正确次数(假设发现目标)。

表 14.4 显示了这种情况中的正确关联(观测—跟踪)。表中“Missed”(遗漏)表示在轨迹的门限值内没有观测到目标的情况，“FA”表示跟踪中加入误报的情况。

表 14.4　只用运动学数据关联(KODA)情况下的跟踪纯度

	观测 1	观测 2	Missed	FA
轨迹 1	0.7313	0.2270	0.0304	0.0113
轨迹 2	0.2409	0.7035	0.0426	0.0130

表 14.5 显示了为改善跟踪的保持性能而在广义数据关联算法中利用属性数据的结果。混合 DSm 规则用来产生在广义赋值矩阵中的属性概率。因此，跟踪纯度有着显著的增长。

表 14.5　基于 DSmT 的广义数据关联的跟踪纯度

	观测 1	观测 2	Missed	FA
轨迹 1	0.8252	0.1496	0.0165	0.0087
轨迹 2	0.1557	0.8243	0.0165	0.0035

14.6.2 四个近距离目标的仿真结果

图 14.7 显示了仅用运动学数据关联的跟踪性能。可以看到,这四个平行移动的近距离目标迷失了其正确的运动方向和跟踪转向。

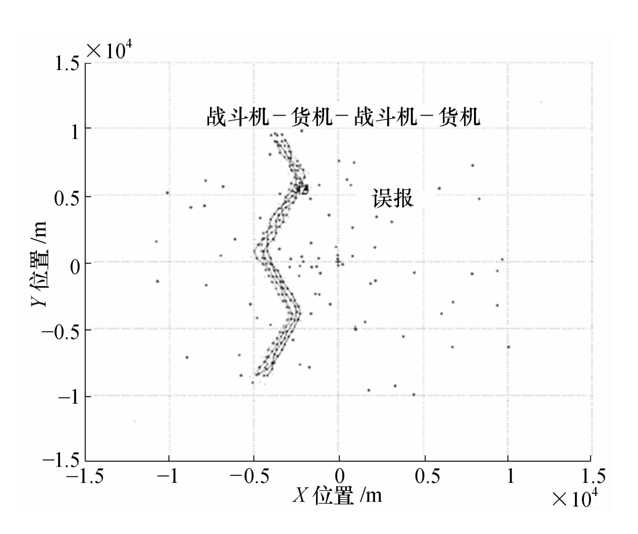


图 14.7 仅用运动学数据关联的跟踪性能(二)

表 14.6 显示了在这种情况下的正确关联(观测—跟踪)的结果。表 14.7 显示了基于 DSmT 的 GDA 情况的相应结果。

表 14.6 仅用运动学数据关联的跟踪纯度

	观测 1	观测 2	观测 3	观测 4	Missed	FA
轨迹 1	0.5874	0.3321	0.0558	0.0216	0.0021	0.0011
轨迹 2	0.2895	0.5411	0.1126	0.0521	0.0021	0.0026
轨迹 3	0.1089	0.0874	0.5084	0.2916	00021	0.0016
轨迹 4	0.0126	0.0332	0.3168	0.6337	0.0005	0.0032

表 14.7 基于 DSmT 的 GDA 的跟踪纯度

	观测 1	观测 2	观测 3	观测 4	Missed	FA
轨迹 1	0.7026	0.2437	0.0037	0.0216	0.0026	0.0005
轨迹 2	0.2253	0.5826	0.0584	0.0521	0.0016	0.0000
轨迹 3	0.0511	0.0853	0.6047	0.2563	0.0011	0.0016
轨迹 4	0.0189	0.0853	0.2121	0.6805	0.0016	0.0016

14.6.3 基于 Dempster-Shafer 理论的 GDA 仿真结果

基于 Dempster-Shafer 理论的属性数据关联的结果见表 14.8 和表 14.9。表 14.8 显示了情景 1(两个交叉目标)的跟踪纯度。表 14.9 显示了情景 2(四个近距离目标)的跟踪纯度。

表 14.8 基于 Dempster-Shafer 理论的 GDA 的跟踪纯度(两个交叉目标)

	观测 1	观测 2	Missed	FA
轨迹 1	0.7548	0.1609	0.0643	0.0200
轨迹 2	0.2209	0.7548	0.0174	0.0070

表 14.9 基于 Dempster-Shafer 理论的 GDA 的跟踪纯度(四个近距离目标)

	观测 1	观测 2	观测 3	观测 4	Missed	FA
轨迹 1	0.5874	0.2679	0.1211	0.0174	0.0016	0.0047
轨迹 2	0.2511	0.5489	0.1268	0.0700	0.0011	0.0021
轨迹 3	0.1216	0.1058	0.5926	0.1742	0.0021	0.0037
轨迹 4	0.0374	0.0711	0.1505	0.6563	0.0005	0.0042

14.7 实验结果的比较分析

从以上仿真结果容易看出,一般来说先进的广义数据关联理论可以改善跟踪的保持性能,特别是在复杂的情况下(杂波环境中的近距离和/或交叉的目标)提高了跟踪纯度。我们可以看到,相比利用 Dempster-Shafer 理论,跟踪纯度在运用 Dezert-Smarandache 理论后有所提高。在对仿真结果进行分析时,需要强调以下几个方面:

- Dezert-Smarandache 理论使我们可以灵活地分析、处理和利用所有自相矛盾的信息,如在杂波环境中多目标跟踪时,大量证据之间的冲突(跟踪的属性过程和对应的属性测量)经常会变得严重和危急。DSmT 理论有助于我们更好地理解整体的跟踪形势并做出恰当的决定。在处理似是而非和自相矛盾的证据(这是一种更为特殊的超幂集)时,(通过正确的跟踪—观测关联)确定的跟踪属性过程熵的估计值随着持续的扫描不断降低。通过图 14.8 可以看到,Pignistic 熵(即香农熵,它是由信度质量得到的 Pignistic 概率[15],[11])是由框架 $\Theta_1 = \{$VerySmall (VS), Small (S), Big (B)$\}$和对应的超幂集 D^{Θ_1} 估算得到(见图 14.8 上面子图中的曲

线)。仿真过程显示,证据源是混乱的(自相矛盾和不确定的)。与此同时,由框架 $2\Theta_2=\{$False Alarm (FA), Fighter (F), Cargo (C)$\}$描述的跟踪属性历史平均信息量(熵)在增加(见图 14.8 下面子图的红色曲线)。这可用混合 DSm 模型 $\mathscr{M}_1(\Theta_2)$来解释,该模型的建立引入了排他性约束,根据实际需求得到强加(见 14.3.2 节)。所获取的模型实际上与 Shafer 模型一致,只不过 Shafer 模型是混合 DSm 模型(约束性最强的模型)的一个特例。因此,在 D^{Θ_1} 中对应的集合通常为非空,由于排他性约束,在框架 $2(\Theta_2)$中超幂集降低为

$$D^{\Theta_2}_{\mathscr{M}_1}=\{\varnothing,\mathrm{FA},\mathrm{F},\mathrm{C},\mathrm{FA}\cup\mathrm{F},\mathrm{FA}\cup\mathrm{C},\mathrm{F}\cup\mathrm{C},\mathrm{FA}\cup\mathrm{F}\cup\mathrm{C}\}$$

很显然,在该框架内跟踪属性历史代表了不确定信息源,由于所有的质量被赋值到 D^{Θ_2} 的空集中使其成为非空集,因此连续扫描中的不确定平均信息量在增加,在我们的示例中事实上是传递了不确定信息。

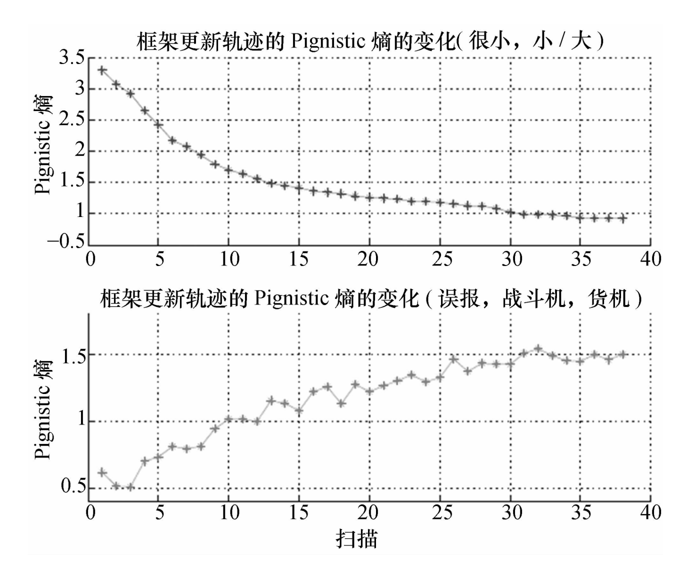


图 14.8 跟踪属性过程中的 Pignistic 熵在框架 Θ_1 和 Θ_2 中的变化

- 在 Swerling 的建模中,误报、战斗机和货机的观测过于混杂,因此导致产生证据源一般基本信度赋值之间的冲突。当冲突变得一致时,它将导致 Dempster 联合规则的不确定性,最终导致融合过程不可实现。从另一方面看,如果收到的模型测量导致跟踪属性的更新,其实体被赋给一些特殊的元素假设,在这一点上,Dempster 联合规则在接下来的扫描中的其他测量就变得无关紧要。这意味着跟踪属性过程保持不变,而不管收到的观测值如何。这自然导致对正确的观测—跟踪关联不一致和不恰当的结果。

14.8 结论

本章的主要工作是提出目标跟踪的方法，结合了广义数据关联的先进概念(运动学和属性)。实现算法是类全局最近邻空间方法，用 Munkres 算法求解广义关联矩阵。由于属性数据的使用，我们应用了 Dezert-Smarandache 理论的似是而非而又自相矛盾的原理。尤其是新的广义混合 DSm 联合规则被用来处理那些与自由分布格元素关联的特殊的完整性约束。与采用 Dempster-Shafer 理论获得的相应结果进行了比较，结果表明，Dempster-Shafer 理论非常适合描述证据体之间处于低冲突情况下的不确定性，然而在复杂的情况下(交叉和/或近距离目标)，当运动学数据不足以给出正确的决策时，Dezert-Smarandache 理论对跟踪保持性能的改善效果显著，同时保证了决策的灵活性和连续性。

参考文献

[1] Angelova D., Vassileva B., Semerdjiev Tz., *Monte Carlo-based Filter for Target Tracking with Feature Measurement*, Proceedings of the Fifth International Conference on Information Fusion, July 8-11, Annapolis, Maryland, USA, pp. 1499-1505, 2002.

[2] Bar-Shalom Y., *Multitarget-Multisensor Tracking: Advanced Applications*, Artech House, 1990.

[3] Bar-Shalom Y., Fortmann T., *Tracking and Data Association*, Academic Press, 1988.

[4] Bar-Shalom Y., Li X.-R., *Estimation and Tracking: Principles, Techniques and software*, Artech House, 1993.

[5] Bar-Shalom Y., Li X,-R., *Multitarget-multisensor tracking: Principles and techniques*, YBS, 1995.

[6] Bar-Shalom Y., Kirubarajan T., Gokberk C. *Classification-Aided Sliding-Window MHT: Solution with Multidimensional A ssignment*, ESP Lab, University of Connecticut (Presentation Slides HT Workshop: A Tribute to Sam Blackman, San Diego, CA, May 2003 /May 20, 2003).

[7] Blackman S., *Multitarget tracking with Radar Apllications*, Artech House, 1986.

[8] Blackman S., Popoli R., *Design and Analysis of Modern Tracking Systems*, Artech House, 1999.

[9] Bojilov, L. V., *An improved version of a Multiple Targets Tracking Algorithm*, Information & Security, An International Journal, vol. 9, 2002, pp. 130-140.

[10] Bourgeois F., Lassalle J. C., *An Extension of the Munkres Algorithm for the Assignment Problem to Rectangular Matrices*, Communications of the ACM, Vol. 14, Dec. 1971, pp. 802-806.

[11] Dezert J., Smarandache F., Daniel M., *The Generalized Pignistic Transformation*, Proceedings of Fusion 2004. Stockholm, Sweden, June 28th-July 1th, 2004.

[12] Murty K. G., *An Algorithm for Panking All the Assignment in Order of Inereasing Cost*, Operations Research 16, pp. 682-687, 1968.

[13] Popp R., L., Pattipati K. R., Bar-Shalom Y., *Dynamically Adaptable m-Best 2-D Assignment Algo-*

rithm and Multilevel Parallelization, IEEE Trans. on AES, Vol. 35, No. 4, Oct. 1999.

[14] Mendel J. M., *Fuzzy Logic Systems for Egineering: A Tutorial*, Proceedings of the IEEE, March 1995, pp. 345-377.

[15] Tchamova A., Dezert J., Semerdjiev Tz., Konstantinova P., *Target Tracking with Generalized Data Association based on the General DSm Rule of Combination*, Proceedings of Fusion 2004, Stockholm, Sweden, June 28th-July 1th, 2004.

[16] Watson G., Blair W. D., *Benchmark Problem for Radar Resource Allocation and Tracking Maneuvering Targets in the presence of ECM*, Technical Report NSWCDD/TR-96/10, 1996.

[17] Zhou B., Bose N. K., *Multitarget Tracking in Clutter: Fast Algorithms for Data Association*, IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems, vol. 29, No 2, pp. 352-363, April 1993.

第 15 章　Blackman 数据关联问题[①]

Jean Dezert
ONERA
29 Av. de la Division Leclerc
92320 Châtillon, France

Florentin Smarandache
Department of Mathematics
University of New Mexico
Gallup, NM 8730, U. S. A.

Albena Tchamova
Institute for Parallel Processing
Bulgarian Academy of Sciences
Sofia, Bulgaria

摘要:现代多目标—多传感器跟踪系统涉及数据关联和多传感器信息融合,以及观测与轨迹的明确区分。本章讨论和比较 Dempster-Shafer 理论(DST)和 Dezert-Smarandache 理论(DSmT)两种方法在目标识别多传感器属性融合中的应用。本章特别关注 Blackman 的自相矛盾数据关联问题,提出若干种优于 Blackman 解的方法,阐明采用资源之间的冲突度作为隐含的证据分类标准的概念。

15.1　引言

数据关联问题在现代多目标—多传感器跟踪系统中的地位举足轻重。当数据不确定并且以基本信度质量建模、资源冲突时,任务将变得十分困难。通常采用的方法是基于 Dempster-Shafer 理论(DST)[9],因为它提供了一种精妙的理论来联合不确定信息。然而,Dempster 联合规则有可能会提升那些自相矛盾的和异常的数据,对于一些特定的关联问题无法得到准确的解。这个问题已经被 Samuel Blackman 指出了[2]。这个领域亟待研究,我们提出了一个新的对 Blackman 关联问题(BAP)的分析,并且采用经典的基于 DST 的方法(包括 Blackman 方法)来解

---

① 本章是在 2003 年 7 月在澳大利亚凯恩斯召开的国际信息融合会议上发表的论文[4]的基础上重新整理后的内容,该项工作得到了国际信息融合学会的允许。

决原始的 BAP 问题。在本章的第二部分，我们提出了基于 DSmT 的新方法，并与基于自由 DSm 模型的方法进行比较。本章的最后通过蒙特卡罗仿真结果给出了所有方法的性能比较。

15.2 Blackman 数据关联问题

15.2.1 关联问题 1

先回顾一下原始的 Blackman 关联问题[2]。考虑只有两个目标特征的最简单的辨识框架 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2\}$，以及对于单特征观察 Z 及其两个跟踪（T_1 和 T_2）的关联/分配问题。假设下面的预测基本信度赋值(bba)为两条轨迹的相应特征：

$$m_{T_1}(\theta_1)=0.5 \quad m_{T_1}(\theta_2)=0.5 \quad m_{T_1}(\theta_1\cup\theta_2)=0$$

$$m_{T_2}(\theta_2)=0.1 \quad m_{T_2}(\theta_2)=0.1 \quad m_{T_2}(\theta_1\cup\theta_2)=0.8$$

假设从系统的特征观察 Z 中得到了下面新的基本信度赋值：

$$m_Z(\theta_1)=0.5 \quad m_Z(\theta_2)=0.5 \quad m_Z(\theta_1\cup\theta_2)=0$$

我们的目标在于研究一种通用的方法，以预测值$\{m_{T_i}(\cdot),\ i=1,2\}$来获得正确的特征值 $m_Z(\cdot)$。上式中 $m_Z(\cdot)$和 m_{T_1} 完全吻合，但是和 m_{T_2} 不吻合，因此最优解很显然应当为 $m_Z(\cdot)\leftrightarrow m_{T_1}(\cdot)$的映射。我们的任务就是要找到一种唯一、通用和可靠的方法来解决这类特定问题以及其他可能的关联问题。

15.2.2 关联问题 2

为了比较潜在的问题，我们将修改上述问题的形式。保留 m_{T_1} 和 m_{T_2} 的基本信度赋值预测函数不变，而将 $m_Z(\cdot)$的基本信度赋值函数改为

$$m_Z(\theta_1)=0.1 \quad m_Z(\theta_2)=0.1 \quad m_Z(\theta_1\cup\theta_2)=0.8$$

现在 $m_Z(\cdot)$和 m_{T_2} 完全吻合，因此最优解变为 $m_Z(\cdot)\leftrightarrow m_{T_2}(\cdot)$的映射。下面的章节将详细说明如何尝试去解决这些 BAP 问题，不仅仅是上述这两种特定的问题，而是所有由于噪声数据而导致基本信度赋值函数 $m_Z(\cdot)$不能完全吻合任一预测基本信度赋值函数$\{m_{T_i}(\cdot),\ i=1,2\}$的通用问题。

15.3 问题的解

我们尝试了许多通用关联问题的解决方法。

15.3.1 最简单的方法

解决 BAP 问题的最简单的方法，很意外地没有被 Blackman 在文献[2]中列

出。这种方法就是采用预测值 $m_{T_i}(\cdot)$ 和观测值 $m_Z(\cdot)$ 之间的经典最小距离准则。经典的 L^1（曼哈顿距离）或者 L^2（欧式距离）都是常用的距离算法。这些简单的准则显然能在大多数情况下得出准确的关系，包括理想的（自由噪声）观测值 $m_Z(\cdot)$。但是对某些数字案例就找不到最优解了。比如下面的情况：

$$m_{T_1}(\theta_1)=0.4 \quad m_{T_1}(\theta_2)=0.4 \quad m_{T_1}(\theta_1\cup\theta_2)=0.2$$
$$m_{T_2}(\theta_1)=0.2 \quad m_{T_2}(\theta_2)=0.2 \quad m_{T_2}(\theta_1\cup\theta_2)=0.6$$
$$m_Z(\theta_1)=0.3 \quad m_Z(\theta_2)=0.3 \quad m_Z(\theta_1\cup\theta_2)=0.4$$

从上面的基本信度赋值可以得出 $d_{L^1}(T_1,Z)=d_{L^1}(T_2,Z)=0.4$（或者 $d_{L^2}(T_1,Z)=d_{L^2}(T_2,Z)\approx 0.24$），无法得到可靠的结果。虽然最小冲突方法（详见下一节）可以给出一个结果 $Z\leftrightarrow T_2$，在这种情况下，证明该方法的正确性并不比其他方法明显。在实际中更重要的不仅是关联解本身[2]，还有特征似然函数 $P(Z|T_i)\equiv P(Z\leftrightarrow T_i)$。虽然我们知道许多似然函数（指数、超指数、卡方、韦伯分布等）可以以 $d_{L^1}(T_i,Z)$（或 $d_{L^2}(T_i,Z)$）的形式建立，但是我们通常并不知道哪一个符合真实的属性似然函数。

15.3.2 最小冲突法

第一个解决关联问题的方法是由 Blackman 提出的。采用 Dempster 联合规则[9] $m_{T_iZ}(\cdot)=[m_{T_i}\oplus m_Z](\cdot)$，定义 $m_{T_iZ}(\theta)=0$，对于任意 $C\neq\varnothing$ 和 $C\subseteq\Theta$ 有

$$m_{T_iZ}(C)=\frac{1}{1-k_{T_iZ}}\sum_{A\cap B=C}m_{T_i}(A)m_Z(B)$$

选择对应的最小冲突 k_{T_iZ} 的解。该方程式的和覆盖了所有的 $A,B\subseteq\Theta$，因此 $A\cap B=C$。m_{T_i} 和 m_Z 之间的冲突度由 $\sum_{A\cap B=\varnothing}m_{T_i}(A)m_Z(B)\neq 0$ 定义。显而易见，对于特征似然函数的一个直观的选择为 $P(Z|T_i)=1-k_{T_iZ}$。如果对问题 1 应用 Dempster 规则，两种关联将得到同样的结果，即 $m_{T_iZ}(\cdot)=m_{T_2Z}(\cdot)$，其中 $m_{T_iZ}(\theta_1)=m_{T_iZ}(\theta_2)=0.5(i=1,2)$ 且 $m_{TZ}(\theta_1\cup\theta_2)=0$。出人意料的是，正确的赋值（$Z\leftrightarrow T_1$）并不是由资源最小冲突给出的，因为其中一个（$k_{T_iZ}=0.5$）>（$k_{T_2Z}=0.1$）。这样，就有可能从最小冲突准则中获得如直观预期那样的第一个 BAP 的正确解。同样的准则也能给我们提供第二个问题的正确解，因为（$k_{T_2Z}=0.02$）<（$k_{T_1Z}=0.1$）。第二个问题的组合基本信度赋值为：$m_{T_1Z}(\theta_1)=m_{T_1Z}(\theta_2)=0.5$，$m_{T_2Z}(\theta_1)=m_{T_2Z}(\theta_2)=0.17347$，$m_{T_2Z}(\theta_1\cup\theta_2)=0.65306$。

15.3.3 Blackman 方法

为了解决这个明显的异常，Samuel Blackman 在文献[2]中提出了一种相对特征似然函数，即

$$L(Z \mid T_i) \triangleq (1 - k_{T_i Z}^{\min})$$

式中：$k_{T_i Z}^{\min}$是在理想赋值（当$m_Z(\cdot)$和$m_{T_i}(\cdot)$吻合时）情况下，观察值Z或者轨迹T_i的最小冲突因子。通过采用这种相对似然函数，可以得到问题1的表示，即

$$\begin{cases} L(Z \mid T_1) = \dfrac{1-0.5}{1-0.5} = 1 \\ L(Z \mid T_1) = \dfrac{1-0.1}{1-0.02} = 0.92 \end{cases}$$

采用第二个Blackman方法，就得到了一个与第一个赋值关联的较大的似然（这样，第一个问题的正确赋值就能通过基于最大似然准则来获得了），但是这两个似然值的差异非常小。如S. Blackman所述[2]，这个问题需要进行更多的研究，我们也要尝试一下其他的方法。有趣的是这些方法也同样解决不了问题2，因为相应的似然函数变为

$$\begin{cases} L(Z \mid T_1) = \dfrac{1-0.1}{1-0.5} = 1.8 \\ L(Z \mid T_1) = \dfrac{1-0.02}{1-0.02} = 1 \end{cases}$$

这意味着对问题2而言，最大似然解给出了一个错误的赋值（$m_Z(\cdot) \leftrightarrow m_{T_1}(\cdot)$）。

15.3.4 Tchamova方法

依照15.3.1节的思路，Albena Tchamova最近在文献[3]中提出采用预测基本信度赋值$m_{T_i}(\cdot)$和最新的/组合的基本信度赋值$m_{T_i Z}(\cdot)$间的L^1距离（曼哈顿距离）$d_1(T_i, T_i Z)$或L^2距离（欧式距离）$d_2(T_i, T_i Z)$来度量赋值的密集度，即

$$d_{L^1}(T_i, T_i Z) = \sum_{A \in 2^\Theta} |m_{T_i}(A) - m_{T_i Z}(A)|$$

$$d_{L^2}(T_i, T_i Z) = \left[\sum_{A \in 2^\Theta} [m_{T_i}(A) - m_{T_i Z}(A)]^2\right]^{1/2}$$

这个准则也是选择最小距离作为解。该方法是从稳态卡尔曼滤波（KF）类推得来的，因为如果$z(k+1)$和$\hat{z}(k+1|k)$对应于$k+1$时刻的测量值和预测值，那么卡尔曼滤波的更新方程[1]为$\hat{x}(k+1|k+1) = \hat{x}(k+1|k) + K(x(k+1) - \hat{z}(k+1|k))$，其中，假设动态矩阵表达式是一致的。当$z(k+1)$和预测值$\hat{z}(k+1|k)$相等时，即$\hat{x}(k+1|k+1) \equiv \hat{x}(k+1|k)$，就到达了稳态。在本文中，$m_{T_i}(\cdot)$表示预测态，$m_{T_i Z}(\cdot)$表示更新态。这样，在紧密度/距离准则下，当$m_{T_i Z}(\cdot)$趋近于$m_{T_i}(\cdot)$时，先验知识就能获得正确的赋值。然而，蒙特卡罗仿真结果证明了这种方法并不如我们预期的那样有效。

有趣的是，Tchamova的方法在两种距离准则下（$(d_{L^1}(T_1, T_1 Z) = 0) < (d_{L^1}(T_2, T_2 Z) \sim 1.60)$且$(d_{L^2}(T_1, T_1 Z) = 0) < (d_{L^2}(T_2, T_2 Z) \sim 0.98)$）都能够得

出问题 1 的正确解，却得不出问题 2 的正确解（$(d_{L^1}(T_2, T_2Z) \sim 0.29) > (d_{L^1}(T_1, T_1Z)=0)$ 且 $(d_{L^2}(T_2, T_2Z) \sim 0.18) > (d_{L^2}(T_1, T_1Z)=0)$）。

15.3.5 熵方法

下面检验一些类熵方法的结果。我们打算采用最小跟踪类熵值（表达为 nats，比如自然数基础下约定 $0\log(0)=0$）作为决策准则。

- 扩展类熵值：

$$H_{\text{ext}}(m) \triangleq -\sum_{A\in 2^\Theta} m(A)\log(m(A))$$

- 泛化类熵值[5,8]：

$$H_{\text{gen}}(m) \triangleq -\sum_{A\in 2^\Theta} m(A)\log(m(A)/\mid A\mid)$$

- Pignistic 熵：

$$H_{\text{bet}P}(m) \triangleq -\sum_{\theta_i\in\Theta} P\{\theta_i\}\log(P\{\theta_i\})$$

其中 Pignistic(betting)概率函数为

$$\forall\,\theta_i \in \Theta,\; P\{\theta_i\} = \sum_{B\subseteq\Theta\mid\theta_i\in B} \frac{1}{\mid B\mid} m(B)$$

很容易证明，通过联合基本信度赋值（$m_{T_i}(\cdot)$ 或者 $m_{T_iZ}(\cdot)$）进行计算的最小熵准则（基于上述公式）是不能得到问题 1 的正确解的，因为对 $m_{T_2Z}(\cdot)$ 而言 $m_{T_1Z}(\cdot)$ 是不可辨识的。对于问题 1，我们可以得到 $H_{\text{ext}}(m_{T_1Z}) = H_{\text{ext}}(m_{T_2Z}) = 0.69315$，$H_{\text{gen}}$ 和 $H_{\text{bet}P}$ 的值也差不多，因为对于这个特定问题，更新基本信度赋值里不含有不确定性因素。如果我们再去检查问题 2 的解，就会发现最小熵准则仍然不能得到正确的解，无论是基于 H_{ext}、H_{gen} 还是 $H_{\text{bet}P}$，这是因为 $H_{\text{ext}}(m_{T_2Z}) = 0.88601 > H_{\text{ext}}(m_{T_1Z}) = 0.69315$，$H_{\text{gen}}(m_{T_2Z}) = 1.3387 > H_{\text{gen}}(m_{T_1Z}) = 0.69315$ 以及 $H_{\text{bet}P}(m_{T_2Z}) = H_{\text{bet}P}(m_{T_2Z}) = 0.69315$。

第一个结果表明基于绝对类熵的方法都不能解决 BAP 问题，由于 m_Z 可能来源于最小的信息源，因此无法决定哪个是绝对最小类熵值的正确赋值。这个关联解实际上与每一个信息源都不独立。

另一个解决思路是用最小熵的变化值作为判断准则。这样就可以检验 $\{\Delta_1(\cdot), \Delta_2(\cdot)\}$ 中的最小值，其中变化值 $\Delta_i(i=1,2)$ 分别有以下几种表示。

- 扩展熵的变化值：

$$\Delta_i(H_{\text{ext}}) \triangleq H_{\text{ext}}(m_{T_iZ}) - H_{\text{ext}}(m_{T_i})$$

- 泛化熵的变化值：

$$\Delta_i(H_{\text{gen}}) \triangleq H_{\text{gen}}(m_{T_iZ}) - H_{\text{gen}}(m_{T_i})$$

- Pignistic 熵的变化值：

$$\Delta_i(H_{\text{bet}P}) \triangleq H_{\text{bet}P}(m_{T_iZ}) - H_{\text{bet}P}(m_{T_i})$$

只有第二个准则——也就是 $\min(\Delta_i(H_{\text{gen}}))$——能够得出问题 1 的正确解；但是没有一个准则能得出问题 2 的正确解。

最后一种思路是采用 Pignistic 概率的相对变化的最小值作为判断准则。公式如下：

$$\Delta_i(P) \triangleq \sum_{j=1}^{2} \frac{|P_{T_iZ}(\theta_j) - P_{T_i}(\theta_j)|}{P_{T_i}(\theta_j)}$$

式中：$P_{T_iZ}(\cdot)$和 $P_{T_i}(\cdot)$分别是由 $m_{T_iZ}(\cdot)$和 $m_{T_i}(\cdot)$经 Pignistic 变换得到。遗憾的是，这个准则既不能得到问题 1 的解，也不能得到问题 2 的解，因为 $\Delta_1(P)=\Delta_2(P)=0$。

15.3.6 Schubert 方法

现在来看一下采用基于元冲突函数的 Dempster-Shafer 聚类方法（MC-DSC）会发生什么情况。这个方法由 Johan Schubert 提出[6,8]，用来解决关联问题 1 和 2。DSC 方法是一种在 Dempster 准则中采用冲突作为距离量，来进行不确定数据聚类的方法[7]，其基本思想是通过冲突而不是命题事件来分离/分类证据。由于篇幅限制，这里只介绍经典 MC-DSC 方法的基本原则。

假设给定一个证据集（基本信度赋值 bba），$E(k) \triangleq \{m_{T_i}(\cdot), i=1,\cdots,n\}$位于指定序列 k 上（空间、时间或其他），而新的基本信度赋值的证据集 $E(k+1) \triangleq \{m_{Z_j}(\cdot), j=1,\cdots,m\}$位于序列 $k+1$ 上。表达序列 $k+1$ 所有信息的证据完全集为$x=E(k)\cup E(k+1) \triangleq \{e_1,\cdots,e_q\} \equiv \{m_{T_i}(\cdot),\ i,\cdots,n, m_{Z_j}(\cdot), j=1,\cdots,m\}$，其中 $q=n+m$。现在的问题就变为了寻找 χ 在互斥子集的最优分类/赋值，这样就能以一种连贯有效的方式联合每一个 χ_p 的信息。首先，将对应于同一个子集 χ_p 的基本信度赋值联合为新的基本信度赋值，称为 $m_p(\cdot)$，对应的冲突因子为 k_p。第二步，在证据元级，冲突因子 k_p 与新辨识框架 $\Theta=\{\text{AdP}, -\text{Adp}\}$有关，其中 AdP 表示合理分类。对于研究的每一个子集 $\chi_p(p=1,\cdots,P)$，新的基本信度赋值(bba)定义为

$$m_{\chi_p}(-\text{AdP}) \triangleq k_p \text{ 与 } m_{\chi_p}(\Theta) \triangleq 1-k_p$$

基于 Dempster 规则，这些元级基本信度赋值 $m_{\chi_p}(\cdot)$联合为一个全局基本信度赋值：

$$m(\cdot) = m_{\chi_1}(\cdot) \oplus \cdots \oplus m_{\chi_P}(\cdot)$$

对应的元冲突因子表示为 $\text{Mcf}(\chi_1,\cdots,\chi_P) \triangleq k_{1,\cdots,P}$。元冲突因子很容易通过冲突因子 k_p 来计算[6]，元冲突函数(MCF)表达式如下：

$$\mathrm{Mcf}(\chi_1, \cdots, \chi_P) = 1 - \prod_{p=1}^{P}(1 - k_p) \tag{15.1}$$

通过最小化元冲突函数(比如搜索所有的可能取值),我们直观上希望找到最优/正确的分类,这样就很可能解决我们的关联问题。让我们回到非常简单的关联问题 1 和 2,并用 MC-DSC 方法来检验一下结果。

关联问题的有效信息可表示为 $\chi = \{m_{T_i}(\cdot), m_{T_2}(\cdot), m_Z(\cdot)\}$。检验 χ 的所有可能分类以及相应的元冲突因子,得出下面结论(基于最小元冲突原则)。

(1) 问题 1 的分析

① 基于 Dempster 规则,(正确)分类为 $\chi_1 = \{m_{T_1}(\cdot), m_Z(\cdot)\}$, $\chi_2 = \{m_{T_2}(\cdot)\}$。其中子集 χ_1 的冲突因子为 $k_1 \triangleq k_{T_iZ} = 0.5$,子集 χ_2 的冲突因子为 $k_2 = 0$,因此 χ_2 根本没有联合(没有冲突)。参照式(15.1),元冲突的值为

$$\mathrm{Mcf}_1 = 1 = (1 - k_1)(1 - k_2) = 0.5 \equiv k_1$$

② (错误)分类为 $\chi_1 = \{m_T(\cdot)\}$, $\chi_2 = \{m_{T_2}(\cdot), m_Z(\cdot)\}$。此时,子集 χ_1 的冲突因子 $k_1 = 0$,子集 χ_2 的冲突因子 $k_2 = 0.1$。元冲突值为

$$\mathrm{Mcf}_2 = 1 = (1 - k_1)(1 - k_2) = 0.1 \equiv k_2$$

③ 由于 $\mathrm{Mcf}_1 > \mathrm{Mcf}_2$,元冲突函数的最小值将给出错误的赋值,因此 MC-DSC 方法无法得出问题 1 的解。

(2) 问题 2 的分析

① 基于 Dempster 规则,(错误)分类为 $\chi_1 = \{m_{T_1}(\cdot), m_Z(\cdot)\}$, $\chi_2 = \{m_{T_2}(\cdot)\}$。其中子集 χ_1 的冲突因子为 $k_1 \triangleq k_{T_iZ} = 0.1$,子集 χ_2 的冲突因子为 $k_2 = 0$,因此 χ_2 根本没有联合(没有冲突)。参照式(15.1),元冲突的值为

$$\mathrm{Mcf}_1 = 1 = (1 - k_1)(1 - k_2) = 0.1 \equiv k_1$$

② (正确)分类为 $\chi_1 = \{m_T(\cdot)\}$, $\chi_2 = \{m_{T_2}(\cdot), m_Z(\cdot)\}$。此时,子集 χ_1 的冲突因子 $k_1 = 0$,子集 χ_2 的冲突因子 $k_2 = 0.02$。元冲突值为

$$\mathrm{Mcf}_2 = 1 = (1 - k_1)(1 - k_2) = 0.02 \equiv k_2$$

③ 由于 $\mathrm{Mcf}_2 < \mathrm{Mcf}_1$,这种情况下,元冲突函数的最小值将赋给问题 2 的正确解。

从这个简单的例子,我们可以发现一个有趣的现象,Schubert 方法实际上完全等于(在上述情况下)最小冲突方法(见 15.3.2 节),因此无法提供更好的结果。我们也可以看到,已知 $m_{T_i}(\cdot)$ 和 $m_{T_2}(\cdot)$,如果同时考虑对应于问题 1 和 2 的两个观测基本信度赋值 $m_{Z_1}(\cdot)$ 和 $m_{Z_2}(\cdot)$,Schubert 方法仍然会失败。如果采用最小元冲突函数,那么将得到错误的结果,因为分类 $\{(Z_1, T_2), (Z_2, T_1)\}$ 是错误的。同时,考虑到各自的信度函数,这个结果和我们的直觉期望 $\{(Z_1, T_1), (Z_2, T_2)\}$ 是矛盾的。

15.4 BAP 的 DSmT 方法

在 DST 中，有许多方法可以尝试解决 BAP 问题（Blackman's Association Problem），第一种尝试是基于新的扩展类熵 $H_{\text{ext}}^{*}(m_{T_iZ})$中 i 的最小值或 $H_{\text{bet}P}^{*}(P^{*})$的最小值。这两种方法实际上都由于基于 DST 的最小熵准则而失效。

第二种尝试是将新的类熵方差最小值作为选择依据。这种新的扩展类熵为

$$\Delta_i(H_{\text{ext}}^{*})=H_{\text{ext}}^{*}(m_{T_iZ})-H_{\text{ext}}^{*}(m_{T_i})$$

或随之产生的 Pignistic 熵：

$$\Delta_i(H_{\text{bet}P}^{*})=H_{\text{bet}P}^{*}\{P^{*}\{|\ m_{T_iZ}\ |\}-H_{\text{bet}P}^{*}(P^{*}\{\bullet|\ m_{T_i}\})$$

$\Delta_i(H_{\text{ext}}^{*})$的最小值给了我们问题 1 的错误结果 $\Delta_1(H_{\text{ext}}^{*})=0.34657$ 和 $\Delta_2(H_{\text{ext}}^{*})=0.30988$。而 $\Delta_i(H_{\text{bet}P}^{*})$的最小值则给了我们正确的结果 $\Delta_1(H_{\text{bet}P}^{*})=-0.3040$ 和 $\Delta_2(H_{\text{bet}P}^{*})=-0.0960$。遗憾的是，$\Delta_i(H_{\text{ext}}^{*})$和 $\Delta_i(H_{\text{bet}P}^{*})$准则都不能提供问题 2 的正确结论 $\Delta_1(H_{\text{ext}}^{*})=0.25577<\Delta_2(H_{\text{ext}}^{*})=0.3273$ 和 $\Delta_1(H_{\text{bet}P}^{*})=-0.0396<\Delta_2(H_{\text{bet}P}^{*})=-0.00823$。

第三种方法是利用 θ_1 和 θ_2 的 Pignistic 概率相对变化最小值为准则，第 i 个的相对偏差定义为

$$\Delta_i(P^{*})=\sum_{j=1}^{2}\frac{|P_{T_iZ}^{*}(\theta_j)-P_{T_i}^{*}(\theta_j)|}{P_{T_i}^{*}(\theta_j)}$$

第三种方法不能得到问题 1 的正确结果（$\Delta_1(P^{*})=0.333>\Delta_2(P^{*})=0.268$），但可得到问题 2 的正确结果（$\Delta_1(P^{*})=0.053<\Delta_2(P^{*})=0.066$）。

最后方法是基于 Pignistic 条件概率的相对变化，该准则可以用下式的最小值来定义：

$$\delta_i(P^{*})=\sum_{j=1}^{2}\frac{|\Delta_i(P^{*}\ |\ Z)-\Delta_i(P^{*}\ |\ Z=T_i)|}{\Delta_i(P^{*}\ |\ Z=T_i)}$$

该方法可得到问题 1 的正确结果 $\delta_1(P^{*})=|0.333-0.333|/0.333=0<\delta_2(P^{*})=|0.268-0.053|/0.053\approx 4$，同时也可得到问题 2 的正确结果（$\delta_2(P^{*})=|0.053-0.053|/0.053=0<\delta_1(P^{*})=|0.066-0.033|/0.033\approx 0.8$）。

15.5 蒙特卡罗仿真

从以上两种 BAP 问题可以发现，要找到解决无噪声（m_z）条件下的 BAP 和包含噪声属性基本信度赋值 $m_z(\cdot)$的一般意义上的 BAP 的通用方法是十分困难

的。已经提出的方法只对原始的 BAP 问题进行了验证，因而我们不能从前面给出的分析中得到最有效方法的一般性结论。前面方法的总体性能/效率可以用蒙特卡罗仿真来便捷地进行估计。我们的蒙特卡罗仿真采用了 50000 个独立规则，并分别对无噪声情况（其中，$m_z(\cdot)$与$m_{t1}(\cdot)$或$m_{t2}(\cdot)$精确匹配）和两种含噪声情况（其中，$m_z(\cdot)$不与任何一个先验 bba 匹配）进行了操作。两种噪声水平（低和中）被用于含噪声情况的测试。基本规则包括随机产生两个先验基本信度赋值$m_{T_1}(\cdot)$和$m_{T_2}(\cdot)$，以及根据随机赋值$m_z(\cdot)\to m_{T_1}(\cdot)$ 或 $m_z(\cdot)\to m_{T_2}(\cdot)$获得的基本信度赋值$m_z(\cdot)$。然后对本章介绍的所有关联准则的正确赋值百分率进行评估。完全无噪声情况下的观测$m_z(\cdot)$由下列过程产生（其中，$A_1\triangleq\theta_1$，$A_2\triangleq\theta_2$ 且 $A_2\triangleq\theta_1\cup\theta_2$）：$m_Z^{\text{noisy}}(A_i)=\alpha_i m_Z(A_i)/K$，其中 K 为标准常数，如 $\sum_{i=1}^{3} m_Z^{\text{noisy}}(A_i)=1$，权重系数 $\alpha_i\in[0;1]$由 $\alpha_i=1/3\pm\varepsilon_i$ 给出，如 $\sum_{i=1}^{3}\alpha_i=1$。

表 15.1 给出了所有已研究准则在无噪声（NF）、低噪声（LN）、中等噪声（MN）三种情况下蒙特卡罗仿真的结果。前两行是最简单的方法，后 12 行是基于 DST 的方法。

表 15.1　各种关联方法的成功率（%）

关联准则	NF	LN	MN
Min $d_{L^1}(T_i,Z)$	100	97.98	92.14
Min $d_{L^2}(T_i,Z)$	100	97.90	92.03
Min k_{T_iZ}	70.01	69.43	68.77
Min $L(Z\|T_i)$	70.09	69.87	67.86
Min $d_{L^1}(T_i,T_iZ)$	57.10	57.41	56.30
Min $d_{L^2}(T_i,T_iZ)$	56.40	56.80	55.75
Min $H_{\text{ext}}(m_{T_iZ})$	61.39	61.68	60.85
Min $H_{\text{gen}}(m_{T_iZ})$	58.37	58.79	57.95
Min $H_{\text{bet}P}(m_{T_iZ})$	61.35	61.32	60.34
Min $\Delta_i(H_{\text{ext}})$	57.66	56.97	55.90
Min $\Delta_i(H_{\text{gen}})$	57.40	56.80	55.72
Min $\Delta_i(H_{\text{bet}P})$	71.04	69.15	66.48
Min $\Delta_i(P)$	69.25	68.99	67.35
Min $\mathrm{M_C f}_i$	70.1	69.43	68.77

表 15.2 给出了基于 DSmT 的方法在无噪声（NF）、低噪声（LF）、中等噪声（MF）三种情况下蒙特卡罗仿真的结果。

表 15.2　基于 DSmT 方法的成功率(%)

Assoc. Criterion	NE	LN	MN
Min $H^{*}_{\text{ext}}(m_{T_i Z})$	61.91	61.92	60.79
Min $H^{*}_{\text{bet}P}(P^{*})$	42.31	42.37	42.96
Min $\Delta_i(H^{*}_{\text{ext}})$	67.99	67.09	65.72
Min $\Delta_i(H^{*}_{\text{bet}P})$	42.08	42.11	42.21
Min $\Delta_i(P^{*})$	76.13	75.3	72.80
Min $\delta_i(P^{*})$	100	90.02	81.31

15.6　结论

本章提出了一种新的 BAP 问题的测试方法。许多方法被提出并通过蒙特卡罗仿真进行了比较。实验结果表明,通用的最小偏差方法在一般情况下不是总能提供最好的结果(特别是最短距离方法)。元冲突方法与最小偏差法一样,也不能达到最优。Blackman 的方法和最小偏差法表现出相同的性能。所有基于熵的方法均不如最小偏差法有效。更有趣的是,从基于 Pignistic 熵的方法的结果可以看出,基于熵的方法实际上似乎并不适合解决 BAP 问题,因为没有基本的推论来证明其有效。除了基于熵的方法外,最小距离方法是所有方法中性能最低的方法。蒙特卡罗仿真的结果表明,只有建立在 DSmT(和 DSm 模型)上的基于 Pignistic 概率相对变化的方法表现出优于其他的方法。基于 DSmT 和混合 DSm 规则的分析正在研究中。

参 考 文 献

[1] Bar-Shalom Y., Li X. R., Estimation and Tracking: Principles, Techniques, and Software, Artech House, 1993.

[2] Blackman S., Association and Fusion of Multiple Sensor Data, Chap. 7 of Multitarget-Multisensor Tracking: Advanced Applications, (Y. Bar-Shalom Editor), Artech House, 1990.

[3] Dezert J., Fondations pour une nouvelle théorie du raisonnement plausible et paradoxal, ONERA Tech. Rep. RT 1/06769/DTIM, Jan. 2003.

[4] Dezert J., Smarandache F., Tchamova A., On the Blackman's association problem, Proc. of Fusion 2003 Conf., Cairns, Australia, July 8-11, 2003.

[5] Pal N. R., Bezdek J. C., Henasinha R., Uncertainty measure for evidential reasoning II: A new measure of total uncertainty, Int. J. of Intell. Syst., 8(1), pp. 1-16, 1993.

[6] Schubert J. , On Nonspecific Evidence, Int. J. of Intell. Syst. Vol. 8, pp. 711-725, 1993.

[7] Schubert J. , Robust Report Level Cluster-to-Track Fusion, Proc. of 5th Int. Conf. on Inf. Fusion, pp. 913-918, Annapolis, July 2002.

[8] Schubert J. , Clustering belief functions based on attracting and conflicting metalevel evidence, Proc. of IPMU conf. , Annecy, France, July 1-5, 2002.

[9] Shafer G. , A Mathematical Theory of Evidence, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1976.

第 16 章　情景分析的中智框架

Anne-Laure Jousselme and Patrick Maupin
Defence R & D Canada - Valcartier
Decision Support Systems
2459，Pie XI Blvd North
Val-Bélair，QC，G3J 1X5，CANADA

摘要:在情景分析中,一个现场观测的智能体从一个不同类的信源(如远程传感器、人的报告和数据库等)接受一系列信号。我们的目标是让智能体对情景达到一定的认识水平,从而根据当前情景做出相应决定。为了方便应用,智能体的这种意识可以被认为是典型认知逻辑尝试中的知识。考虑到信仰和知识间的逻辑联系,设计者需要面对的问题是将从不同信源收到的未经加工的、不精确的、冲突的而且经常似是而非的信息转化为一种人和机器都能明白的陈述。情景分析需要一个足够大的框架,这样足以考虑到分析过程中的不同种类的不确定的语言。本章的目的是对中智逻辑和 Dezert-Smarandache 理论对处理实体和认知问题的能力进行评估。

16.1　引言

情景分析(SA)的目的是在决策过程中为现场观测智能体[1,2]提供一种情景意识并保持这种意识。为了达到应用的目的,这种意识可以被认为是古典认识逻辑常识中的知识。考虑到信仰和知识之间的逻辑联系,设计者面临的挑战是如何将从不同信源收到的未经加工的、不精确的、冲突的而且似是而非的信息转化成人和机器都能明白的语言。信源的种类有很多,包括远程传感器、人的报告和数据库,因此以下两个工序必须同时进行——测量数据和解释数据——以说明系统所处的状态。情景分析中的一个难题是调节数学和逻辑框架中的数量和质量信息。因此,情景分析的实施需要一个足够全面的框架来考虑不同类型的不确定性以及情景分析中的不同种类的信息,同时需要双倍的语义来定义一系列信仰、知识和情

况。形式上应该包括多智能体系统，在这样的系统里意识分散在几个机构中而不是局部。

基于世界语义学对信仰和知识多智能体方面的解释，文献[3]提出了一个合乎逻辑的做法。考虑到它允许处理数值评价概率，从而分开对待并将信仰、知识和不确定性联系起来，Halpern 和 Moses 的工作可以作为一个蓝本。Fagin 和 Halpern[4]以及 Bundy[5]一起做了相关工作，将 Nilsson[6]的基于可能世界语义学更宽泛的一个接近证据理论（该理论是 Dempster[7]和 Shafer[8]的成果）的概率结构进行了扩展。其结果是，在一个单一的框架中，测量和推理达到一种调和状态。

独立于这些工作之外，我们介绍一下 Neutrosophy。中智理论是研究平衡和矛盾，以及观念及其对立面关系的哲学分支[9]。Neutrosophy 中有两个主要的逻辑方法：一是中智逻辑，作为一个统一的逻辑，包括模糊逻辑、经典逻辑和其他特殊情况[10, 11]；二是 Dezert-Smarandache 理论，可以看作是 Dempster-Shafer 理论的一般化。一方面，中智逻辑是 SA 过程中的一条有趣的途径，因为：(1)不确定是由明确的不确定赋值来表述的；(2)真、假以及不确定是相互独立的（三个不同的赋值）；(3)这是一个量化逻辑，意味着真、假以及不确定可以用数值来表示；(4)这种量化需要一个高度真实的间隔，这种间隔是真实数字间隔的一般化，可提供更广的解释框架；(5)定义了许多新的连接（Neut-A，Anti-A，…）。在另一方面，这一框架在测量时考虑到了更大范围内的不同的事件，从而扩展了 Dezert-Smarandache 理论。事实上，SA 的一个特殊性是，在很多时候不可能事先列出事件可能出现的各种情况。因此，论域中的元素不能详尽地反映所有的情况。此外，在 SA 中，情景并非论域中清晰明确的元素。

本章的主要内容是中智逻辑和 DSmT，对其在应对 SA（见 16.3 节）中实体的和认知上的障碍（即由于事物属性和对智能体、人力和人工认识局限造成的问题）的潜力进行评估。16.4 节主要介绍在实践中指导 SA 系统设计的四条基本原则，并强调中智逻辑和 DSmT 应对这些原则的能力。在 16.5 节中正式讨论可信度的正式描述之后，16.6 节提出基于 Kripke 结构和 Demspter-Shafer 结构的不同扩展。特别是，16.6.2 节提出解决中智命题的 Kripke 结构。在接下来的一节中，我们将评估用可能域的语义来处理可信度和知识中的一些符号的或数字的表述问题。此外，在一些情景建模的可能域的语义表示中，我们还将研究中立和对立这一对中智概念的表征。16.6.3 节介绍 Nilsson 结构和 Dempster-Shafer 结构，然后提出 DSmT 的一个可能的扩展。我们举一个例子来说明扩大论域的好处，证明 DSmT 在处理 SA 中不确定性问题时是个很好的建模工具。接下来，我们提出 DSmT 和 Kripke 结构中的中智逻辑的一种可能的联系（见 16.6.4 节）。最后，16.7 节对在 SA 中用 DSmT 和中智逻辑的可能方法进行总结。

16.2 情景分析

“Situation”这一术语源于 14 世纪中期的拉丁语“situatio”，表示处于一个特定的位置。到了 17 世纪中期，situation 一词则用来讨论人的道德品质、人所处的特定的环境以及人与环境之间的联系。正如接下来我们将看到的，对于“situation”，后一种定义更接近我们今天在高级别数据融合领域中的该词的意思。“situation”可以有以下一些意思：setting，case，circumstances，condition，plight，scenario，state，picture，state of affairs.

尽管“situation”这一概念在现今的非正式的日常用语中更多用来表示一个给定的事件，对世界的简化见解，甚至是特定物体的位置，但是在高级别数据融合领域中，“situation”作为一个核心概念，已经有了一个比较正式的定义。在 Pew[12] 看来，“situation”是指“一组环境条件和系统状态，其中参与者之间的相互作用可以用一套独特的信息来描述”。

16.2.1 作为一种精神状态的情景认知

Endsley 和 Garland[1] 认为，情景认知(SAW)“是一定时间和空间的环境中元素的认知能力，对元素意义的理解以及对其在将来状况的规划”。在文献[13]中，SAW 也被定义为“在实现一项具体任务的目标的背景下，在认知系统中被激活的当前认知功能情况中的积极心理表征”。具体来说，SAW 包含三个关键任务：(1)感知；(2)理解；(3)规划(图 16.1)。

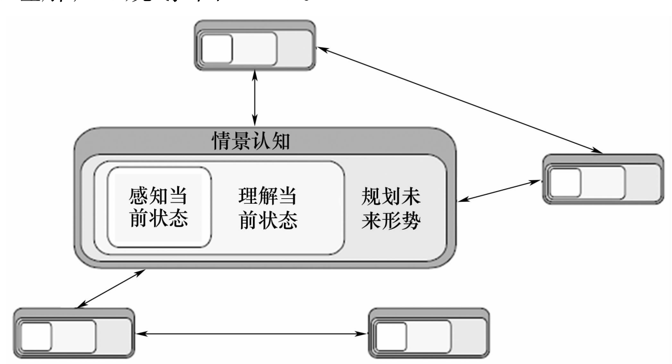


图 16.1 Endsley 和 Garland(对文献[1]的改进)定义的情景认知的三个基本过程

在当代认知学中，心理表征的概念用来研究人的内心世界和外部世界的分界面。心理状态被认为是智能体和心理表征之间的关系。接下来，用 Pitt 公式[14] 来说明，是智能体处在心理状态 Ψ，其语义用 Γ 表示，意思是智能体和语义为 Γ 的心

理表征之间为 Ψ 的特定关系。就心理状态而言，纯粹的句法方法不能做到完全的表达，因为需要去模拟语义的概念。

明确的知识推理以及对问题的表达是情景分析的鲜明特点。我们的观点是知识的来源通常被称为认知论，也就是认知、记忆、推理和意识[15]，它在 Endsley 的 SA 模型的基础上有了一些扩展。Endsley 的 SA 模型认为，认知是知识的唯一来源。

16.2.2 作为过程的情景分析

Roy[2]认为"SA 是一个环环相扣的过程，审查事件每个情景中的各个环节，它的元素，元素之间的关系，提供和维护结果，也就是决策者的情景认知状态(SAW)"。对一个给定的情况，SA 过程产生并保持该情况的心理表征。SA 与 JDL 数据融合模型[16,17]中的 2、3、4 层对应，因此是更高级别的数据融合。图 16.2 给出了该著名模型的新版本，其中包括不同层的经典应用。一个完整的情景模型必须考虑到以下一些任务：(1)情景认知包括要素获取、共同参照、感知来源的不确定性管理以及情景元素认知细化等子单元；(2)情景理解包括背景分析、元素说明、情景分类、情景识别以及情景评估等子单元；(3)情景规划包括元素规划、效果评

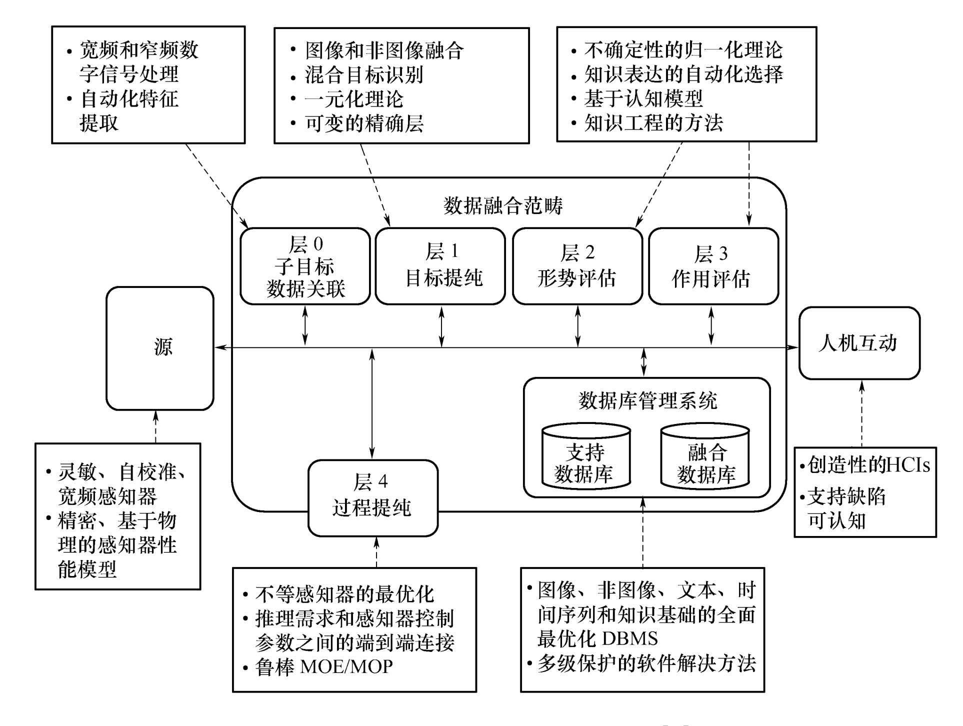


图 16.2 JDL 数据融合模型及其应用[18]

估、情景监测、情景观察、过程改进等子单元[2]。

SA 系统的概念建立在能将 SAW 机器语言转化为人能理解的数学或逻辑形式之上。这种情景允许多智能体系统的存在，这样认知状态可以在各个智能体之间传递而不是停留在一处。文献[3]，在推理信念和知识的可能语义的基础上，提出了一个合乎逻辑的做法。考虑到它允许处理数值评价概率，从而将信仰、知识和不确定性联系起来并分别对待，Halpern 和 Moses 的工作可以作为一个蓝本。

此外，以往一般用来对心理状态建模的数学和逻辑框架应该能够用来表征和处理自我参考，比如自信心等。

16.2.3　分布式系统的一般模型

1990 年，Halpern 和 Moses 提出了以上提到的用于情景分析的分布式知识处理模型[3]。以下给出模型中不同元素的简单定义：

- 分布式系统是指两个或两个以上的互相影响的智能体 $A_1, \cdots, A_n$ 的有限集合(智能体之间有通信网络连接)；
- 智能体的局部状态取决于在某个瞬间该智能体封装的所有信息；
- 环境状态是指智能体状态之外的系统的相关信息；
- 系统的全局状态是系统智能体状态和环境状态的总和；
- 运行是时间和全局状态的函数；
- point 是一个二维的点(r,m)，包括运行 r 和时间 m；
- 系统定义为一组运行，一个系统也可以看作是包括赋值方式的 Kripke 结构。

该模型如图 16.3 所示，它可作为定义情景分析基本概念的重要基础。事实

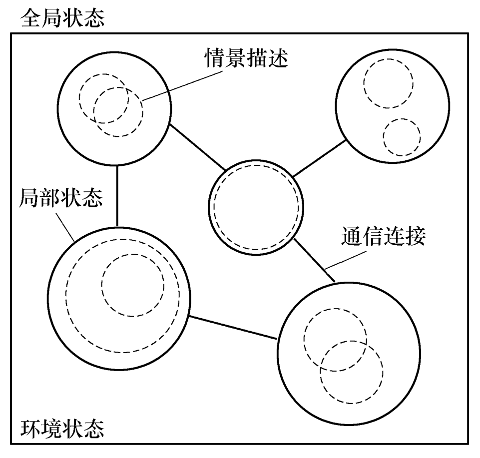


图 16.3　由 Halpern 和 Moses 在文献[3]中提出的适用于情景描述的分布式系统一般模型

上，智能体 A_i 的局部状态也可称为知识基（用 KB_i 表示），在此基础上，认知函数将特定情形的子集进行划分（见 16.4.2 节）。从代数的观点来看，同一个智能体可以对相同的情景产生不同的观点，包括分解、重叠或者嵌套的任一种情况。

16.3 情景分析中的不确定性来源

情景分析是对自然属性的验证，其主要障碍源于不确定性的普遍存在。而在此前的一篇论文中[19]，我们特别提到过不确定性的四个主要方面：(1)含义（心理状态和信息属性）；(2)解释（主观的或客观的）；(3)类型（模糊性、非特异性和不可调和性）；(4)数学描述（定性和定量）。本节我们来回顾一下不确定性的潜在源以及 SA 背景下存在的障碍。

在大多数古字典中不确定性有两种含义[19]：心理状态的不确定性以及物质属性信息的不确定性。第一种含义是指智能体的心理状态不包含做出决定的必要信息，该智能体处于不确定状态："我不能确定这个物体是一张桌子"。第二种含义是指表征认知系统局限的物质属性的不确定性："这张桌子的长度不确定"。

像 Gérald Bronner[20] 这样的社会学家认为，不确定性作为一种心理状态，取决于在不确定问题上我们的能力以及避免这些不确定性的能力。他认为有两种形式的不确定性：结局不确定性（或物质不确定性）和感知不确定性。结局不确定性是指"在面对开放领域的多种可能时，想要去实现某种愿望的个人状态"（"我的车会发动吗？"）；感知不确定性是指"表征的整个系统或其中的一个部分被破坏或是可能被破坏的个别状态"。结局不确定性对应的是我们对这个世界理解的不确定；感知不确定性与对世界的表征有关。根据在不确定问题上我们的能力以及避免这些不确定性的能力，Bronner 给出了以下三种类型的不确定性。

- 类型 1：不确定性不依赖于智能体，而且不可避免。
- 类型 2：不确定性不依赖于智能体，但是可以避免。
- 类型 3：不确定性由智能体产生，并且可以避免。

在情景分析过程中，从底层往顶层看，智能体面对的是感知不确定性（数据驱动）；从顶层往底层看，其面对的是结局不确定性（目标驱动）。因此，在情景分析中对状态的估计和预期产生了如下两种限制：

（1）由物质属性产生的实体限制；

（2）由智能体、人或人工的认知能力局限造成的认知限制。

典型的障碍[21]是当情况不受可识别的规律的约束或者稳定性缺失时所产生的混乱或不稳定状态。虽然存在一定的规律性，也有一些决定论为我们引导，但在寻找确切估计的过程中，机会和混沌还是两个严重的障碍。另一个典型障碍是概念的模糊。自然语言概念本身就是模糊的，这意味着它们的定义也是近似的，有时

甚至是模棱两可的。在其属性和概念上，都存在这种情况。

不可测性是另一个不可避免的障碍，可能来源于我们从一个给定推断中所得到的矛盾的结论或者一些不可能做到的物理测量，不排除有其他实际原因导致这一障碍的情况。理论上说，不可测性可能作为一些特定的无法回答的问题的结论，以便在推理中发挥余下信息的作用。

对约束情况发展的潜在规则一无所知，是不确定性产生的另一个主要原因。例如，若对战术机动的可能性不了解，对事件的预期就不会准确。特别当这一种情况出现在人事改革过程中时，将会是 SA 中的一个主要障碍。当新的物质、新的过程、新的主意出现时，我们没有选择，只能去适应。

缺乏远见和对数据资料的忽视，也是 SA 中的一个典型问题。即使信源存在，环境也可能阻止数据的传输，所以数据传输可能被中断，这样一来，系统就无法对情景进行评估。当模式识别中各类别只是粗略的定义，或者传感器的空间分辨率有限时，传输的数据就不能达到足够的精确度，从而导致短视的发生。通过调查采样中的评估，对类似数据融合中集合的运算或通过粗略计算进行模式化，我们可以更容易取得数据。在很多时候，我们无法取得准确和完全的数据，从而导致我们无法做出决定。因此在 SA 中，我们要面临的一个主要任务就是改变方向和错误的预期。

系统概念中的任何试验都会受到人或人工智能体推理能力的约束。由于认识的缺陷，智能体可能受到一定限制。就知识而言，智能体不是总能给出一个提议的价值，例如有的时候它甚至没有意识到手头提议中提到的概念的存在。智能体是一个受限制资源，有的会受到记忆能力的限制，有的会受到能量供给能力的限制，或者受到认知能力的限制或是计算能力的限制。一般智能体还可能只有有限的视觉和听觉灵敏度。有时这些局限来自于系统外部，是情况使然，比如在有限的时间和金钱条件下完成反电子措施等。此外，智能体不能同时注意所有的问题。就像 Fagin 和 Halpern 在文献[22]中提到的："即使 A 在一个给定的心境下，对他所关注的有限数量的问题进行了完美的推理，他也可能不会将所得到的结论综合起来考虑。事实上，在每一个心境下，智能体 A 的结论可能是一致的，但是在不同的心境下，智能体可能有不同的结论。"最后，在工作过程中，智能体的信仰可能出现前后不一致的情况。比如，我们都知道撒谎是不道德的，但有时，它是解决危机的一个不错的选择。

16.4　情景分析中的本体原则

以上谈到了 SA 中存在的各种限制以及源的不确定性问题（见 16.3 节）。这一节我们提出在实践中指导 SA 要遵循的四条主要的本体原则：(1)对于出现的不

确定的情况，允许陈述和解释；(2)语境化原则；(3)论域的扩充原则；(4)允许自我指涉。

16.4.1 不确定性的表述和解释

从以下两段材料开始入手本节的讨论：

(1) 许多概念都与不确定性有联系：模糊、不可靠、真相、信仰、不可识别性、模棱两可、非特异性、不完整性、不精确性等。尽管这些概念是不同的，但是很容易将其混淆。新近发展的不确定性理论，目的就是要将这些不同的概念区分开来，给出它们的解释，这也是概率理论和模糊理论的工作。在这个方面的另一个突破是由Fagin 和 Halpern 在文献[4]中提出的公式化理论，为解释信仰和可能性提出了一个共同的语义结构，将这两个易被混淆的概念区别开来。

(2) 尽管可以用纯粹定性的概念处理不确定性的问题，但这个由连续和离散物质构成的世界导致了这种方法的产生。

上一节提到，在一般情况下，不确定性通常可以看作是不确定的结果。从公式化的角度来看，很容易发现这样做的局限。命题演算建立在命题是“真”或“假”的二元原则之上，只有这两种情况，因此无法表示“不确定”。一种常见的突破二元原则的方法是在 PC 框架中引入补充真值。补充真值的含义不是非甲即乙，也不是从一种逻辑到另一种逻辑。这样，我们就可以方便地将“真”、“假”、“不确定”表示为 1、0、1/2。

不确定的意义是什么呢？某一类型的不确定性对应一组联系的特定解释。如果说 Lukasiewicz 主要感兴趣的是偶然的未来事件或者可能性的问题，那么 Kleene 在 1938 年[23]提出的三条用于递归理论的价值逻辑则为设计停止标准提供了方便，同时也考虑到了一些命题的不确定性。Bochvar(在 1938 年)[24]认为逻辑定量命题没有任何意义，对他而言，命题只有真或者假，第三种真值的命题是没有意义的或者说是自相矛盾的。在此之后，HalldÈn 在 1949 年[25]重新认识了 Bochvar 的逻辑系统，在此基础上处理了一些模糊命题。事实上，不确定性的不同意思被转化成了逻辑联系中的一些特定的定义。

必须注意的很重要的一点是，一般来说真值不是有序的，就像在计算机中一样，真值是纯粹常规的。这样一来，所谓的真值表只是定性的描述(图 16.4(a))。然而，三真值又可以是有序的，对这个世界进行粗略的定量的描述(图 16.4(b))。但是直觉往往也告诉我们，真实世界的事物之间不是明确区分开来而是互相渗透的。由此，三真值逻辑可以一般化为 n 真值逻辑，这是对模糊逻辑的扩展，用区间[0,1]上的无限个数来代表无限个真值。这一扩展将不同真值有序化(图 16.4(c))。这一扩展的另一结果是不确定这一概念明确的以真或假的形式表现出来。在三真值逻辑中，不确定性、可能性和模糊性都不能用真或假来表示，而在

Lukasiewicz 的理论和模糊逻辑中，不确定性则可用明确的真值表示。

度的引进使真值有序化。这样一来，真命题变成了另一种形式的假命题，反之亦然。在定性方面的三个初始真值失去了它们的独立性。由此带来的另外一个调和不确定的定量和定性方面的扩展是将不确定性分成互相独立的几个方面，用不同的数轴表示。这是 Smarandache 在中智逻辑中提出的原理[10, 11]，他将不确定性分成三个方面：真、假和不确定(图 16.4(d))。因此，在中智逻辑中，无序三真值逻辑的定性方面和模糊逻辑的定量方面是互相结合的。中智逻辑的主要优点是不确定可以用两种主要方式进行说明：(1)用独立①于真函数和假函数之外的不确定函数说明；(2)用前面在模糊逻辑中提到的三种函数来说明。此外，因为真、假和不确定这三个概念是相互独立的，NL 可以用来表示矛盾，比如一些完全正确的、完全错误的或是完全不能确定的东西。中智学和中智逻辑分别在 16.5.1 节和 16.5.2 节介绍。

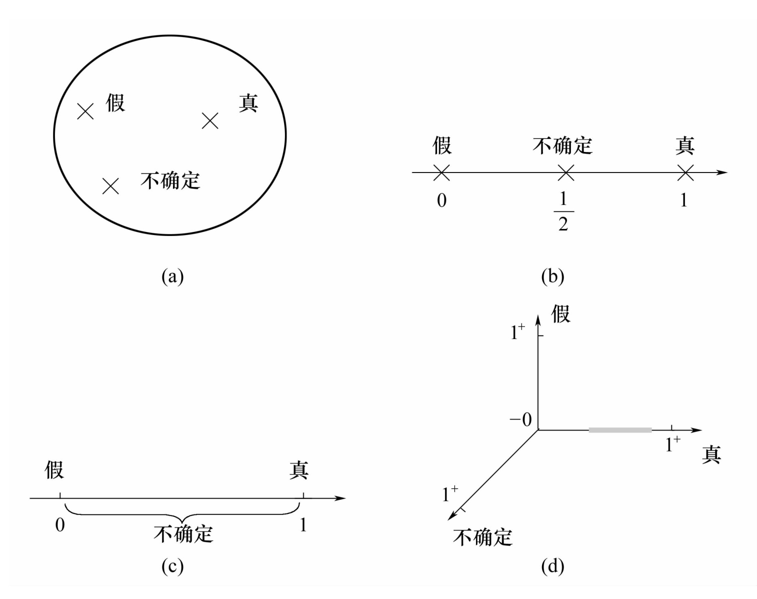


图 16.4　表示不确定性的四种真值

(a) 纯定性描述的三个无序真值；(b) 粗定性描述的三个有序真值；
(c) 真与假之间有序真值的数值范围；(d) 不确定性的三个独立的有序特征轴(真、假、不确定)。

最后，需要说明的是，虽然我们是从逻辑观点的角度来讨论不确定的情况，但是它也可以用一种更加定量的方法表示。事实上，在概率理论中，用[0,1]之间的

① 虽然真、假和不确定在 NL 中是独立的，但在采用超真值时它们又是相互依赖的。诚如一个绝对“真”的命题($T(\phi)=1^{+}$)又绝对是一个“假”命题($F(\phi)=0^{-}$)。而对于相对“真”的命题($T(\phi)=1$)，并不要求该条件成立[10]。

一个值来表示时间发生的可能性，它与事件的最后的真实情况没关系，只是表示事件发展的可能趋势。在此基础上，Dempster-Shafer 理论、概率理论或是 Dezert-Smarandache 理论是处理不确定问题的其他数值方法。这些方法将在后面的16.5.3 节中具体讨论。

16.4.2 语境化

在情景分析中，语境化的运作适合于多种目的，同时它也因为是情景本身抽象概念的依据，而被防卫科学家、软件工程师和指挥官们所知晓。对于信息建模语境，Theodorakis[26] 说："语境被看作是一种参考环境，相对于这个环境来描述现实世界物体。语境的概念会被用于描述现实世界的分割、分区或通常所说的信息集合，诸如形势、观点、工作区或版本等。"从这个意义讲，语境是一种对实际情况部分的心理表征。对于 Theodorakis[26] 而言，"情景记录了现实世界的状态，而完全独立于在心智中的表象。情景记录了现实世界的所有状态，而语境只能反映部分情况，因此，它捕捉到的是不同视角或是特殊情形下不同程度的细节问题"。

Brézillon[27] 认为，语境可以是"一组喜好或信仰，一扇纱窗，一种无限，又或者是部分了解的猜想集，一张属性列表，产品说明，背景图例集，信息检索的路径，面向对象语言的位置，有作用的定制式共享型按钮，理想世界，特殊的类似缓存区的数据结构，控制系统行为的程序，当前情景的特点和知识的应用，相关知识实体（事情或事件）要达到的目标，允许去接受是非的可能性等"。

语境化是一种大量应用于人工智能、自然语言处理、数据库、通信、电子文件和机器视觉的操作。语境化主要的益处在于"表述的模块化，基于语义学的语境，以及集中的信息访问"[27]。对于情景分析而言，语境，或者情景的表述，是一种封装信息的手段，它排除了一些不必要的细节。在允许对准确表述的含义进行不同解释时，对世界的表述成为可能，并最终在被要求关注细节时给予一种进入机制。

采用前面定义的符号（见 16.2.3 节），语境或情景 s 是对建立在已知数据库 KB 中智能体 A 的全局状态的一种观测。该观测可通过信息连接被多个智能体共享。语境意味着产生一个局部推理，例如持有不连贯信任或处理不完整信息和知识的一个智能体。

下面是语境化通常的标准。

- 时间：应用需求或规划目标的实际时间限制。
- 空间：传感器或边界的范围限制。
- 功能：依据对象的功能或智能体的社会角色的区别。
- 结构：合作或自我表现的区别。

进行情景分析的智能体处在复杂和动态变化的环境中，可能会由如下因素带来问题：环境的不可预测和不稳定；SA 任务的特定性；智能体自身物质上和精神

上的局限。

（1）环境的不可测和不稳定会迫使智能体去关注大多数可利用的确定信息和丢弃那些难以理解的不可测事件。在这种情况下，语境化结果是用概率论构造σ代数（见16.5.3节）。同样，超越事件集上下界限的属性操作是一张语境化表格。该操作采用不同理论进行，如Demspter-Shafer理论（信任和理性的测度，或高和低的概率）和粗集理论（高与低的近似值）。

（2）依赖于环境的复杂性，包含在情景分析中的不同任务将不要求同一水平的关注度和同样深度的推理，也不受相同反应能力的支配。因此，为了有效地响应操作请求，智能体仅考虑有限的时间和空间框架。这些约束由情景分析系统的设计者随意地利用，由有经验的游戏玩家实现。Rantala和Sieve两个模型可用来区分可能的世界集（见16.6.1节），Rantala模型[28]是标准Kripke模型的修改版，它引入不可能世界概念，允许从可能世界中识别那些不可能的东西。在这些不可能的世界中，任何事都可能是矛盾的。这个概念抓住了这样一个事实，即除了被认为是已知的事情外，一个非理性的智能体可能相信那些并不存在或者虚假的东西。为了防止这类问题，Fagin和Halpern在1988年提出了一个有过滤作用的Sieve模型[22]。Sieve模型用规则间的分割来替代非标准世界或情景，这些规则可被认知或信任，其他的则不行。过滤函数事实上是预示是否智能体知道一个特定情境的特定规则。这样，那些被讨论的规则就得到了认可。

（3）考虑有限智能体资源是情景分析的共同问题，亦或是隐性考虑。在经济领域，极大合理性概念引入了所有可供选择方法和常常采用最优化技术寻优。理性选择理论（有限合理性）的相反观点是宁可认为人类的大脑和机械存储装置的能力是有限的，这是Bremermann的计算有界理论。该观点坚持将深思熟虑的代价也体现在模型中，而且从经济实惠的角度也要考虑有限合理性。

根据许多作者的观点[29，30，31]，在中智理论中真值的归因一定要考虑详细而精确的环境状况，使其成为一种事实的语境理论[32]。一元中智对于语境概念的处理似乎特别有趣，如A'、Anti-A、Neut-A（见16.5.1节）。

16.4.3 丰富的论域

论域是已给出语境中的一组对象（或抽象或具体的）。它可以是一组类别、一组目标、一组行动等，也可以是一组可能的世界（即世界的可能状态）。如果s代表论域，实验结果的所有可能为

$$S = \{s_1, s_2, \cdots, s_n\} \tag{16.1}$$

论域从某种意义上讲，从万物存在于这个世界起，语境化运算的结果就不能在这个设置中有所体现，万物已存在（无论你愿意与否）。所以，论域就被看作是问题解决情况的支持并能代表我们日常谈论的事物。

尽管如此，论域代表的是完美表述的假设下一个理想的模式。不幸的是，现实生活往往比我们想象中的更不同。的确，一方面，智能体获取知识的方式有局限性；另一方面，真实世界中的物体本身并不能明确截除，而且总的来讲，完美表述的假设也是不可能的。事实的特点总的来讲并不能被用来考虑解决模型化的问题(比如论域的定义)。因此，在结构分析中，对于解决我们面对的两种不同的限制——认识的限制(由于智能体、人类、人为的认知所造成的限制)和存在论的限制(由于自然万物所造成的限制)(见 16.3 节)，造成了论域丰富的假象。

(1) 智能体知识来源的欠缺往往导致识别误区(见 16.3 节)。确实，认识的限制意味着我们有必要投入更多的时间去关注其他的物体，而不是那些早已存在于 s 中的物体。尤其是，在表明 $s_1 \cup s_2$ 是另一个事物时，在有限的时间里智能体无法在两个物体 s_1 和 s_2 之间进行分辨。在 s 中建造，但又非明确从中建造。这时，$s_1 \cup s_2$ 就是智能体在即定时间内能给出的最佳答案，即使智能体知道答案既不是 s_1 也不是 s_2。

在概率理论中，由于相加性原理，我们不能将宇宙的其他领域，不能单独涉及 $s_1 \cup s_2$。的确，在 $u(s_1 \cup s_2) = u(s_1) + u(s_2) - u(s_1 \cap s_2)$中，$u$ 的概率测度超过 s。因此，在解释知识获取的限制(认知限制)时，我们能够丰富我们的论域，并能认识到设置 s 的能量，如 s 的全部子集的设置：

$$2^S = \{A \mid A \subseteq S\} = \{\varnothing, s_1, s_2, \cdots, s_n, (s_1, s_2), \cdots, (s_{n-1}, s_n), \cdots, S\}^{①} \tag{16.2}$$

式中：$\varnothing$ 表示空集。丰富的论域允许未知和不确定从而得到了最好的表达，同时，附加冲突的种类也被纳入其中。如果概率论是基于经典集的，幂集就是 Dempster-Shafer 理论、概率论和粗集理论的基础(见 16.5.3 节的简要描述)。在语境中，我们可以将测度分别独立地赋值给每一个 S 的子集。最终，Dempster-Shafer 理论是以论域的假设为基础，该假设是由一列详细的互斥元构成[33]，在实际中就是一个强制性约束。

(2) 另一个限制是指我们所观察到的世界往往比我们能描述的世界更复杂，这是一个事实，这个认知的限制和对象的特性紧密相关，而与我们的感知方式毫无关系。例如，$s_1 \cap s_2$ 表示由 s_1 和 s_2 构成的另一个事物。它既不是 s_1 也不是 s_2，而是介乎它们二者之间的某个东西。因此，另一个扩展就是由作用于 S 诸元上的并和交算子的所有组合构建的超幂集架构，即

$$D^S = \{\varnothing, s_1, s_2, \cdots, s_n, (s_1 \cup s_2), \cdots, S, (s_1 \cap s_2), \cdots, (s_1 \cap s_2) \cup s_3, \cdots\} \tag{16.3}$$

① (s_1, s_2) 以往习惯用$(s_1 \cup s_2)$表示。

如果 S 中诸元相互排斥(即对所有的 $i \neq j$ 有 $s_i \cap s_j = \varnothing$),则 $D^S = 2^S$。然而,考虑到 D^S 是一个更为一般的情况,允许 $s_i \cap s_j \neq \varnothing$,也就是允许论域中的所有对象交迭。这仿佛就如宇宙是由含糊不清的概念组成。对概率测度定义扩展后的超幂集就是 Dezert-Smarandache 理论的原则[33]。在这个框架中,互斥集 S 的初始假定并不被采用,同时,由于新的对象被加到互斥集 S 中,在一定程度上有所延迟。16.5.3 节将对 DSmT 理论进行简要说明。

因此,可以说 Dempster-Shafer 证据理论仅仅是一种认知上的理论,而 Dezert-Smarandache 是一种认知与实体理论,因为该理论框架结合了认知与实体两个方面。

16.4.4　自动参照

所谓自动参照,就是赋予智能体自我审视和自我参照的能力。举例来说,一个智能体应拥有自我认识的能力,而不仅仅是了解和认识其他个体。

(1) 超幂集是建立自我参照模型的传统方式,超幂集的概念首先是由 Aczel[34]、Barwise 和 Etchemendy[35]针对拉塞尔的自相矛盾理论①提出的。递归的概念扩展了传统的集合理论,使超幂集能包括其本身,从而引出无限递归的集合(例如 $x = 1 + 1/x$)。"有理由集合"是一个不包括无限递减序列的组合,而其他的组合则被称为"无理由集合"。

(2) 在形式逻辑中,Kripke 结构被作为一种语义来使用(见 16.6.1 节)。而在 Kripke 结构中,所谓可达关系被定义为一组模拟世界的结构或者智能体属性的可能世界。然后通过将某些属性强加到可达关系来模拟智能体的期望属性。具体来说,如果该关系是反身的和及物的,智能体就拥有自我肯定的能力(智能体知道它所了解的东西)。反之,如果该关系是等价的,智能体就会明确声明它不知道(自我否定)。

尽管超幂集和 Kripke 这两个模型在这里被认为是截然不同的,但它们都是(多智能体)形式逻辑的语义。文献[37,38]证明了这两种语义是等价的。只不过超幂集模型是用曲线图表示取代了传统集合理论中的"容器"表示(图 16.5)。根据定义,图 G 是一对(S, R),而 S 是一组节点,R 是 S 之上的关系。一个标签图是一个三重组 $S = \langle S, \mathrm{R}, \pi \rangle = \langle G, \pi \rangle$,其中 G 是图,π 是从 P 到 2^S 的评价函数,P 是一组指定变量,它赋值给节点 S 的指定变量集 P 的每个子集 p。可是,Kripke 模型可以被看成是定向标签图,其节点是那些可能的世界,节点间的链接代表可达

① "拉塞尔的自相矛盾理论是最著名的逻辑和集合的自相矛盾理论。自相矛盾的产生是由于这个天真的集合理论没有把自身作为集合的一部分来考虑。因此集合中似乎包含了自身又似乎没有包含自身,从而产生了矛盾。"[36]

关系，用真值赋值标记①。

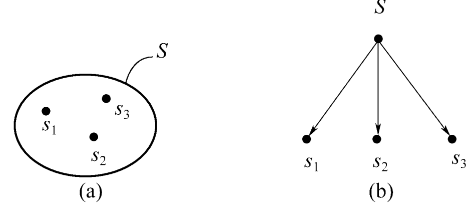


图 16.5　传统集合的表示方法

(a)“容器”表示法；(b)曲线图表示法(箭头表示 s_i 是 S 的一个命题)。

由 Kripke 提出的形式逻辑和知识逻辑模型表现在多智能体语境中对知识的精美的推理结构。而且，它是基于可能世界(Possible World)的观念，非常接近情景的直觉概念。因此，我们把它作为语境分析的基本结构。在 16.6 节，我们提出将 Kripke 结构和中智框架结合的观点。在对 Kripke 结构进行更加正式的表述之后(见 16.6.1 节)，我们首先将该结构发展为中智逻辑(见 16.6.2 节)。然后，我们根据可能世界的概念，将概率结构发展为 DSm 结构(见 16.6.3 节)。最后，我们通过 Kripke 结构将 DSmT 和中智逻辑连系起来(见 16.6.4 节)。

16.5　情景分析的中智框架

16.5.1　中智学

中智学是 F. Smarandache 提出的“一个新的哲学分支，该分支研究起因，本性和中立性，以及他们在不同情况下的相互作用”[9]。其形式如下。

假设 A 为一个想法，主张，理论，事件，概念，实体。那么，用不同的一元算子，我们定义：

- A' 为 A 的一种；
- 反－A 为 A 的对立面；
- 非－A 即不是 A；
- 中智－A 既不是 A，也不是反－A。

中智－A 代表 A 和反－A 两个极端之间的中性体。因此，在 A 和反－A 之间存在一个中智－A 的闭连集幂结构，即 A—中智－A—反－A。注意非－A 和反－A 的区别(非－A≠反－A)，同时，反－A∈非－A，中智－A∈非－A，A∩反－A = ∅，A∩非－A = ∅。

下面给出一个多智能体情景分析的例子。

① 虽然在文献[37，38]中表述得更为复杂(!)，但它仍取决于前面的注释。

假定有一个具有 n 个智能体的系统 A_1，…，A_n。我们称 KB_i 为智能体 i 的知识基($i=1$，…，n)，则有如下结论。

- KB_1 是 A_1 能访问的所有信息；
- KB'_1 是 KB_1 的另一种，例如 KB_1 的升级版，或 A_1 信息源另一分区的 KB；
- 反－KB_1 是 A_1 不能访问的所有信息(或者那些不能被用来表示给定情景的信息)；
- 非－KB_1 是 A_2，…，A_n 能访问的所有信息，但是不能与 A_1 和无人能访问的信息共享；
- 中智－KB_1 是 A_2，…，A_n 能访问的所有信息，也不与 A_1 共享。

唯一的实现途径来源于在本章将要讨论的中智学，即由 Samarandache 提出的中智逻辑[10, 11]和由 Dezert 与 Samarandache 共同提出的 DSmT 理论[33,39]。在 16.5.2 节和 16.5.3 节，我们将回顾这些方法的基本内容。

16.5.2 中智逻辑

中智逻辑(NL)是中智推理的一种方法。这个非传统的逻辑是一种多值逻辑，它将模糊逻辑推广到其他范畴，是“首次尝试将多种逻辑统一为一种逻辑”[10]。

在传统逻辑中，一个命题 A 要么是“真”要么是“假”。而在模糊逻辑中，A 容许以“真”的程度来表示“更真”或“次真”(同样也可以表示“更假”或“次假”)。在中智逻辑中，A 可以表示为 $T\%$的“真”，$I\%$的“不确定”和 $F\%$的假，这里$(T, I, F)\in \|^{-}0, 1^{+}\|^{3}$。距离$\|^{-}0, 1^{+}\|$是一种超实距离①，该符号的特别之处是它涉及三维空间。作为一个一般性框架，中智逻辑对应在三个不同方向的延伸。

(1) A 可被看成为非－A、反－A、中智－A 和 A'；

(2) 其语义基于三种独立的赋值，而不是如其他逻辑中的单一赋值；

(3) 这三个赋值取值于超实距离$\|^{-}0, 1^{+}\|$的子集，而不是$[0,1]$。

因此 A 由三个真值构成，称为中智值，即

$$\mathrm{NL}(A)=(T(A), I(A), F(A)) \tag{16.4}$$

16.5.3 DSm 理论(DSmT)

由于该理论是由 Dezert 和 Smarandache 作为广义 Dempster-Shafer 理论提出的，之后就被称为广义概率理论。在介绍 DSmT 之前，我们先简要地回顾一下这

---

① 超真实(Hyperreals)是在 1960 年就提出的一种非标准的真实，令$[0, 1]$为真实的标准距离，是 0 到 1 之间实数的集合。该距离的扩展是通过非标准的数对$^{-}0$ 和 1^{+}取代上下限，分别为 $0-\varepsilon$ 和 $1+\varepsilon$，这里 $\varepsilon>0$ 是一个无限小的数(也就是对于所有的整数 $n>0$，$\varepsilon<\frac{1}{n}$)。

两种理论。

概率空间是一个3元空间$p=\langle S, \chi, \mu\rangle$,其中

- $S=\{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$是取样空间,是基本事件的组合,即所有给定实验结果的组合;
- χ是S的σ一代数;
- μ是从χ到$[0,1]$的概率赋值。

每一个χ的元都被赋为一个非负的实数$\mu(A)$,A的概率必须满足下列规则:(1)$\mu(A)\geqslant 0$;(2)$\mu(S)=1$;(3)当$A_i\neq A_j$时,如果$A_i\cap A_j=\varnothing$,则$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)$。

规则(3)也就是σ一加操作的条件,简单地说就是加操作规则。它在概率理论中扮演十分重要的角色。实际上它就是给测量组合强加了一个约束(也即可以给测量组合赋概率值),其结果就是$\mu(\overline{A})=1-\mu(A)$,$\overline{A}=S\backslash A$。换言之,$\mu(A)$并不取决于任何$\mu(B)$,因为$B\in A$。

该证据理论最初是由Dempster在1967年对高级和低级概率的研究中提出的[7]。之后由1976出版的Shafter的著名的《证据数论》[8]一书将其收入。通常它被认为是贝叶斯概率论的延伸。证据理论在描述不确定性时更有优势,因为其度量是由所涉及对象的幂集来定义的,而不是由对象自身的概率确定。其特点表现在由于约束条件较少而减轻了概率加操作的负担,即所谓的超级加操作规则。

信度函数定义为2^S到$[0,1]$之间,并满足以下规则:(1) $\mathrm{Bel}(\varnothing)=0$;(2) $\mathrm{Bel}(S)=1$;(3) 对每一个正整数n和每一个S的子集集合$A_1, \cdots, A_n$,$\mathrm{Bel}(A_1\cup\cdots\cup A_n)\geqslant\sum_i \mathrm{Bel}(A_i)-\sum_{i<j}\mathrm{Bel}(A_i\cap A_j)+\cdots+(-1)^{n+1}\mathrm{Bel}(A_1\cap\cdots\cap A_n)$。与概率值相反,信度值是不可加的,其加法规则被高级加法规则所取代。其主要后果是每一个S幂集的元都是可测量的。因此,如果$B\subset A$,则$\mathrm{Bel}(A)>\mathrm{Bel}(B)$。

信度函数常常用从2^S到$[0, 1]$的基本概率赋值(或基本信度赋值)m来定义,它必须满足如下条件:(1) $m(\varnothing)=0$;(2) $\sum_{A\in 2^S}m(A)=1$。由此可得到$\mathrm{Bel}(A)=\sum_{B\subseteq A, B\in 2^S}m(B)$。

由于超幂集合的所有元素都是可测的,所以DSmT[33][39]是该研究方向的另一个扩展。在满足以下条件的情况下,可定义从D^S到$[0,1]$的信度质量:

$$m(\varnothing)=0 \text{ 和 } \sum_{A\in D^S}m(A)=1 \tag{16.5}$$

因此,如果在$S_i\cap S_j$,$i\neq j$情况下的元素是可测的,一般信度函数可定义如下:

$$\mathrm{Bel}'(A)=\sum_{B\subseteq A, B\in D^S}m(B) \tag{16.6}$$

注意 Bel′与 Shafer 信度函数中的 Bel 的区别。

由此可见,DSmT 是一个处理实体和认知不确定性的更为一般性理论框架。然而,在大多数定量的方法中,它还缺少一个正式的推理结构。下一节将为 DSmT 补充该结构的语义。

16.6 中智框架的可能域语义

可能域语义提供了一种对环境推理的直觉方法,它提出了一种适用于中智逻辑的一般性语义(见 16.2.2 节)。此外,可能域语义还常常用来填补数字语义的缺失,详见 16.6.3 节。

16.6.1 Kripke 模型

Kripke 模型[40]是一种精确的数学模型,它可被看作是一种定向标号图。图中的节点是可能域集 S 中的可能域 s,由真值 π 标记。具体表述如下。

Kripke 模型是一种形式为〈 S,R,π 〉的三元素结构,其中的三元素含义如下:

- S 是非空集(可能域集);
- $R\subseteq S\times S$ 是可达关系;
- π:($S\to P$)$\to${0;1}是每个可能域命题的真值。

这里的 $P=\{p_1,\cdots,p_n\}$是命题变量的集合,而{0;1}代表{ TRUE;FALSE }。

域 s 被认为对于另一个域 s' 是可能的,无论它们之间是否存在链接。这个链接可由任意二进制数定义,称为可达关系。图 16.6 说明了下面的例子。

一位智能体想知道“纽约是否在下雨”(ϕ)和“洛杉矶是否在下雨”(ψ)。由于该智能体完全没有相关信息,那么,可能的情况(域)$S=\{s_1,s_2,s_3,s_4\}$如下:

- s_1 代表纽约和洛杉矶都下雨,即 $\pi(s_1)(\phi)=$ TRUE 和 $\pi(s_1)(\psi)=$ TRUE;
- s_2 代表纽约下雨而洛杉矶不下雨,即 $\pi(s_2)(\phi)=$ TRUE 和 $\pi(s_2)(\psi)=$ FALSE;
- s_3 代表纽约不下雨而洛杉矶下雨,即 $\pi(s_3)(\phi)=$ FALSE 和 $\pi(s_3)(\psi)=$ TRUE。
- s_4 代表纽约和洛杉矶都不下雨,即 $\pi(s_4)(\phi)=$ FALSE 和 $\pi(s_4)(\psi)=$ FALSE。

1. 域结构建模

Kripke 模型语义的一个很有趣的性质是:它通过对 S_K 定义的可达函数条件

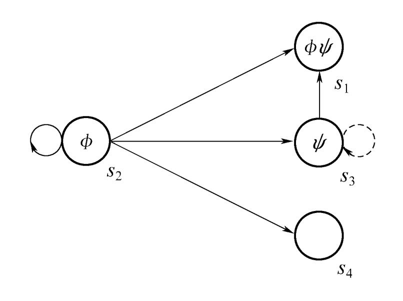


图 16.6　可能域集与可达关系的例子

的表述对不同模态逻辑系统产生规则。这些条件可以用来表示智能体的属性和限制(根据已给域的模态)。例如,任何一个由满足反身可达关系的 Kripke 模型建立的认知系统,同样满足于真知规则(T)。如果该模型满足反身和及物可达关系,它同样满足正内省规则(4)。负内省规则(5)由等价关系给定(见表 16.1)。K45 系统由构建及物和欧几里得可达函数得到,然而 KD45 有时可在 Dempster-Shafer 结构上模拟证据推理(见 16.6.3 节),它由构建及物的、欧几里得的和连续的可达关系 R 得到。该结论将在下面介绍。

表 16.1　规则、认知逻辑系统和可能域之间的可达关系

可达关系(R)	规　则
反身	(T)$K\phi\rightarrow\phi$(真知)
反身 + 及物	(4)$K\phi\rightarrow KK\phi$(正内省)
等价	(5)$K\phi\rightarrow K\neg K\phi$(负内省)

2. 真值赋值

如前所述,对于每个域 $s\in S$,存在一个从 P 到$\{0;1\}$定义的关联真值赋值 $\pi(s)$,其形式如

$$\pi(s)(p)=\begin{cases}1 & (s\models p)\\0 & (s\not\models p)\end{cases}\tag{16.7}$$

式中:$p\in P$。$s\models p$ 表示域 s 限定了命题 p,也就是说,命题 p 在域 s 里是真。

赋值 $\pi(s)$服从经典的连接定义,如 $\pi(s)(p)=S\backslash\pi(s)(p)$,$\pi(s)(p\wedge q)=\pi(s)(p)\cap\pi(s)(q)$等。

一条规则是通过基本连接符$\neg$和$\wedge$把一些 P 元素任意组合成的。令 Φ 为规则集,ϕ 是 Φ 的元素。例如:$\phi_1=p_1\wedge\neg p_2$,$\phi_2=\neg p_1$,$\phi_3=p_1\wedge\cdots p_n$,$\phi_i\in\Phi(i=1,\cdots,n)$。因此,真值赋值 $\pi(s)$也可以被任意 Φ 的规则定义,ϕ 在 s 中为真时,则 $\pi(s)(\phi)$恒等于 1。

对于 P 中的每一个元素 p，存在一个关联的真值集合 A_p，它包含当 $\pi(s)(p)$ 为真时 S 中的所有元素，即

$$A_p = \{ s \in S \mid \pi(s)(p) = 1 \} \tag{16.8}$$

式中：A_p 是 p 为真的可能域集合，也可记为 $A_p=\{s\in S | s\models p\}$。进一步，对于每个规则，$\phi$ 与真值集合 A_ϕ 关联。

注意，P 中的元素不必相互排斥。获得相互排斥元素的方法是构建集合 A_t，它是基本元素的集合，这里的一个基本元素①是一个（连接）形式的规则，$\delta = p'_1 \wedge \cdots \wedge p'_n$ 且 p'_i 可以是 p_i 或 $\neg p_i$，$p_i \in P$。任何一个规则 $\phi \in \Phi$ 可被写成一种如 $\phi = \delta_1 \wedge \cdots \wedge \delta_k$，$\delta_i \in A_t$ 的析取形式。

对每一个域 s，有一个集合 A_t 的关联基本元素 δ，它描述了 S 中命题 P 的真值。然而很多域可以与同样的基本元素关联，一个基本元素也可以与任何域关联（见 16.6.3 节的例子）。基本元素仅仅是指定真值 π 的路径。

3. 多智能体语境

由 S_k 的定义可以很容易扩展到多智能体的情况。确实，如果我们考虑一个智能体集合 $A_1, \cdots, A_n$，然后在同样的可能域集合 S 和同样的真值赋值 π，我们可以定义 n 个可达关系 $R_i (i = 1, \cdots, n)$，每个智能体对应一个可达关系。

对于相同的情形，$R_i s$ 的不同条件将表征 $A_i s$ 的不同属性。

16.6.2 中智命题的 Kripke 结构

我们在 16.5.2 节中介绍了中智逻辑的基础。

在经典逻辑中，规则 ϕ 是由它的真值 $\pi(\phi)$ 来表征的，它要么是 0 要么是 1（真或假），而在中智逻辑中，ϕ 被允许 $T\%$ 的真，$F\%$ 的假，以及 $I\%$ 的不确定。于是 ϕ 就由一个三真值组来表征，称为中智值，即

$$\mathrm{NL}(\phi) = (T(\phi), I(\phi), F(\phi)) \tag{16.9}$$

式中：$(T(\phi), I(\phi), F(\phi)) \subset \|^{-}0, 1^{+}\|^{3}$，$\|^{-}0, 1^{+}\|$ 是超实距离。

以量子逻辑相同的方式，Kripke 结构被扩展来处理模糊命题[41]，我们提出将 Kripke 结构应用到处理中智赋值上，因此有

中智命题的 Kripke 模型是一个形为 $\langle S, R, \boldsymbol{\pi} \rangle$ 的三元结构 S_K^{NL}

其中：

- S 是一个非空集（可能域集）；
- $R \subseteq S \times S$ 是可达空间；
- $\boldsymbol{\pi} = (\pi_T, \pi_I, \pi_F)$ 是对每个可能域命题的中智赋值，如 $\pi: (S \to P) \to \|^{-}0,$

---

① 一个基本元素有时称为一个原子。

$1^+ \|$，其中 π 为 π_T，π_I，π_F 中的一个。
这里 $P=\{p_1, \cdots, p_n\}$是命题变量集。

经典 Kripke 模型的“真值”赋值 π 变成$\boldsymbol{\pi}=(\pi_T, \pi_I, \pi_F)$（三维赋值），其中 π_T 为真值，π_F 为伪值，π_I 为不确定值。因此，在 S 的每个可能域 s 中，命题 ϕ 可由 $\pi_T(s)(\phi)$TRUE，$\pi_F(s)(\phi)$FALSE 和 $\pi_I(s)(\phi)$INDETERMINATE 来估计。因此，ϕ 与真集 A_ϕ^T、伪集 A_ϕ^F 和不确定集 A_ϕ^I 关联，即

$$A_\phi^T = \{ s \in S \mid \pi_T(s)(\phi) \neq 0 \}$$
$$A_\phi^F = \{ s \in S \mid \pi_F(s)(\phi) \neq 0 \}$$
$$A_\phi^I = \{ s \in S \mid \pi_I(s)(\phi) \neq 0 \}$$

注意，这里 A_ϕ^T、A_ϕ^F 和 A_ϕ^I 不再关联，而且为模糊集和可能的交集。

知和信

Halpern 在文献[42]中给 PWS 中的知和信作了如下定义：

- 如果命题 S 的全部可能域 s 都是 TRUE，则 ϕ 是可知的。
- 如果命题 S 中至少有一个可能域 s 是 TRUE，则 ϕ 是可信的。

另一方面，Smarandache[10]用域的概念来表述，如果命题 S 全部可能域 s 中的 ϕ 为 TRUE（绝对真），则 $T(\phi)=1^+$；如果至少有一个可能域 s 的 ϕ 为 TRUE（相对真），则 $T(\phi)=1$（见表 16.2）。因此，在中智框架内，我们可以为知和信给出如下定义：如果 $T(\phi)=1^+ \equiv F(\phi)={}^-0$，则 ϕ 是可知的；如果 $T(\phi)=1 \equiv F(\phi)=0$，则 ϕ 是可信的。表 16.2 显示了几种特殊情况。

进一步，我们可以考虑用一元中智逻辑算子（Non-ϕ，Anti-ϕ，Neut-ϕ，ϕ'）来建立新的认知模型，同时用其表征情景，如不确定性和环境（详见最后一节）。

表 16.2　特殊情况的中智值（文献[10]）

ϕ 是…	在…的可能域(s)中	中 智 值
真 伪 不确定	全部	$T(\phi)=1^+ \equiv F(\phi)={}^-0$ $F(\phi)=1^+ \equiv T(\phi)={}^-0$ $I(\phi)=1^+$
真 伪 不确定	至少一个	$T(\phi)=1 \equiv F(\phi)=0$ $F(\phi)=1 \equiv T(\phi)=1$ $I(\phi)=1$
不确定	无	$I(\phi)={}^-0$
无不确定	至少一个	$I(\phi)=0$

16.6.3　概率赋值和结构

令 S 为识别框架，s 是 S 的元素，A 是 S 的子集。在概率论中，可测量对象是

S 的元素 s。赋值给 S 的任意子集 A 中的测量由加法规则操作。因此,可测量的元素属于一个 σ-代数 $\chi/2^S$。在 Dempster-Shafer 理论中,S 幂集中的任一元素 2^S 是可测量的。而 Dezert-Smarandache 理论允许超幂集 S 的任一元素 D^S 是可测量的。除了这些概率理论的扩展外,根据概率测量的定义集,还有一个明晰的优点就是可以给出这些数字逼近更好的语义。对于它的似然逻辑,Nilsson 利用可能域语义,通过概率论与逻辑的结合[6]建立了一种"逻辑语义泛化"(见 16.3.3 节)。稍后,Fagin 和 Halpern[4],以及 Bundy[43]扩展了 Nilsson 的结构,即允许所有幂集元素都可以被测量,从而形成了一个如同 Dempster-Shafer 广义概率理论的一般性结构,即 Dempster-Shafer 结构(见本节后续内容)。

下面,在简要回顾 Nilsson 和 Dempster-Shafer 结构后,我们将 DSmT 框架和可能域语义相结合,对后者进行扩展并提出 Dezert-Smarandache 结构。在本节的结尾部分,我们给出了一个该结构具有潜在优点的实例。

1. Nilsson 结构

Nilsson 结构是一个四元组 $S_N = \langle S, \chi, \mu, \pi \rangle$,其中:

- $S = \{s_1, s_2, s_3, \cdots\}$,所有可能域的集合;
- χ,S 子集的一个 σ-代数;
- μ,χ 定义的一个概率测量;
- π:$(\pi:(S \to P) \to \{0;1\})$,每一个可能域命题的真值,$P$ 是命题变量的集合。

注意,$\langle S, \chi, \pi \rangle$ 是一个概率空间,Nilsson 结构也叫概率结构。在该结构中,只有 χ 是可测量元素。然而,如果我们对任何其他 Φ 的规则感兴趣,我们所能做的就是计算由下式定义的内部和外部测量[4]:

$$\mu_*(A) = \sup\{\mu(B) \mid B \subseteq A, B \in \chi\} \text{ 和 } \mu^*(A) = \inf\{\mu(B) \mid B \supseteq A, B \in \chi\}$$

未知值 $\mu(A_\phi)$ 被下述不等式代替:

$$\mu_*(A_\phi) \leqslant \mu(A_\phi) \leqslant \mu^*(A_\phi) \tag{16.10}$$

因此,从 χ 到[0,1]代入一个概率测量 μ,可以计算一对概率测量 μ_* 和 μ^*。

由于在 Nilsson 结构中,μ 被 χ(可测量子集的集合)定义,意味着对于所有的 $\phi \in \Phi$,χ_π(χ 关于 π 的映射)是一个 χ 的子代数,以保证 $\mu(\phi) = \mu_*(A_\phi)$。舍弃这个条件意味着将 μ 扩展为 2^S(根据 Nilsson 结构)并成为在下面将详述的文献[4]①的 Dempster-Shafer 结构。于是,概率测量 μ 被它的内部测量 μ_* 所取代。

2. Dempster-Shafer 结构

Nilsson 结构可用内部测量来进行扩展,也就是允许 2^S 的所有元素可测。因

① 另一个方法是采用局部映射 π 来构成一个 Bundy 的关联微积分结构[43]。

为内部测量转化为 Shafer 在他的证据理论中提出的信任度量[8]，从而构成了 Dempster-Shafer 结构。注意，在该结构中，χ 和 π 不要求在任何时候都相关联。

Dempster-Shafer 结构可以用多元组 $S_{DS}=\{S, 2^S, \mathrm{Bel}, \pi\}$ 来表示，其中：

- $S=\{s_1, s_2, s_3, \cdots\}$，所有可能域的集合；
- 2^S，S 的幂集；
- Bel，2^S 的信度测量；
- π：$(S\to P)\to\{0; 1\}$，对可能域中命题的真值赋值。其中，P 是一组命题变量。

注意，可以将 S_{DS} 简单地写成 $S_{DS}=\{S, \mathrm{Bel}, \pi\}$，其中 Bel 在 Shafer 的表述中是一个信度函数 Bel：$2^S\to[0, 1]$（见 16.5.3 节）。

因此，Nilsson 结构就是 Dempster-Shafer 结构的一个特例，其中

$$\mu_*(A_\phi)=\mu^*(A_\phi)=\mu(A_\phi) \quad (\phi\in\Phi) \tag{16.11}$$

3. Dezert-Smarandache 结构

在文献[33]中，作者通过定义超幂集信度函数取代 Shafer 的幂集信度函数，提出了一种广义 Dempster-Shafer 理论，该理论被称为 Dezert-Smarandache 理论或简写为 DSmT。类似于将 Nilsson 结构扩展为 DS 结构，μ 的定义可以扩展为 D^S，允许超幂集的所有元素可测，我们称之为 Dezert-Smarandache 结构（DSm 结构）。类似于 DSmT 是 Dempster-Shafer 理论的扩展一样，DSm 结构是 DS 结构的扩展。

Dezert-Smarandache 结构是一个多元组 $S_{DSm}=\{S, D^S, \mathrm{Bel}', \pi\}$，其中：

- $S=\{s_1, s_2, s_3, \cdots\}$，所有可能域的集合；
- D^S，S 的超幂集；
- Bel′，D^S 的信度测量；
- π：$(S\to P)\to\{0; 1\}$，对可能域中命题的真值赋值。其中，P 是一组命题变量。

注意，可以将 S_{DSm} 简单地写成 $S_{DSm}=\{S, \mathrm{Bel}', \pi\}$，其中 Bel′是定义在 D^S 上的广义信度函数，是由 Dezert 和 Smarandache 给出的定义（见 16.6.3 节）。

4. 实例：Ron 的衣服

该实例是文献[4]中的例 2.4。

“Ron 有两件蓝色的衣服和两件灰色的衣服。他有一个简单的方法来决定哪一天穿什么颜色的衣服：掷硬币。如果正面朝上，就穿蓝色的衣服；如果背面朝上，就穿灰色的衣服。一旦他决定了要穿什么颜色的衣服，他就会选择挂衣架上最右边的这个颜色的衣服。Ron 的所有的蓝色的衣服都是单排扣的，而灰色衣服则有一件是单排扣，另外一件是双排扣的。Ron 的妻子 Susan 比 Ron 更时尚一点（这

是 Ron 的福气)，她当然知道 Ron 是怎样选择自己的衣服。所以，她总是把她更喜欢的灰色衣服挂在右边(由当时的流行和 Susan 一时的兴致决定)。假设我们不知道当下流行什么(或 Susan 当时的兴致是什么)，我们怎么知道 Ron 在星期一穿单排扣衣服的概率是多少?[4]”

设 P 是一组原始命题，$P=\{p_1, p_2\}$。$p_1=$“衣服是灰色的”，$p_2=$“衣服是双排扣的”。则对应的一组基本元素 $\mathscr{A}_t$ 可表示为

$$\mathscr{A}_t=\{p_1 \wedge p_2, p_1 \wedge \neg p_2, \neg p_1 \wedge p_2, \neg p_1 \wedge \neg p_2\}$$

$\mathscr{A}_t$ 是一组相互排斥的假定：“Ron 选择一件灰色双排扣衣服”，…，“Ron 选择一件蓝色单排扣衣服”。

S 是所有可能情况的集合，其中的每一个元素对应 Ron 的一个特定的选择。为了便于区别，我们将衣服编号为 1～4，即 $S=\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$，s_i 对应的是 Ron 选择第 i 件衣服。表 16.3 列出了各种可能的情况以及它们的含义和基本组成元素①。表 16.4 给出了一些感兴趣的情况之间的关系及其关联规则。状态的集合还可以用 π 来表示，π 是 P 到 2^S 的真值赋值，而 $\pi(s)$ 是 P 到 $\{0, 1\}$ 的真值赋值。这样，如果 s 中 p 为假，则 $\pi(s)(p)=0$；若 s 中 p 为真，那么 $\pi(s)(p)=1$。

表 16.3 四种可能的状态以及它们关联的基本元素

域	含 义	基本元素
s_1	蓝色单排扣衣服 1	$\neg p_1 \wedge \neg p_2$
s_2	蓝色单排扣衣服 2	$\neg p_1 \wedge \neg p_2$
s_3	灰色单排扣衣服	$p_1 \wedge \neg p_2$
s_4	灰色双排扣衣服	$p_1 \wedge p_2$

表 16.4 某些感兴趣的可能域子集及其关联规则

域	含 义	表达式
(s_1, s_2)	蓝色衣服	$\neg p_1$
(s_3, s_4)	灰色衣服	p_1
(s_1, s_2, s_3)	单排扣衣服	$\neg p_2$

这里，我们仅有四组可测事件：$\mu(s_1, s_2)=\mu(s_3, s_4)=1/2$，$\mu(\phi)=0$ 以及 $\mu(S)=1$。我们研究的问题(Ron 穿单排扣衣服的概率是多少?)还与另外一个不可测事件有关，也就是(s_1, s_2, s_3)。在文献[4]中，作者给出了一个例子来说明不可测事件的属性值的作用，然后介绍了 Dempster-Shafer 结构。就这个例子而言，

① 注意，基本元素 $\neg p_1 \wedge \neg p_2$ 是与任意情景相关联的，这里 $\neg p_1 \wedge \neg p_2$ 是与 s_1 和 s_2 两种情景关联。

通过内部测量和外部测量,能得到的最好结果就是 $1/2 \leqslant \mu(s_1, s_2, s_3) \leqslant 1$。

对上述问题的四种状态建模意味着要给我们先验知识,这些状态在 Ron 做出选择后只对应唯一可能的情况:他在这四件衣服中选择一件并只选择一件。然而,假设挂在同一个衣架上的一套衣服有两个部分(裤子和上衣),那么四种可能的情况不是对应四件衣服而是对应四个衣架。假设裤子挂在上衣里面,Ron 只是根据上衣的颜色来选择自己该穿哪一套衣服。例如 Ron 选择的衣架上有一件蓝色上衣和灰色裤子,那么它对应可能域中的哪一种情况呢?很明显,这种情况并不在 DS 结构考虑的范围之内。然而在 DSm 结构中,允许 S 的超幂集元素可测,因此,混合套装的选择对应的情况是 $s_i \cap s_j (i \neq j)$。这意味着在可能域 s_i 和 s_j 中,如果要做出一种选择的话,Ron 实际上要选两套衣服。所以我们允许其他事件来克服目前的预测。

对于情景分析而言,我们提出的这个结构的好处是,它提供了一个有意思的框架,该框架将可能域中的逻辑、语义和推理与 DSmT 的测量与联合相结合,用来处理模糊不清和相互冲突问题。

16.6.4 DSmT 与中智逻辑在 Kripke 结构中的结合

我们首先给出 Dezert-Smarandache 理论与中智逻辑的一个可能的联系。

设 $S_{\mathrm{DSm}} = \{S, \mathrm{Bel}', \pi\}$ 是 DSm 结构,$S_K^{NL} = \langle S, \mathrm{R}, \boldsymbol{\pi} \rangle$ 为中智命题所对应的 Kripke 结构。因此,我们定义一个一般的中智结构为 $S_N = \{S, \mathrm{Bel}', R, \boldsymbol{\pi}\}$,其中:

- $S = \{s_1, s_2, s_3, \cdots\}$,所有可能域的集合;
- Bel',D^S 的信度测量,其中 D^S 是 S 的超幂集;
- $\mathrm{R} \subseteq S \times S$,表示可达性关系[①];
- $\boldsymbol{\pi} = (\pi_T, \pi_I, \pi_F)$是对可能域命题的中智赋值,也就是 $\pi: (S \to P) \to \|^-0, 1^+\|$。其中,$\pi$ 可以是 π_T, π_I, π_F 中的任意一个,$P = \{p_1, \cdots, p_n\}$是一组命题变量。

为了解释这一结构,我们需要用一系列的公式规则来说明(如同文献[4]的信度和概率)。这可通过给可达性关系 R 加以一定的表现智能体的中智条件来获得。

因此,该一般性结构的目标是协调以下四个方面:(1)DSmT 作为一种对认知不确定性和本体不确定性的建模工具;(2)情景表达的可能域;(3)中智逻辑作为一种独立处理真、假和不确定问题的一般逻辑方法;(4)Kripke 结构作为选择相互影响智能体的一种推理和建模的工具。

---

① 由于扩展到多智能体情况很繁琐,这里只考虑单一智能体情形。

最后我们注意到，尽管可以找到其中的联系并且将其表示出来，但仍存在一个不可忽略的中智赋值($\pi_T(s)(\phi)$，$\pi_F(s)(\phi)$，$\pi_I(s)(\phi)$)的优先级问题，这就是对真、假和不确定表达的量化，以及通过在 DSmT 中提出的一般信度函数 Bel$'$对相应可能域信度的确定。

16.7 结论

在本章中，我们讨论了中智学及其解决情景分析问题的能力。我们特别强调了指导情景分析建模的中智学的四条基本原则：(1)允许对产生的不确定问题进行陈述；(2)语境化；(3)论域的扩充；(4)允许自动参照。DSmT 以及中智逻辑的优势就在这四条原则之中。特别地，我们强调了中智逻辑调和不确定性的定性方面和定量方面的能力。在情景分析(SA)中将实体与认知障碍区别开来的前提下，我们进一步展示了基于幂集的 Dempster-Shafer 理论(事实上是一种认知理论)和基于更丰富的超幂集的 Dezert-Smarandache 理论(可以应对 SA 中的认知方面和实体方面的一些问题)。我们先介绍了超幂集与 Kripke 结构的关系，一种用来进行自动参照的建模；然后重点介绍了 Kripke 结构，SA 中的一种合适的推理方法。特别地，我们证明了在可能域语义学和经典概率与 Dempster-Shafer 结构扩展的基础上，构建 DSm 结构是可行的。考虑到中智逻辑，我们证明了用中智命题(即超实距离的三元赋值)对 Kripke 结构进行扩展是可能的。我们还介绍了如何用可能域中超实真值(分别是虚假和不确定)赋值去表征信任和知识的概念。这就允许我们对信任和知识之间的区别给出清晰的定性表述，而在传统的认知逻辑框架中这种表述是不清晰的。最后，在 Kripke 语义框架中，给出了中智逻辑和 DSmT 的关系。

参 考 文 献

[1] Endsley M. R. Garland D. J., *Situation Awareness Analysis and Measurement*, Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, 2000.

[2] Roy J., *From data fusion to situation analysis*, in Fourth International Conference on Information Fusion (ISIF, ed.), vol. II, (Montreal, Canada), pp. THC2-3- THC2-10, 2001.

[3] Halpern J. Y., Moses Y., *Knowledge and common knowledge in a distributed environment*, Journal of the Association for Computing Machinery, vol. 37, no. 3, pp. 549-587, 1990.

[4] Fagin R., Halpern J. Y., *Uncertainty, belief and probability*, Computational Intelligence, vol. 7, pp. 160-173, 1991.

[5] Bundy A., *Incidence calculus*, The Encyclopedia of AI, pp. 663-668, 1992.

[6] Nilsson N. , *Probabilistic logic*, Artificial Intelligence. vol. 28, no. 1, pp: 71-87, 1986.

[7] Dempster A. , *Upper and Lower Probabilities Induced by Multivalued Mapping*, *Ann. Math. Statist.*, vol. 38, pp. 325-339, 1967.

[8] Shafer G. , *A Mathematical Theory of Evidence*, Princeton University Press, 1976.

[9] Smarandache F. , *Neutrosophy, a New Branch of Philosophy*, 1991. Personal communication.

[10] Smarandache F. , *Neutrosophic Logic -a Unifying Field in Logic*, 1991. Personal communication.

[11] Smarandache F. , *A Unifying Field in Logics: Neutrosophic Logic, Neutrosophie Probability, Neutrosophic Set*, tech. rep. , Western Section Meeting - Meeting n° 951 of the American Mathematical Society, Santa Barbara, 2000.

[12] Pew R. W. , *The state of situation awareness measurement; heading toward the next century*, in Situation Awareness Analysis and Measurement (M. Endsley and D. Garland, eds.), pp. 33-50, Mahwah, New Jersey: Lawrence, Erlbaum Associates, 2000.

[13] TTCP C3I Information Fusion Action Group (AG-2), Information fusion definitions, concepts and models for coalition situation awareness, tech. rep. , february 2002.

[14] Pitt D. , *Mental representation*, in The Stanford Encyclopedia of Philosophy (E. N. Zalta, ed.), winter 2002 edition ed. , 2002.

[15] Audi R. , *Epistemology: A contemporary introduction of the theory* of *knowledge*, Routledge Contemporary Introductions to Philosophy, London, UK: Routledge, second ed. , 2003.

[16] White F. E. , *Data fusion lexicon*, Joint Directors of Laboratories, Technical Panel for C3, Data Fusion Sub-Panel Naval Ocean Systems Center, San Diego, 1987.

[17] Steinberg A. N. , Bowman C. L. , White F. E. , *Revision to the JDL data fusion model*, in Joint NATO/IRIS Conference, (Quebec City), October 1998.

[18] Steinberg A. N. , Bowman C. L. , *Revisions to the JDL data fusion model*, in Handbook of Multisensor Data Fusion (D. L. Hall and J. Llinas, eds.), The Electrical Engineering and Applied Signal Processing Series, pp. 2-1-2-19, Boca Raton: CRC Press, 2001.

[19] Jousselme A. -L. , Maupin P. , Bossé E. , *Uncertainty in a situation analysis perspective*, in Proceedings of 6th Annual Conference on Information Fusion, (Cairns, Australia), pp. 1207-1214, July 2003.

[20] Bronner G. , *L 'incertitude*, vol. 3187 of Que sais-je?, Paris: Presses Universitaires de France, 1997.

[21] Rescher N. , *Predicting the Future: An Introduction to the Theory of Forecasting*, State University of New York Press, 1997.

[22] Fagin R. , Halpern J. Y. , *Belief, awareness, and limited reasoning*, Artificial Intelligence, vol. 34, no. 1, pp. 39-76, 1988.

[23] Kleene S. C. , *On a notation for ordinal numbers*, Journal of Symbolic Logic, vol. 3, no. 1, pp. 150-155, 1938.

[24] Bochvar D. A. , *Ob odnom tréhznacnom iscislénii i égo priménénii k analizv paradosov klassièéskogo rasširennogo funkcjonal'nogo isèislénia (on a three-valued calculus and its application to analysis of paradoxes of classical extended functional calculus)*, Matématicéskij Sbornik, vol. 4, no. 2, pp. 287-308: 1938.

[25] Halldèn S. , *The logic of nonsense*, Uppsala, Finland: Uppsala Universitets Arsskrift. , 1949.

[26] Theodorakis M. , *Contextualization: An Abstraction Mechanism for Information Modeling*, PhD. Thesis, University of Crete- Department of Computer Science, 2001, 186 pages.

[27] Brézillon P, *Context in problem solving: A survey*, The Knowledge Engineering Review, vol. 14, no. 1, pp. 1-34, 1999.

[28] Rantala V., *Impossible world semantic and logical omniscience*, Acta Philosophica, vol. 33, no. 1, pp. 106-115, 1982.

[29] Lucas C., *A logic of complex values*, in Proceedings of the First. International Conference on Neutrosophy, Neutrosophic Logic, Neutrosophic Set, Neutrosophic Probability and Statistics (F. Smarandache, ed.), pp. 121-138, 2001.

[30] Liu F., *Name, denominable and undenominabte - On neither < A > nor < Anti-A >*, in Proceedings of the First International Conference on Neutrosophy, Neutrosophic Logic, Neutrosophic Set, Neutrosophic Probability and Statistics (F. Smarandache, ed.), pp. 107-113, 2001.

[31] Liu F., *Comments on neutrosophy*, in Proceedings of the First International Conference on Neutrosophy, Neutrosophic Logic, Neutrosophic Set, Neutrosophic Probability and Statistics (F. Smarandache, ed.), pp. 129-146, 2001.

[32] Gupta A., *Truth*, in The Blackwell Guide to Philosophical Logic (L. Gobble, ed.), Blackwell Philosophy Guides, pp. 90-114, Oxford, UK: Blackwell Publishers, 2001.

[33] Dezert J., *Foundations for a new theory of plausible and paradoxical reasoning*, Information & Security: An International Journal, vol. 9, pp. 13-57, 2002.

[34] Aczel P., *Lectures on non-well-founded sets*, in CLSI Lecture Notes, vol. 9, Harward University Press, 1987.

[35] Barwise J., Etchemendy J., *The Liar. An Essay on Truth and Circularity*, Oxford, UK: Oxford University Press, 1987.

[36] Irvine A. D., *Russell's paradox*, in The Stanford Encyclopedia of Philosophy (E. N. Zalta, ed.), summer 2003 edition ed., 2003.

[37] Moss L. S., *From Hypersets to Kripke Models in Logics of Announcements*, 1999, JFAK- CD-ROM-http://www, illc. uva. nl/j50/contribs/moss/.

[38] Gerbrandy J., *Bisimulations on Planet Kripke*, PhD thesis, ILLC/Department of Philosophy-University of Amsterdam, 1999.

[39] Dezert J., *Fondations pour une nouvelle théorie du raisonnement plausible et paradoxal, application à la fusion d'informations incertaines et conflictuelles*, Tech. Rep. RT 1/06769/DTIM, ONERA-Département traitement de I'information et modélisation, 2003.

[40] Kripke S. A., *Semantical analysis of modal logic I- Normal modal propositional calculi.*, Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, vol. 9, pp. 67-96, 1963.

[41] Dalla Chiara M. L., Giuntini R., *Quantum logics*, in Handbook of Philosophical Logic (D. Gabbay, ed.), Dordrecht: Kluwer, 2001.

[42] Halpern J. Y., *Reasoning about knowledge: A survey*, in Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming (D. Gabbay, C. J. Hogger, and J. A. Robinson, eds.), vol. 4, pp. 1-34, Oxford, UK: Oxford University Press, 1995.

[43] Bundy A., *Incidence calculus: A mechanism for probabilistic reasoning*, Journal of Automated Reasoning, vol. 1, pp. 263-283, 1985.

第17章 DSmT在地表覆被变迁预测中的应用

Samuel Corgne[①], Laurence Hubert-Moy
COSTEL, CNRS UMR LETG 6554, Univ. Rennes 2
Place du recteur Henri Le Moal
35043 Rennes, France

Grégoire Mercier
TAMCIC, CNRS FRE 2658 team TIME
GET/ENSTB, Technopole Brest-Iroise
CS 83818, F-29238 Brest Cedex, France

Jean Dezert
ONERA
29 Av. de la Division Leclerc
92320 Châtillon, France

摘要:本章介绍DSmT在环境方面的应用——地表覆被预测。在冬季对地表覆被中土地规模的预测,对于减少农业密集地区的裸露土地面积很有帮助。随着地表覆被证据源之间的冲突增加,利用DS证据理论进行融合处理有一定的局限性。一些改进的方法或许有用,如加权或Hedging方法,但是由于冲突本身并不能解释所有的错误结论,这些改进方法的效果并不明显。事实上,所有的证据源可能一起导致一个错误的结论。因此,有必要提出一种自相矛盾信息,所有被采用的证据都是在DST框架下根据"裸露土壤"和"覆盖土壤"的假设来加以限定。通过对几种方法的研究,我们根据DST的幂集定义出DSmT超幂集的信度赋值,这些巧妙的信度赋值产生了更好的对裸露土地的预测结果。

17.1 引言

在农业密集地区,在冬季的几个月里减少土地裸露的面积可以提高该地区的水质涵养。本文有关土地使用情况和地表覆被变迁的知识,以及土地规模预测对

---

① Samuel Corgne也属于TAMCIC, CNRS FRE 2658和法国Bretagne, TIME, GET/ENST团队成员。

于减少裸露土壤面积问题的研究都是必要的。地表覆被预测有助于使土地持有者将水质管理计划集中于未来裸露可能性高的地区。对于地表覆盖状态的预测，需要确定促使地表覆盖分布状态改变的主要因素并对其加以描述。由于在连续两个冬季致使地表覆盖状态发生改变的主要因素通常都不一样，建立预测模型时就引入了不确定信息。

在以往的研究中，应用DS理论的短期预测被模拟出来，并以此来估计农业相对密集地区（以61.5km^{2}为分界线[1]）的地表覆盖状态在冬季的分布。这片被研究的区域位于法国南部，每年在冬季水下渗之前会产生大量的氮气。当证据之间的冲突增加时，利用DS理论进行的信息融合存在局限性。在此基础上可以做一些改进（如信息源加权或Hedging方法），但是在即将要研究的问题上并无太大用处。证据源间的冲突本身似乎并不能解释所有错误的结论。实际上，所有的证据可能一起导致一个错误的结论。所以，自相矛盾信息被引入到证据中以期待提高预测的正确性。

在最初的应用研究中，利用DSmT进行信息融合比DST得到的结果要稍好一点。但是，“裸露土壤”的正确预测率仍然低于40%。因此，需要提出一种特殊方法来提高“裸露土壤”的正确预测率。在该应用中，所采用的证据源仍然在DS理论的框架下来定义假设“裸露土壤”和“覆盖土壤”。根据统计分析和专家知识确定的质量函数赋值被用来定义假设的可信度，但是高冲突证据源之间需要一个最好的质量因子和一个“前后关联”的融合方法来有效地处理不确定性和自相矛盾。

本章主要集中阐述DSmT在冬季地表覆盖预测这个问题中的应用，通过证据转换来解决似是而非和自相矛盾的推理。在研究某些观点的基础上，我们的目的是通过对DST的原幂集定义DSmT的超幂集的信度赋值来提高土地覆被的预测率。首先，我们主要解决对造成地表覆被改变的主要因素的确定和其影响力的等级划分。然后，我们将DSmT方法得出的地表覆盖预测模型与DST方法得出的模型进行比较，从而证明在环境预测问题上，DSmT比DST有更强的适应性。

17.2 信息源的确定

与两种假说相对应，冬季的地表覆盖情况从遥感图像上被分为两类：裸露土壤和覆盖土壤。融合过程中每种假设证据源的确定取决于研究期间（1996—2003）冬季造成地表覆盖状况改变因素的确定并对其进行等级划分。

17.2.1 促使地表覆盖状态改变因素的确定

冬季，在农业密集地区，高度的时空变化是地表覆盖改变的特征。这些时空的

变化由很多因素(经济、社会、政治和环境的限制)造成,因此需要在建立模型阶段仔细地加以定义。对致使地表覆盖状态改变因素的确定,需要我们长期跟踪土地的使用情况。我们得到了由 10 幅卫星图片构成的一组图像(9 张卫星定位跟踪图像和 1 张 IRS-LISS Ⅲ图像,即从 1996 年连续 5 年,每年两张),并对其进行了预处理和分类。通过将所有图像进行融合和分类,得到了冬季地表覆盖状态的变化轨迹[2]。所有数据都在 GIS(地理信息系统)中进行综合,以此来确定农作物的轮种情况和冬季土地规模的变化。统计分析并结合农业专家的意见得到了造成地表覆盖状态改变的四个主要因素,即土地面积、农作物连种、土壤环境作用以及土地与农场建筑物之间的距离。所有的这些因素解释了冬季地表出现"裸露土壤"和"覆盖土壤"分布的原因。为对地表覆盖状态进行预测(给出证据源的质量信度赋值),还需要在信息融合过程中对所有的因素进行重要性的等级划分,来获得每个因素的"权重"。

17.2.2　造成地表覆盖变化因素的等级划分

那些证据变量的交互信息被用来确定地表覆盖变化因素的等级。这些交互信息分析是以信息论为根据的[3]。它们被用来描述变量之间的关系[4]。在本项研究中,我们选择了三个指标来阐述这些因素之间的关系,通过它们对冬季地表覆盖状态演变进行更明晰的描述。

(1) 熵 $\mathscr{H}$。信息熵的主要概念是:当所有事件均匀分布时,信息量最大。它可用来计算一组事件的信息量,有

$$\mathscr{H} = \sum_{i=1}^{N} p_i \log p_i$$

式中:N 是可能事件的个数;p_i 是事件 i 可能发生的概率。

(2) 交互信息 $\mathscr{I}$。它表示两个变量 X 和 Y 之间的交互信息。它可以通过 X 与 Y 的熵的差异和 X 与 Y 的交互熵 $\mathscr{H}(X,Y)$ 得到,计算公式为

$$\mathscr{I}(X,Y) = \mathscr{H}(X) + \mathscr{H}(Y) - \mathscr{H}(X,Y)$$

(3) 冗余 $\mathscr{R}$。它由熵和交互信息表示,用来衡量两个变量 X 和 Y 的差异率,即

$$\mathscr{R} = \frac{\mathscr{I}(X,Y)}{\mathscr{H}(Y)}$$

该过程提供了一种用变量解释来获得对证据变量进行信息量分级的方法。交互信息测试结果(见表 17.1)表明,最具代表性的因素是"农作物轮作(1996—2002)",其次是"土地面积",再次是"农业环境作用",最后是"与农场建筑物的距离"。这些结果在与根据经验得到的"专家意见"作对比的基础上,能够对"裸露土壤"和"覆盖土壤"假设的质量信度赋值进行优化。

表 17.1 用交互信息分析方法对各因素的等级划分

	类 别	N_F(%)	$\mathscr{R}$	$\mathscr{I}$
与农场建筑物的距离	1:<1.25	1255(67.6%)	0.14%	0.0006
	2:>1.25	601(32.4%)		
农业环境作用	1:without	1619(87.2%)	0.2%	0.0008
	2:with	237(12.8%)		
土地面积	1:<1.5ha	1517(81.7%)	0.97%	0.0039
	2:>1.5ha	339(18.3%)		
农作物轮作(1996—2002)	1:(SC W)	1046(56.4%)	5.19%	0.0211
	2:(BS 1W)	301(16.2%)		
	3:(BS 2W)	186(10%)		
	4:(BS 3W)	179(9.64%)		
	5:(BS 4W)	89(4.8%)		
	6:(BS 5W)	55(2.96%)		

表 17.1 中，N_F(%)栏表示农田的 N_F 数量和它在所有被研究农田中所占的比例。第 5 栏[①]给出了冗余度 $\mathscr{R}$ 的大小，第 6 栏[②]给出了交互信息 $\mathscr{I}$ 的大小。在表 17.1 的最后一行(即 1996—2000[③] 年期间的农作物轮作)，六种情况的含义对应如下：

(1)(SC W)：所有冬季土壤皆有覆被。

(2)(BS 1W)：一个冬季土壤裸露。

(3)(BS 2W)：两个冬季土壤裸露。

(4)(BS 3W)：三个冬季土壤裸露。

(5)(BS 4W)：四个冬季土壤裸露。

(6)(BS 5W)：五个冬季土壤裸露。

17.3 基于 DST 的地表覆被预测

由 Dempster 提出的证据理论在 1976 年被 Shafer 加以改进，该理论的基本思

① 原文如此，正确表述应为：第 4 栏——译者注。
② 原文如此，正确表述应为：第 5 栏——译者注。
③ 原文有误，正确表述应为：2002。——译者注。

想经常被使用[5,6]。文献[7]介绍了 DST 的详细应用。我们之前对 DS 理论的应用研究[1]表明有 45%的证据源高度冲突并且产生无法预测的结果。当证据间的冲突($k < 0.6$)增长时,预测性能会随之变差。在我们所研究的例子中,当证据之间存在强烈的冲突时,只有 75%的地表覆盖状态得到了正确的预测。对比之下,当冲突不那么强烈($k < 0.2$)时,情况则比较好(91%的正确预测率)。

文献[8,9,10,11]分别介绍了针对不同冲突源采用不同融合算子的几种有效方法。虽然对融合阈值进行调整在一些应用中能够取得成功,但是万全的方法是不存在的。为了处理信息源之间的冲突,我们采用了一种证据弱化方法。

17.3.1 基本信度赋值

基本信度赋值(成员作用形态)由专家提出并通过证据分布图(图 17.1)进行选择。根据以往的观测数据和专家知识,将它们进行调整并得到了验证。表 17.2 列出了信度质量对不确定信息进行调整的作用。对每一个证据,用符号 B 代表"裸露土壤",C 代表"覆盖土壤",$B \cup C$ 代表"裸露土壤或覆盖土壤"。用它们对假设 B、C 或 $B \cup C$ 中的某一个进行分类。

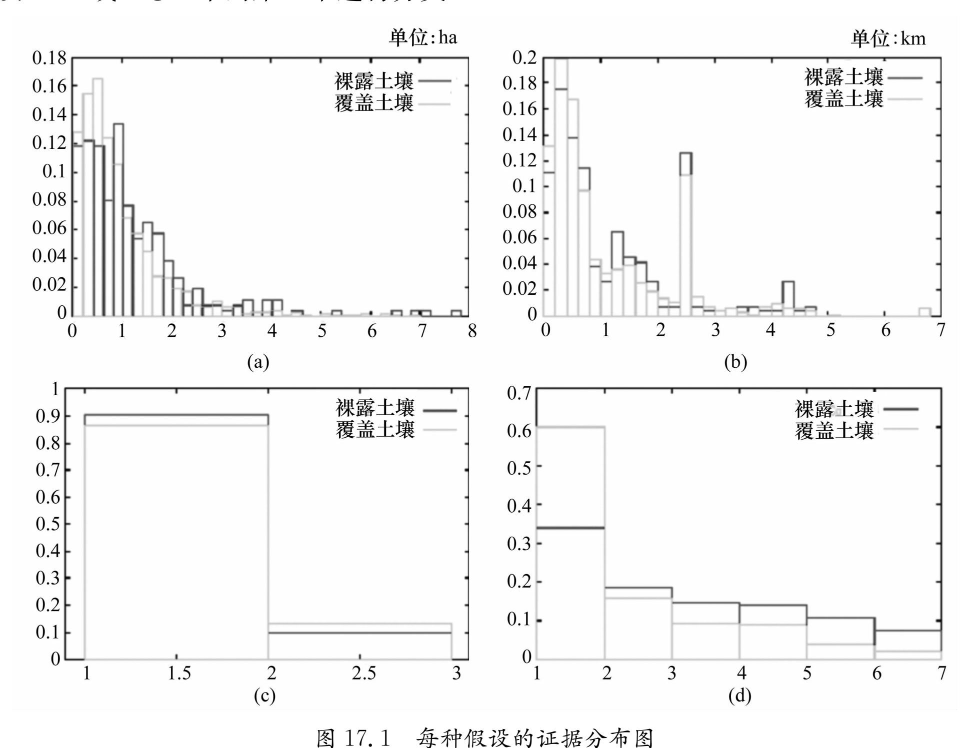


图 17.1 每种假设的证据分布图

(a) 土地面积;(b) 与农场建筑物的距离;(c) 农业环境作用;(d) 农作物轮作。

表 17.2　信度质量对 DS 理论的作用

	类别	假设 B	假设 C	假设 $B \cup C$
与农场建筑物的距离	1:<1km	0.3	0.5	0.2
	2:>1km	0.6	0.2	0.2
农业环境作用	1:without	0.6	0.3	0.1
	2:with	0.005	0.95	0.045
土地面积	1:<1.5ha	0.2	0.5	0.3
	2:>1.5ha	0.65	0.2	0.15
农作物轮作（1996—2002）	1:(SC W)	0.005	0.95	0.045
	2:(BS 1W)	0.01	0.9	0.09
	3:(BS 2W)	0.25	0.7	0.05
	4:(BS 3W)	0.45	0.4	0.15
	5:(BS 4W)	0.65	0.3	0.05
	6:(BS 5W)	0.85	0.1	0.05

17.3.2　用证据弱化调整冲突

1. 基本原理

证据弱化方法（也就是第 1 章介绍的折扣技术）在于考虑证据的可靠性，对每个证据设置一个可靠因子 $\alpha(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$。当 $\alpha = 1$ 时，表示该证据是完全可信的；相反，当 $\alpha = 0$ 时，表示该证据完全不可信。衰减规则如下：

$$\begin{cases} m'(A) = \alpha m(A) \ (\forall A \neq \Theta) \\ m'(\Theta) = (1-\alpha) + \alpha m(\Theta) \end{cases}$$

当证据间的冲突过大时（相对于一个阈值，比如 $k < 0.4$），需要采用弱化方法。下面是要遵循的两条规则。

（1）α 被设定为某一个值，使证据源不会影响最后的结论。于是有

$$\begin{cases} m'(\theta_{\text{bare soil}}) & = 0.01 \\ m'(\theta_{\text{covered soil}}) & = 0.01 \\ m'(\theta_{\text{bare soil}} \cup \theta_{\text{covered soil}}) & = 0.98 \end{cases}$$

（2）α 被设定为一个与冲突程度 k 相关的值，使冲突越严重弱化程度也越强。我们定义两个证据源之间的冲突为

$$k = \sum_{A \cap B \neq \varnothing} m_1(A) m_2(B)$$

2. 结果和部分结论

比起 DST 的简单应用，采用上述改进的 DST 方法所得的对“裸露土壤”的预

测结果要稍好一些。应用改进的方法，有 83 块农田的预测是正确的；而单纯采用 DST 时，预测正确的农田只有 73 块。但是对预测结果的分析显示，当“裸露土壤”的假设发生错误时，证据间的冲突并不一定发生。同时，信度区间的设定对预测的正确性并没有帮助。因此，证据源之间的不确定性必须在融合过程中加以考虑。这也是为什么要转向 DSmT 来处理预测过程以应对证据间的冲突。

17.4 采用 DSmT 的地表覆盖预测

DSmT 可以看作是广义的 DST。在这个新的证据理论中，对不确定和自相矛盾信息的组合规则参见本书第 1 章和文献[12]。最简单的鉴别框架 $\Theta=\{\theta_{\text{bare soil}},\theta_{\text{covered soil}}\}$ 只包含 $\theta_{\text{bare soil}}$ 和 $\theta_{\text{covered soil}}$ 两个基本假设。DSm 理论用对自相矛盾信息的认可来处理新的基本信度赋值 $m(\cdot)\in[0,1]$，即

$$m(\theta_{\text{bare soil}})+m(\theta_{\text{covered soil}})+m(\theta_{\text{bare soil}}\cup\theta_{\text{covered soil}})+m(\theta_{\text{bare soil}}\cap\theta_{\text{covered soil}})=1$$

最近，由 DSmT 理论的创作者提出的一种混合组合规则已被发布（见第 4 章）。采用混合 DSm 组合规则，自相矛盾和不确定信息的融合将独立信息源的质量与数据组的动力学结合起来考虑。因此，混合 DSm 模型可看作是介于 DST 和 DSmT 之间的一种模型。混合模型处理超幂集的能力使得它成为众多信息融合方法中的一个有趣的选择。

17.4.1 质量信度赋值

1. 模糊质量信度赋值

质量信度赋值仍然遵循 DS 理论中的定义和方法。不过，由于“土地面积”和“与农场建筑物的距离”这两个变量的特殊性（图 17.1），在对它们进行处理时，模糊质量信度赋值更加适用。例如，对于“土地面积”这个变量来说，土地面积的变化为从 0.05 公顷到 7.7 公顷。那么，当专家为我们提供了阈值后，通过结合自相矛盾信息，一条连续的质量信度赋值假设似乎对融合过程是合适的。质量信度赋值是通过将实际的双水平线信度赋值平滑后得到的（图 17.2）。

2. 证据源前后关联的弱化

由于证据间的冲突程度并不一定包含在“裸露土壤”的错误预测中，需要提出一种证据源前后关联弱化的策略，该策略取决于我们所要下的结论。实际上，我们认为，当我们预测的结论是“裸露土壤”时，如果农作物轮作符合第 1 类或者第 2 类的状况，土地面积和与农场的距离这两个变量是完全矛盾的。当我们预测的结论是“覆盖土壤”时，如果农作物轮作间隔超过 3 类（至少有两个冬季为裸露土壤），则所有的证据都互相矛盾。

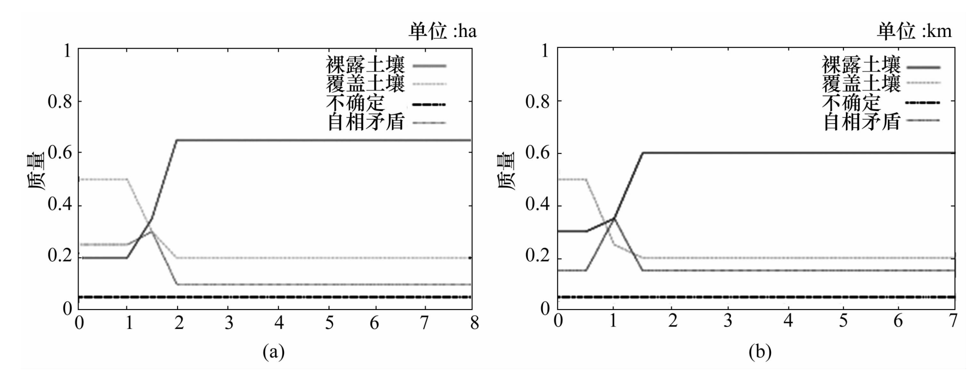


图 17.2 “距离”和“土地面积”证据的模糊质量信度赋值

（a）土地面积；（b）与农场建筑物的距离。

为了使证据源互相矛盾，采用的部分弱化方法如下：

$$\begin{cases} m'(\theta_{\text{bare soil}}) & = \alpha\, m(\theta_{\text{bare soil}}) \\ m'(\theta_{\text{covered soil}}) & = \beta\, m(\theta_{\text{covered soil}}) \\ m'(\theta_{\text{bare soil}} \cup \theta_{\text{covered soil}}) & = m(\theta_{\text{bare soil}} \cup \theta_{\text{covered soil}}) \\ m'(\theta_{\text{bare soil}} \cap \theta_{\text{covered soil}}) & = 1 - \alpha\, m(\theta_{\text{bare soil}}) - \beta\, m(\theta_{\text{covered soil}}) - m(\theta_{\text{bare soil}} \cup \theta_{\text{covered soil}}) \end{cases}$$

为了有助于自相矛盾的信息源，数据对$(\alpha,\ \beta)$容许将假设的质量删除。如果农作物的轮作间隔为 1 类或 2 类（裸露土壤不超过一个冬季），并且预测结论为“裸露土壤”，则$(\alpha,\ \beta)=(0.1,\ 1)$。如果农作物轮作的间隔大于或等于 3 类（至少有两个冬季为裸露土壤），且预测结论为“覆盖土壤”，则$(\alpha,\ \beta)=(1,\ 0.1)$。

17.4.2 结果

考虑前后关联的 DSm 融合规则在对“裸露土壤”预测的应用中产生了更好的结果，121 块农田得到正确预测（见表 17.3）。而应用 DS 和证据弱化方法的正确预测分别是 73 块和 84 块。“裸露土壤”的假设仍然产生了许多错误的预测，这种情况在“覆盖土壤”的假设中是不存在的。一些因素可以说明“裸露土壤”假设的正确预测率低的原因。土壤是否裸露是和土地使用状况紧密联系在一起的。实际上，有大量的土地在 4 年或者 5 年里都被草地覆盖，却在一个轮作周期里在秋天被犁为一片土地。这种变化情况很难建模，因为它与人为的决定或者个别异常的天气事件有关。预测结果的空间分布可以用表 17.3 中的数据加以分析。分界线的西边比东边对应于更加密集的农业区。在强调前后关联的系统中，地表覆被的变化更大，而且这种变化更多地受到经济行为的限制，也更难于模拟。相比之下，分界线的南部主要是乳品生产区。在这个地区，土地的变化更容易被预测，而且和农作物的轮作紧密相关。总之，DSm 理论更加容易，预测的正确率也更高。

表 17.3　混合 DSm 规则对地表覆被状态的预测结果①

	2001/2002 年冬季土地使用状况(来自遥感数据)	地表覆被(百分比)
裸露土壤	266 块	121 块(0.46%)
覆盖土壤	1588 块	1239 块(0.78%)
总计	1854 块	1360 块(0.73%)

图 17.3 所示为采用混合 DSm 规则在 Yar 分界线(布列塔尼)上的预测结果。

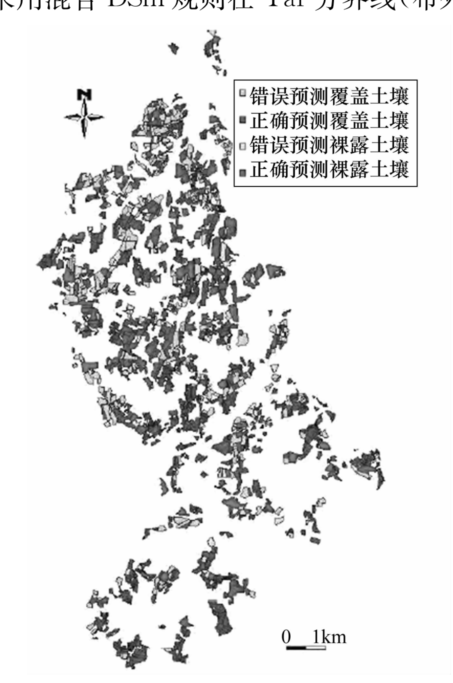


图17.3　采用混合 DSm 规则在 Yar 分界线(布列塔尼)上的预测结果

17.5　结论

本章针对环境问题在分界线上的土地覆盖预测项目进行了两项研究和分析。随着支持土地覆盖假设证据源冲突的不断增加,采用 DS 的土地覆盖预测被证明有局限性。一些改进方法(如加权或 Hedging 方法)在我们的研究中没有取得预期的效果。为了处理冲突问题,DSm 进行了小的预测精度的改善。实际上,冲突

① 原书表 17.3 有误。0.46%应为 46%;0.78%应为 78%;0.73%应为 73%。——译者注。

本身可能无法解释所有错误的结果，因为错误结果可能是由所有的证据源一起导致的。这就是为什么在信息源互相矛盾和/或不确定的环境问题中，考虑前后关联的融合规则是必要的。这种新的融合方法首先要求对促使土地覆被变迁因素的认识。然后，通过专家知识和对证据源分类交叉信息的分析，对“覆盖土壤”和“裸露土壤”两个假设进行质量信度赋值。一种对两种信息源的模糊处理方法和对信息源的不确定性与自相矛盾特征进行分类的“前后关联”的组合规则被应用于 DSm 决策过程。该方法对“裸露土壤”的预测结果仍然会有许多错误，但比 DS 决策规则的预测要好(前者的正确率为 46 %，而后者的正确率只有 36%)。对“覆盖土壤”的正确预测率为 78%。两种不同假设产生不同的结果可由分界线上裸露土壤的弱化率，特别是位于分界线西北部的集约农业系统土地覆被变迁的高可变性来解释。然而，融合过程表现出良好的鲁棒性，也不需要输入精确的数据。因此，DSm 理论的预测系统可以适用于布列塔尼半岛的不同区域，并且提供了评估和规划土地利用的有用工具。土地利用知识是恢复密集型农业区水质的关键之一。

致谢

本研究工作经费由 PNTS(Programme National de Télédétection Spatiale)和布列塔尼区议会(Conseil Régional de Bretagne)提供。我们感谢 Chambre d'Agriculture des Côtes d'Armor 和 Communauté d'agglomération de Lannion 在土地变迁因素的认识和预测结果认证方面提供的帮助。

参考文献

[1] Corgne S., Hubert-Moy L., Dezert J., Mercier G., *Land cover change prediction with a new theory of plausible and paradoxical reasoning*, Proc. of the Information Fusion Conference, Fusion 2003, Cairns, Australia, 8-11 July 2003, pp. 1141-1148.

[2] Hubert-Moy L., Quêté Y., Billot M., Corgne S., *Trajectories of land-cover-change in intensive agricultural regions: a short-time predictive approach with the dempster-shafer theory*, Proceedings of the First International Workshop on the Analysis of Multi-temporal Remote Sensing Images, World Scientific Co. Pte. Ltd, 2001, pp. 403-414.

[3] Shanon C., Weawer W., *The mathematical theory of communication*. University of Illinois Press, 1949.

[4] Baudry J., Al Jallad A., *La théorie de l'information: un outil d'analyse des liaisons entre les variables*, Rapport CERESA, 1992.

[5] Richards J., *Remote Sensing Digital Image Analysis: an introduction*, 2nd ed. Berlin: Springer- Verlag, 1993.

[6] Srinivasan A., Richards J., *Knowledge-based techniques for multi-source classification*, International Journal of Remote Sensing, vol. 11, no. 3, pp. 505-525, 1990.

[7] Mertikas P., Zervakis M., *Exemplifying the theory of evidence in remote sensing image classification, international journal of remote sensing classification*, International Journal of Remote Sensing, vol. 22, no. 6, pp. 1081-1095, 2001.

[8] Yager R. R., *Entropy and specificity in a mathematical theory of evidence*, Int. J. General Systems, vol. 9, pp. 249-260, 1983.

[9] Smets Ph., *Constructing the pignistic probability function in a context of uncertainty*, Uncertainty in Artificial Intelligence, M. Henrion, R. Shachter, L. Kanal, and J. Lemmer, Eds., 1990, pp. 29-40.

[10] Cholvy L., *Towards another logical interpretation of theory of evidence and a new combination rule*, Proc. of the IPMU, 1-5 July 2002.

[11] Dubois D., Prade H., *Representation and combination of uncertainty with belief functions and possibility measures*, Computational Intelligence, vol. 4, pp. 244-264, 1988.

[12] Dezert J., *Fondations pour une nouvelle théorie du raisonnement plausible et paradoxal*, ONERA Tech. Rep. RT 1/06769/DTIM, 2003.

第 18 章　能量与资源感知分布式智能融合[①]

Shubha Kadambe
HRL Laboratories, LLC
3011 Malibu Canyon Rd., Malibu, CA 90265, USA

摘要:采用异质传感器、处理器和无线通信的大型分布式传感器网络(DSN)正在各种商业和军事领域得到应用。在任务执行和应用中节点能量损耗的最小化是一项保证良好性能的评价指标,它对减少装置的大小、质量和成本都是很重要的,其经济效益也是显著的。本章介绍一种鲁棒灵活的分布式智能融合算法,该算法通过有效率地利用网络感知、通信和资源处理提供了高决策精度和最小化能量损耗的方法。我们的方法是根据信息理论的基本规则,决定哪些网络资源(传感器、平台、处理器和通信)对于完成任务是必需的,而且只利用这些必需的资源。它使网络能量损耗最小化,并且在特征和决策级采用 DSmT 方法得到有价值的信息。我们论证了运用 DSN 所提出的进行目标检测和分类的最优且全自主的智能分布式融合算法。实验结果表明,采用高质量的传感器、特征和有价值的信息,我们提出的方法显著地改善了检测与分类的精度。

18.1　引言

具有多个机载传感器的廉价的、小而灵巧节点的空间分布式网络对于国防和商业应用来说是很重要的一类新兴网络系统。由于这种传感器网络是在不利的环境下采用有限的电池能量和资源有效地运行,只有在改善决策精度是有价值的前提下,合适的传感器信息分层处理和共享才是重要的,因此高精度决策过程会日益增加。一种解决该问题的方法是只激活那些提供缺失和相关信息的传感器,评估从被激活传感器得到的信息的质量(这将帮助确定传感器的质量),评价通过改善

---

① 本章部分工作由 DARPA/IXO 资助,项目编号为 F30602－01－C－0192。作者特别感谢 Sri Kumar 博士用 SensIT 项目对本项研究的赞助。

决策(如目标检测与跟踪)精度所获取信息的质量,只传送相关的高质量、有价值的信息给相邻节点,仅融合那些对改善决策有帮助和有价值的信息。信息理论方法提供了对信息的可靠性、有效性、缺失信息和信息价值等的度量。这些量化有助于相关高质量信息的分层提取,促使相关传感器的选取或激活,并动态地删除来自噪声或损质量差的传感器的信息。在融合来自邻节点的信息时,只利用有价值的信息,使决策精度和可信度得以逐步改善。本章介绍基于缺失信息(特征)和信息类型(传感器)技术的最小最大熵,基于传感器识别(即质量评估)、特征质量评估交互信息,以及交互信息和其他依靠改善决策精度来评估信息价值的内类熵。另外,我们简要地介绍高质量、相关性、有价值的信息是如何用一个新的理论——DSmT——来进行融合的。DSmT 提供了联合两个或更多动态地实时改变的独立信息源的融合规则,这是本章讨论的异质传感器网络的本质。

据作者所知,还没有关于用内类熵进行传感器识别研究的报道,但文献[2]介绍了一种利用交互信息从大一些的集合里选择特征子集的研究。本章介绍的方法是用内类熵作为量度来评估传感器的质量(好与坏)。与我们的方法不同,文献[2]的方法在特性上是静态的,而且不能处理特征集维度变化的情况。在文献[15]中,作者说明,通常情况下通过融合来自所选择传感器的数据,传感器网络的性能能够得到改善。然而与本章不同,这项研究没有具体的新的特征度量以及特征/传感器识别方法被提出。文献[10]提出了一种以信息形式表述的卡尔曼滤波器状态估计技术——费希尔和香农熵。该项研究直接从先验知识或交互信息中分离出新的信息。该分离技术在文献[10]中被用于离散数据融合算法。然而,据作者所知,还没有运用最小最大熵原理来进行特征和信息类型发掘的研究。而且,我们提出的基于融合的信息值尚未被其他人研究,这是本章的另一个重要贡献。本项研究的重要性在于特征发现和传感器识别在激活所需要的传感器和形成分布式传感器组群中的应用,从而可以减少能量消耗,改善决策精度,降低传输带宽要求。本章综合了作者在文献[6, 7, 8]中的研究,并增加了 DSmT 在特征和决策级融合的应用。

下一节介绍所提出的方法。仿真和实验结果在 18.3 节给出。结论和未来研究方向在 18.4 节介绍。

18.2 本章内容介绍

18.2.1 缺失信息的发现

在由异质传感器组成的分布式网络应用中,例如目标检测、识别与跟踪,分类,以及组合编队等,缺失信息可能对应特征发掘。它仅帮助激活能够提供缺失信息的传感器节点,从而节省了那些非随机存活节点和处于休眠模式节点的能量和处

理过程。我们应用文献[9]介绍的最小最大熵原理来进行特征发掘。对缺失信息的估计或特征发现的详细内容,以及采用最小最大熵原理的信息类型如后文所述。

1. 最小最大熵原理

令 N 个给定的值与 n 种不同的信息类相对应。设 z_{ij} 为第 i 种信息类(信息类定义为一种给出类似信息测量的传感器类型)的第 j 个量,即

$$i = 1, 2, \cdots, n \quad j = 1, 2, \cdots, m_i \quad \sum_{i=1}^{n} m_i = N \tag{18.1}$$

该类信息的熵就是

$$H = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i} \frac{z_{ij}}{T}\ln\frac{z_{ij}}{T} \quad \left(T = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i} z_{ij}\right) \tag{18.2}$$

设 $T_i = \sum_{j=1}^{m_i} z_{zj}$,则 H 可以被改写为

$$H = \sum_{i=1}^{n}\frac{T_i}{T}H_i - \sum_{i=1}^{n}\frac{T_i}{T}\ln\frac{T_i}{T} = H_{\mathrm{W}} + H_{\mathrm{B}} \tag{18.3}$$

式中:$H_i = -\sum_{i=1}^{m_i}\frac{z_{ij}}{T}\ln\frac{z_{ij}}{T}$ 是属于信息 i 的值的熵。

在式(18.3)中,H_{W} 和 H_{B} 分别是类内熵和类间熵。我们希望信息的类型尽可能地容易区分,而每一类内的信息尽可能是同质的。如果某一类的值代表类似的信息,熵就高;如果它们代表不类似的信息,熵就低。因此,我们希望 H_{B} 尽可能小,H_{W} 尽可能大。这就是最小最大熵原理。

2. 最小最大熵原理在特征发现中的应用

令 z 为缺失值(特征),T 为所有已知值的和,则所有值的和为 $T + z$。设 T_1 为 z 可能属于的信息类中值的总和,那么 $T_1 + z$ 就是该特定信息类的总和。由此得到

$$\begin{cases} H = -\sum{}'\dfrac{z_{ij}}{T+z}\ln\dfrac{z_{ij}}{T+z} - \dfrac{z}{T+z}\ln\dfrac{z}{T+z} \\ H_{\mathrm{B}} = -\sum{}''\dfrac{T_i}{T+z}\ln\dfrac{T_i}{T+z} - \dfrac{T_1+z}{T+z}\ln\dfrac{T_1+z}{T+z} \end{cases} \tag{18.4}$$

式中:$\sum{}'$ 表示除了那些与缺失信息相对应的第j 个量以外的所有第i 类信息值的总和;$\sum{}''$ 表示除了缺失信息所属类的值以外的第 i 类信息的值。

然后通过最小化 $H_{\mathrm{B}}/H_{\mathrm{W}}$ 或 $H_{\mathrm{B}}/(H-H_{\mathrm{B}})$ 或 H_{B}/H,或通过最大化 $(H-H_{\mathrm{B}})/H_{\mathrm{B}}$ 或 H/H_{B} 来估计 z。z 的估计提供了缺失信息(特征)和信息(传感器)类型。从上面的讨论中,我们可以得到特征并获得这些特征的传感器类型。这在 DSN 中可以获得合适传感器所具有的优点。信息的传递和探测可以利用网络路

由技术来实现。在试图采用通过估计信息类型(传感器)所得到的最新特征集前,最好检查一下传感器的质量,以确保用于获取信息的传感器是非噪声的(非正常运转)或已损坏的,从而减少运行成本。在 DSN 中,这是减少通信成本的一个额外优点。我们用信息理论度量中的类内熵来测定(见下一节)传感器的质量(即区分传感器的好坏)。

18.2.2 一致性测量

我们通过测量一致性来度量其合理性。由此,本节提出了一种基于类内熵的量度。设有 N 个事件(值),这些事件被分成 m 个类,假定 x_{ij} 为第 i 类的第 j 个事件($i=1,2,\cdots,m;j=1,2\cdots,n_i$),且 $\sum_{i=1}^{m} n_i = N$,则该类的熵为

$$
\begin{aligned}
H &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} p(i)p(x_{ij})\log\left(\frac{1}{p(i)p(x_{ij})}\right) \\
&= -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} p(i)p(x_{ij})\log(p(i)p(x_{ij})) \\
&= -\sum_{i=1}^{m} p(i)\sum_{j=1}^{n_i} p(x_{ij})\log(p(x_{ij})) - \sum_{i=1}^{m} p(i)\log(p(i))\sum_{j=1}^{n_i} p(x_{ij}) \\
&= \sum_{i=1}^{m} p(i)H_i - \sum_{i=1}^{m} p(i)\log(p(i)) \\
&= H_W + H_B
\end{aligned}
$$

倒数第二个等式来自 H_i 的定义,即 $H_i = -\sum_{i=1}^{m} p(i)\sum_{j=1}^{n_i} p(x_{ij})\log(p(x_{ij}))$,它代表类 i 的熵和总的概率,也就是 $\sum_{j=1}^{n_i} p(x_{ij}) = 1$。$H_W$ 称为类内熵,H_B 称为类间熵。

如果属于一个类的值或事件代表类似的信息,熵 H_W 就高,反之就低。这就意味着 H_W 能够被用来作为一种量度来定义一致性。也就是说,如果两个或更多传感器的测量很类似,则其 H_W 要比它们不类似时大。所以,这种量度可用在传感器识别中。可以注意到,虽然这里对类内熵和类间熵的定义与 18.2.1 节略有不同,但它们在概念上是类似的。同时还要注意,类内熵和类间熵中的最小最大熵量度早期用在缺失信息的估计上,但是在这里,类内熵被定义为一致性的量度标准,它可被用于传感器的识别和选择。这两种量度有着不同的物理意义,被用于不同的目的。

18.2.3 特征识别

在确定了获得缺失信息的传感器(信息类型)的质量后,就必须确保来自这个

传感器的观测值(特征)对获取信息和作出决策有帮助。这一步对估计缺失信息确实是必要的。在这一点上,我们提出了基于条件熵和交互信息的量度,将在本小节进行介绍。

1. 条件熵和交互信息

熵是对不确定性的量度。设 $H(x)$为前面观测事件 x 的熵,y 为一个新的事件。我们可以用条件熵来表示包括事件 y 的 x 的不确定性。条件熵定义为

$$H(x \mid y) = H(x, y) - H(y) \tag{18.5}$$

其中 $0 \leqslant H(x|y) \leqslant H(x)$。条件熵 $H(x|y)$表示在 y 被观察后关于 x 的不确定性剩余的总量。如果不确定性减少,那么通过观察 y 便能得到新的信息。所以,我们能够用条件熵来度量观察估计 y 的重要性。另一个能够采用的与条件熵相关的量度是交互信息 $I(x, y)$,它是一种通过观察 y 来计算的不确定性量度,被定义为

$$I(x, y) = H(x) - H(x \mid y) \tag{18.6}$$

为了解释这种量度可以被用来度量作为特征识别的估计缺失信息(也就是特征)的重要性,下面给出一个例子。

2. 基于信息熵的特征识别示例

设 $A = \{a_k\}$ $(k = 1, 2, \cdots)$为传感器 1 的特征集,$B = \{b_l\}$ $(l = 1, 2, \cdots)$为传感器 2 的特征集;$p(a_k)$为特征 a_k 的概率,$p(b_l)$为特征 b_l 的概率;$H(A)$、$H(B)$、$H(A|B)$分别为传感器 1、传感器 2 和传感器 1 给予传感器 2 的熵,它们由下式定义[9]:

$$\begin{cases} H(A) = \sum_k p(a_k) \log\left(\dfrac{1}{p(a_k)}\right) \\ H(A \mid B) = H(A, B) - H(B) \\ \qquad\qquad = \sum_l p(b_l) H(A \mid b_l) = \sum_l p(b_l) \sum_k p(a_k \mid b_l) \log\left(\dfrac{1}{p(a_k \mid b_l)}\right) \end{cases} \tag{18.7}$$

式中:熵 $H(A)$是预先的不确定性,条件熵 $H(A|B)$是在观察传感器 2 的特征后不确定剩余的总量。交互信息 $I(A, B) = H(A) - H(A|B)$是通过观察 B 也即来自传感器 2 的特征所得到的不确定性。从交互信息的定义可以发现,由其解出的不确定性基本上取决于条件熵。我们来看一下节点 2 的两个传感器。设这两个传感器的特征集分别为 B_1 和 B_2,根据上一节介绍的最小最大熵原理估计的特征集为 B_1。如果 $H(A| B_1) < H(A| B_2)$,那么 $I(A, B_1) > I(A, B_2)$。这意味着通过观察 B_1 比 B_2 更有助于得到不确定性。也就是估计 B_1 确实有助于获得信息的特征值,而且对传感器 1 的决策过程有帮助,因此 B_2 没有必要被考虑。

注意，即使上面的例子为了简单起见，只考虑了两个传感器节点，但该规则可以被用在超过两个传感器的网络中。在这种的情况下，A 是一个节点的特征集，该节点是来自其他传感器组群的一个成员。B 是一个新的特征集，它来自不同的传感器类型，它还没有被接收，可能是或不是那个特定组群的成员。如果交互信息的增长包含了特征集 B，那么在它不是这个特定组群成员的情况下，我们就将该传感器作为特定组群的一部分来进行决策。如果它是其中的一个成员并且交互信息不增加，就将它从该特定组群中删除。

18.2.4　信息的测量值

本小节介绍信息的测量值，该测量值由我们提出的何时融合异质信息源来测定。该测量值有赖于改善决策精度。虽然下面介绍的数学量度并不新颖，但本章介绍的关于改善决策精度（如分类精度、检测精度）验证信息值的用法是新提出的。

1. 交互信息

在 18.2.3 节中定义的交互信息也能被用作测量值。

2. 欧几里得距离

与交互信息不同，欧几里得距离并不计算来自第二个信息源的可用信息的总量。但是，它测量欧几里得空间两个特征集的类似度。该值然后被用来决定何时融合两个信息源，它们是否来自同一个节点的不同类型传感器，或不同节点的同类型传感器。欧几里得距离可简单地由下式计算：

$$d=\sqrt{\sum_i (a_i-b_i)^2} \tag{18.8}$$

式中：a_i：b_i 和 i 在 18.2.3 节中已被定义。

3. 相关性

相关性也是一种常见的类似性量度。定义相关性的标准量度为

$$\rho=\frac{E[(a-\mu_a)(b-\mu_b)]}{E[a-\mu_a]E[b-\mu_b]} \tag{18.9}$$

式中：μ_a 和 μ_b 分别是特征集 a 和 b 的均值。注意，相关性与交互信息 $I(x,y)$ 密切相关，因为式(18.6)能够被改写为

$$I(x,y)=\sum_k p(a_k,b_k)\log\left(\frac{p(a_k,b_k)}{p(a_k)p(b_k)}\right) \tag{18.10}$$

4. Kullback-Liebler 距离

最后，Kullback-Liebler(KL)距离源于熵，也是分离两个特征集的度量标准。它被定义为

$$D=\sum_k p(a_k)\log\left(\frac{p(a_k)}{p(b_k)}\right)+\sum_k p(b_k)\log\left(\frac{p(b_k)}{p(a_k)}\right) \tag{18.11}$$

18.2.5 采用 DSmT 的融合

异质传感器节点网络已在前面讨论过，信息源是独立和动态变化的，并且以此为基础来选择传感器和特征。对于智能分布式融合，我们采用文献[5]提出的一种新的似是而非和自相矛盾的推理——DSmT 理论。该理论提供了一个混合 DSm 规则，它联合或融合了两个或更多大量独立的信息源并同时考虑到一些约束，如集合可能在某个时间为空集，而在另一个时刻为新的集合。在传感器网络节点中，这些情况会出现（有时我们会丢弃一些来自其他节点的特征集或决策，有时我们又会使用基于场景动态变化的不同类型传感器的特征），所以，这种混合 DSm 规则的应用对于融合是非常合适的。另外，由于融合不是在一个集中的位置进行，而是就地动态地融合来自邻节点的信息，因此，我们提出一种分散式动态融合方法，该方法将采用混合 DSm 规则的动态融合用于所选择的混合模型 $\mathscr{M}$。特别地，在每个传感器节点的特征级融合，在时刻 t_l 的框架为

$$\Theta(t_l) \triangleq \{\theta_1 = \text{声音传感器}, \theta_2 = \text{振动传感器}, \theta_3 = \text{红外传感器位置}\}$$

在检测应用情况下的决策级融合框架为

$$\Theta(t_l) = \{\theta_1 = \text{有车}, \theta_2 = \text{无车}\}$$

在分类应用情况下的决策级融合框架为

$$\Theta(t_l) \triangleq \{\theta_1 = \text{AAV}, \theta_2 = \text{DW}, \theta_3 = \text{HMMWV}\}$$

式中：AAV、DW 和 HMMWV 代表将要被区分的汽车类型。

检测和分类应用都在 18.3.2 节中介绍。我们获得的基本信度赋值源于以下观测：(a)特征级融合来自传感器类型；(b)在分类和检测应用的情况下，决策级融合来自提取的传感器信号特征。例如，在检测应用的情况下，如果来自声音传感器(a)的特征——能量在阈值之上，则 $m_a(\theta_1) = 0$ 且 $m_a(\theta_2) = 0$。根据上面介绍的传感器和特征选择，作为观测量的 $\Theta(t_l)$的变化是不同的，结果就有 $\Theta(t_{l+1})$。如果我们丢弃传感器的观测值（根据上面介绍的特征识别算法），Θ 就会减小，我们用混合 DSm 规则将空集变为非空集。如果我们将一个新的传感器观测值包括进来，那么我们可以用经典 DSm 融合规则来产生基本信度赋值 $m_{t_{l+1}}(\cdot)$。对于在当前节点的分散决策级融合，考虑到前一个节点获得的 $\Theta_p(t_l)$和当前节点的 $\Theta(t_l)$，通过考虑完整性约束来应用混合 DSm 规则。对于传感器间的融合和节点到节点的融合，产生的约束都不同。产生这些约束的伪码在 18.3.2 节中给出。例如，对节点到节点融合的分类应用在 18.3.2 节中也有介绍，如果前节点的分类为 $\theta_1 = \text{AAV}$（因为车辆在前节点是 AAV），那么 fuse_4class＝1 是将约束 $\theta_1 \cap \theta_2 \overset{\mathscr{M}}{\equiv} \varnothing$，$\theta_1 \cap \theta_3 \overset{\mathscr{M}}{\equiv} \varnothing$，$\theta_1 \cap \theta_2 \cap \theta_3 \overset{\mathscr{M}}{\equiv} \varnothing$ 加到当前节点，与前一个节点很靠近的当前节点的车辆一定

是 AAV。

18.3　实验细节与结果

上面介绍的算法已经用于特征发现、传感器和特征评价(识别)、传感器组群的形成和分布式智能融合,这些算法分别在仿真雷达传感器网络和实际的异质传感器网络及空间分布的传感器节点网络中得到了应用。首先,18.3.1 节给出简单的仿真雷达传感器网络的应用结果,来验证提出的概念。18.3.2 节给出采用实际的异质传感器 DSN 得到的结果。

18.3.1　仿真雷达传感器网络

该传感器网络被用来跟踪多个目标。每个传感器节点有一个基于目标跟踪系统的本地和全局的卡尔曼滤波器。这些目标跟踪系统估计出目标在笛卡儿坐标系下的状态——位置和速度。本地跟踪系统用本地雷达传感器测量设备来测量状态估计值,如果状态是一致的并且改善目标跟踪的精度,那么全局跟踪系统会融合来自其他传感器的目标状态。

为了测试本章提出的算法,采用由三个雷达传感器和一个有恒定速度的移动目标组成的网络。其中有两个传感器是好的,另一个是坏的。如果测量值被高噪声干扰(例如 SNR=-6dB)或有偏差,那么这个传感器被定义为坏的。在第一组例子中,质量好的传感器的信噪比设为 10dB。

在有偏差的传感器的仿真情况下,其偏差作为一个随机数加在目标的真实位置上。该偏差以这种方式引进来是因为与雷达传感器在方向的偏差转化为测量目标位置与实际的目标位置是不同的。另外,在我们的仿真里,假设传感器是在笛卡儿坐标系内测量目标位置,而不是极坐标系。用常数 k 乘以一个随机数,这样偏差的总量就会不同,即所测位置=(真实位置+k×随机数)+测量噪声。

首先,用最小最大熵原理寻找缺失信息,用合适的传感器来获取这种信息,然后用一致性检测(类内熵)检查新的传感器类型和从特定传感器获取的信息是否与其他传感器一致。

在下面的两幅图中,给出的类内熵用来从两个无偏差传感器以及一个有偏差、一个无偏差传感器中发现特征。测量噪声水平对三个传感器是相同的。但是,偏差 k 在图 18.1 中被设为 1.0,在图 18.2 中被设为 2。反复地采用前面提出的定义计算出类内熵。通过下面绘制的柱状图,可以估计出上述计算所需要的概率值。从这两个图中,可以发现两个无偏差传感器的类内熵要比一个有偏差、一个无偏差传感器的类内熵要大。这表明类内熵能够用来区别不同的传感器或评估传感器的质量(用来选择传感器)。

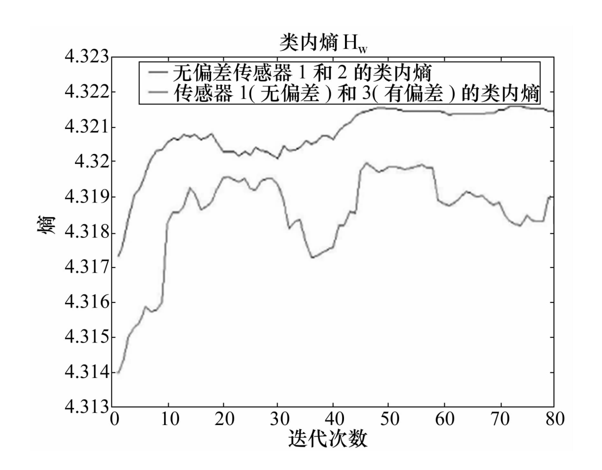


图 18.1　传感器 1 和 2(无偏差传感器)以及 1(无偏差)和 3(有偏差)的类内熵图(偏差常数 $k = 1$)

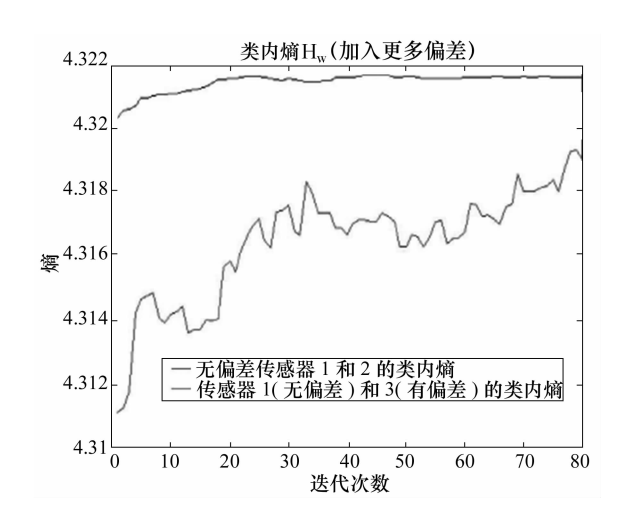


图 18.2　传感器 1 和 2(无偏差传感器)以及 1(无偏差)和 3(有偏差)的类内熵图(偏差常数 $k=2$)

接下来,前面介绍的条件熵和交互信息度量用来确保从所选择传感器得到的估计特征在决策过程中确实起到作用。

这样,每一个传感器节点采用本地卡尔曼滤波器算法,从仿真雷达的测量结果中所估计的目标状态便被用来作为特征集。在每个传感器节点得到的估计目标状态被传到其他节点。在本仿真中,为了简单起见,只考虑位置估计。

这里我们把估计状态向量作为特征集。因为仿真的目的就是证明提出的概念,在传感器是好的假设下,特征识别算法被用到传感器节点 1 上。设这个节点的状态估计输出是 A_g,第二个传感器的状态估计输出是 B_g,第三个传感器为 B_b。

从前面介绍的方程可知，熵的计算需要概率值。为了获取这些值，理想情况下，需要概率分布函数(pdfs)。但是，在实践中很难获取闭环形态的 pdfs。在缺乏实际 pdfs 知识的情况下，通常用柱状图进行估计[11]。信号与图像处理领域的研究者通常采用这项技术[13]。另一个估计概率和条件概率的实用解决方案是采用计算或频率法[12]。但是，众所周知，如果采用柱状图来获取 pdfs 的估计值，那么概率和条件概率的估计会更加精确。所以，我们在这里采用柱状图的方法。为了得到这些柱状图，一开始，我们需要一些数据(特征)来知道它是怎样分布的。为此，假设在每个传感器节点形成了 N 个初始状态估计向量，同时，该向量被传递到其他节点。同样值得注意的是，柱状图法的概率估计的精度取决于积累(训练)数据的总量。同样，对于非静态特征，它取决于柱状图的更新频度。在实际中，由于训练数据是有限的，我们在仿真中已经设定了 N 为 10。考虑到特征的非静态性，首先，我们一直等到在每个节点获得 N 个估计值；然后，用新的状态估计和前 9 个状态估计立即对柱状图进行更新，同时丢弃那些旧的特征(最旧的状态估计)。

为了得到每个特征向量出现的概率，首先计算柱状图。为此，采用的柱状图方框的大小 N_{bin} 为 5。根据最小和最大特征值来选择每个方框的中心点。在本仿真中，柱状图方框的中心被设定为

$$\min(\text{特征值}) + (0 : N_{\text{bin}} - 1) \cdot \frac{\max(\text{特征值}) - \min(\text{特征值})}{N_{\text{bin}}} \tag{18.12}$$

因为柱状图提供了给定方框中元素的数目，所以才可能从柱状图里计算出概率。具体计算方法为

$$\frac{\text{给定方框中的元素数量}}{\text{元素的总数量}}$$

由此，概率从柱状图中被计算出来。类似地，从条件柱状图计算出来的条件概率 $p(A_g|B_g)$ 和 $p(A_g|B_b)$ 分别如图 18.3 和图 18.4 所示。

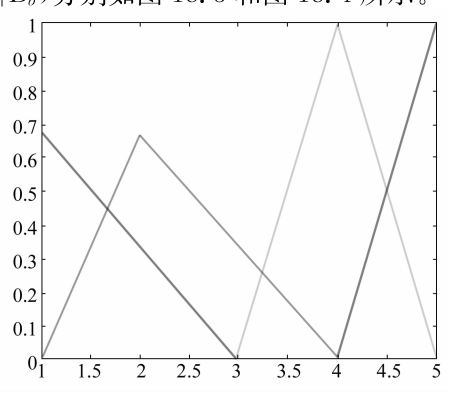


图 18.3　由传感器 1 在节点 1 的位置估计给出的传感器 2 在节点 2 的位置估计的条件概率

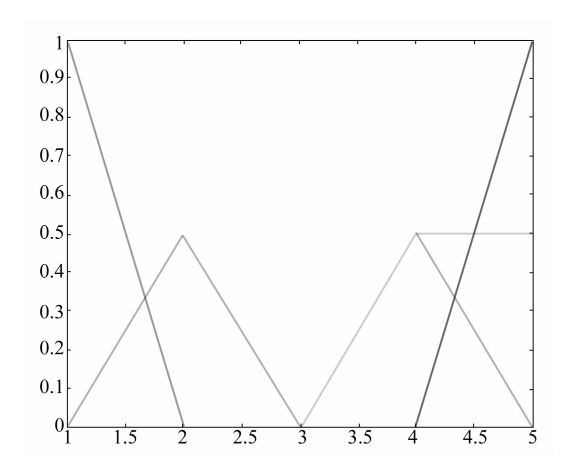


图 18.4　由传感器 1 在节点 1 的位置估计给出的传感器 3 在节点 3 的位置估计的条件概率

这两幅图中的每种彩色线条代表一个条件概率分布函数。注意，A 和 B 都是向量，并且集合 A 的每个成员有一个概率分布函数（pdf）。因为我们已经选取了柱状图方框的大小为 5，集合 A 中会有 5 个成员，所以图 18.3 和图 18.4 中有 5 个子图。

采用上述概率，通过前面给出的方程可计算出节点 2 和节点 3 的一个传感器特征集的条件熵 $H(A_g \mid B_g)$ 和 $H(A_g \mid B_b)$，以及交互信息 $I(A_g, B_g)$ 和 $I(A_g, B_b)$。在概率、条件熵和交互信息的初始计算后，不管传感器何时估计出一个新的特征，它将被特征集中旧的特征替代[①]，并传递给其他传感器。随后，用更新的特征集来计算柱形图、概率、条件熵和交互信息。这些都是在非固定特征情况下进行的。因此，每个新的特征都能够被验证，以确保它有助于决策过程以及是从一个质量好的传感器获取的。所以，该项技术在本质上是动态的。

1. 算法的多样性

为了证明算法的多样性，我们考虑了一个不同的特征集，即传感器测量值本身而不是位置估计及其初始偏差。我们用上述两种不同类型的特征集和由概率、熵、交互信息计算的相关柱形图进行了类似仿真。在这两种情况下，对于所有 100 次蒙特卡罗仿真，我们也总是得到 $I(A_g, B_g) > I(A_g, B_b)$。

2. 传感器识别算法的灵敏度

接下来，通过传感器 2 和 3 噪声的变化来确定传感器识别算法的灵敏度。传感器 1 的信噪比（SNR）固定为 10dB。当传感器 2 的信噪比为 8dB、传感器 3 为

① 原文如此，正确的表述应是：它将替代特征集中旧的特征。——译者注。

3dB 时，该算法能够 100%区分传感器的好坏。当传感器 2 的信噪比固定为 8dB，如果传感器 3 的信噪比为 5dB，那么该算法能够在 80%的时间内区分传感器的好坏。如果传感器 1 和 2 的信噪比为 10dB，那么当传感器 3 的信噪比为 5dB 时，该算法能够在 100%的时间内区分。但是，当传感器 3 的信噪比为 7dB 时，正确的识别率便下降到 82%。所以，如果传感器 2 和 3 的信噪比的最小差为 5dB，那么分辨的精度便是 100%。如果传感器 2 和 3 的信噪比很接近(相差 1dB)，该算法就达不到预期的效果。

3. 交互信息与跟踪精度

为了检查交互信息度量何时被用来评价通过观察估计缺失特征(信息)得到的信息增益，以及它在什么时候对决策精度(即跟踪精度)的改善上有帮助，我们进行了下面的实验。

如前所述，交互信息 $I(A_g, B_g)$ 和 $I(A_g, B_b)$ 的度量计算作为特征集。如果 $I(A_g, B_g) > I(A_g, B_b)$，那么用 18.2.5 节介绍的全局卡尔曼滤波器和 DSm 联合规则，对来自质量好的传感器的状态估计与传感器 1 进行融合。通过比较融合状态估计与真实位置，便可计算出位置估计误差。为了比较跟踪精度，质量好的传感器和质量差的传感器的状态估计也会参与融合。其位置估计误差计算与上述方法相同。

图 18.5 给出了位置估计误差，它是通过融合传感器 1 与一个质量好的传感器的状态估计(蓝色)，以及融合传感器 1 与一个质量差的传感器的状态估计(红色)的结果。从图中能够看出，融合质量好的传感器(1 和 2)要比融合一个质量好的和一个质量差的传感器(1 和 3)的状态估计得到的跟踪精度好得多。这就表明交互信息与跟踪精度密切相关。

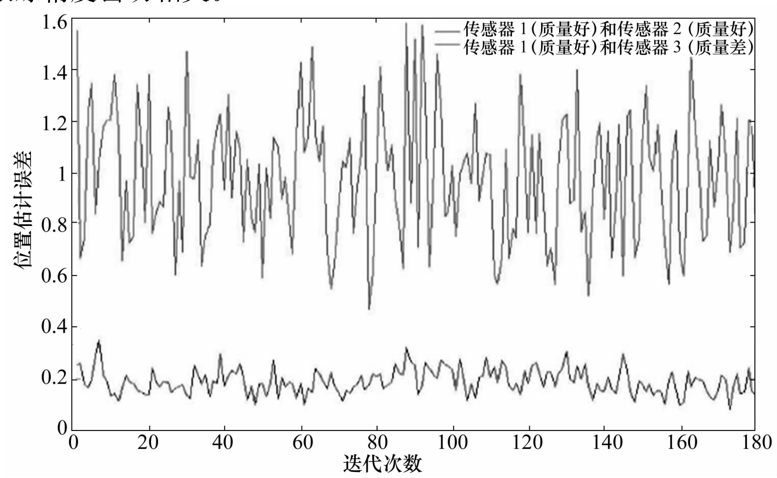


图 18.5　跟踪精度比较：传感器 1 和 2 的信噪比＝10dB，传感器 3 的信噪比＝0dB

图 18.6 给出了当传感器 2 和 3 的噪声级差为 5dB 时的位置误差。在这种情况下也能发现，融合质量好的传感器的状态估计比融合一个质量好的和一个质量差的传感器的状态估计跟踪精度更好。

然后，我们构建了一个具有一致性和运用交互信息度量的传感器组群。从上面的结果可以看出，当交互信息增加时，通过融合来自传感器的信息，决策精度会改善。将融合结果传递给其他传感器组群时，降低了对通信带宽的要求（相比于每个传感器在网络上与其他传感器的决策传递而言）。

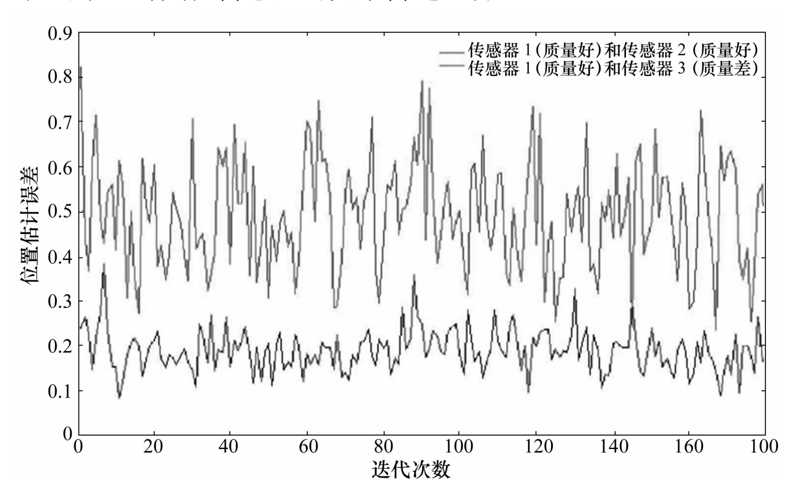


图 18.6　跟踪精度比较：传感器 1 和 2 的信噪比＝10dB，传感器 3 的信噪比＝0dB[①]

18.3.2　具有异质传感器的空间 DSN 的实际网络

18.2 节提出的算法被用到由多个传感器、一个无线发射装置和一个 Sharc 处理器组成的传感器节点上。这些传感器节点分布在恶劣的地域（如沙漠里）。该网络用来检测、跟踪和分类目标。虽然我们验证了在传感器节点网络中缺失信息的估计、传感器选择、传感器和特征评估的相关算法，但在下面的几个小节中，我们将把重点放在 18.2.4 节和 18.2.5 节介绍的基于智能融合的信息的评价上。其他算法的实验结果将在本章的最后给出。我们给出了实验细节和结果，并从回顾文中采用过的检测和分类算法开始。

1. 检查基于信息值的智能融合算法回顾

2.4 节给出的算法用来评价在目标检测和分类中从其他信息源获取的信息值，如从一个节点上的多个传感器和从邻节点上获取的信息。对于目标检测，基于检测器的能量被采用；对于分类，基于最大可能性的分类器被采用。如前所述，信

① 原文如此，正确的表述应是：传感器 3 的信噪比＝5dB。——译者注。

息值取决于决策精度的改善，决策精度与分类器的分类精度和检测器的检测精度或检测概率密切相关。注意，在本项研究中，我们没有去开发分类器或检测器，而是用别人开发的分类器或检测器，这是因为本项研究的目的是提出信息值的度量方法和当它们被用来做出是否要融合来自其他信息源的信息时验证它对改善决策精度的作用。下面来回顾本章采用的分类器和检测器。

1）基于最大可能性的分类器

为了验证有助于改善决策精度的信息值度量方法，我们采用了基于最大可能性的分类器，该分类器是由威斯康辛大学作为 DARPA 项目的一部分（SensIT）开发的传感器信息技术[16]。对于一个给定的训练特征和目标标签，高斯混合模型是在分类器的训练期间确定的。在测试中，测试特征向量和第 i 级高斯混合模型的距离被计算出来。这符合负对数可能性。然后用先前的概率来获取后面分类的最大值。这里所用到的特征集是由能量频谱密度的 20 个特征组成。它采用 1024 快速傅里叶变换（FFT）来计算。其特征集是通过对那些具有等长间隔的能量频谱求和得到的。对于声音和振动传感器，所用到的最大频率分别是 1000Hz 和 200Hz。

2）基于能量的检测器

当基于信息值的融合结构被采用时，基于能量的检测器同样被用来验证决策精度的改善。该检测器由 BAE，Austin[3] 开发，也是 SensIT 项目的一部分。下面简要介绍该检测器。

对于每一批给定信号，其向下采样的频谱密度能量被计算出来。在能量频谱密度的计算中，用了 1024 个点的 FFT。这个能量用来与阈值相比较。只要能量在阈值之上，就算作目标被检测到。其阈值是根据背景能量而自动改变的。

2. 实验的详细内容

上面介绍的分类器和检测器，以及信息值量度和用这些量度数据决定何时融合何时不融合信息的融合算法，它们将用实际的数据来完成测试。这些实际数据是从位于加州（CA）29 Palms 的东—西、南—北道路上分布的传感器节点获得，实验区域（SITEX'02）如图 18.7 所示。这些传感器节点由 Sensoria 制造。在每个传感器节点，有三个传感器——声音、振动和红外传感器，一个四通道数据获取板和一个处理板。这些节点也有通信功能。关于传感器节点更多的细节可参考文献[14]。

在进行实验时，AAV、Dragon Wagon（DW）和 HMMWV 三辆车在如图 18.7 所示的东—西和南—北的路上行驶。图中标示了节点分布位置。总共有 24 个节点参与实验。适当时采用来自这些节点的振动和声音数据。分类实验细节和结果将在下文给出，检测实验细节和结果也将在下文提供。后续内容将给出采用或不采用由本项研究提出的基于信息值融合算法的实验细节和结果。

1）分类实验

首先考虑来自每个节点的声音数据。最大可能性分类器只用来自单独节点的

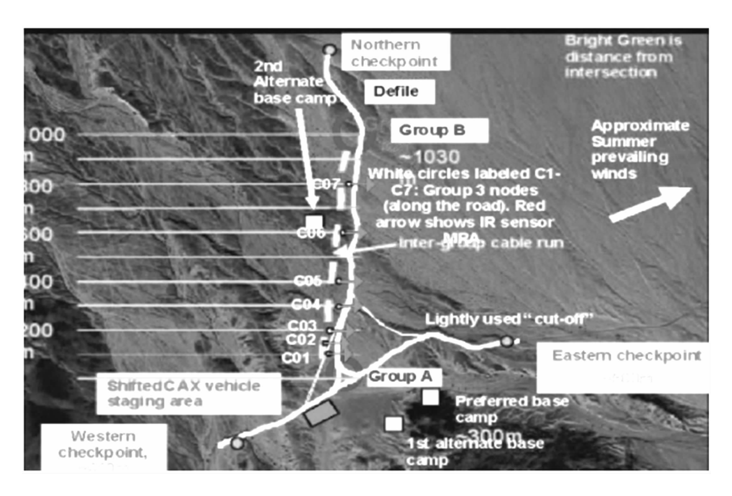


图 18.7　位于加州 29 Palms 的传感器节点分布

声音数据进行训练。分类实验有三重挑战:何时丢弃数据源;何时在连续的节点之间传递数据;何时在相同节点内共享单独的传感器数据。我们只用声音数据研究了 18.2.4 节简略介绍的四种信息值量度的有效性,即交互信息、欧几里得距离、相关性和 Kullback-Liebler 距离。

另外,我们研究了采用这些量度的两种方法。当评估融合两个数据源的效果时,用两个数据源相互比较和用存储的训练数据进行比较哪一个更好呢?为了回答这个问题,我们设计了几种类似的方法来评估两个数据源的紧密性。我们在所有连续的节点数据之间计算这些度量。然后在每个节点处用正确的分类方法计算每个类似性量度的相关性。我们称其为性能相关性。图 18.8 给出了用前面节点类似性量度得到的对于每个数据类的所有节点的平均性能相关性。然后,我们计算了每个节点的数据与储存在训练集中的数据之间的类似性量度。再次,对于每个类似性量度,我们用正确分类方法计算了它在每个节点的相关性。

图 18.9 给出了用前面节点类似性量度得到的对于每个数据类的所有节点的平均性能相关性。

从图 18.8 和图 18.9 可以看出,用正确的分类方法,类似性量度欧几里得距离和相关性,比交互信息或 Kullback-Liebler 距离和相关性更加一致。在实践中,我们发现欧几里得距离在融合决策中作为决定因子表现出更好的相关性。而且,比较图 18.8 和图 18.9 可知,类似性量度用训练集比用来自网络中前面节点的数据更加有效。我们在实践中发现确实是这样。接下来的研究是用振动数据来映射声音数据。注意,虽然我们用训练数据来进行融合决策,但是我们是用当前和先前的节点数据来进行实际的数据融合的。

丢弃不利的数据。有时一个节点或传感器会有不利的数据,在这种情况下我

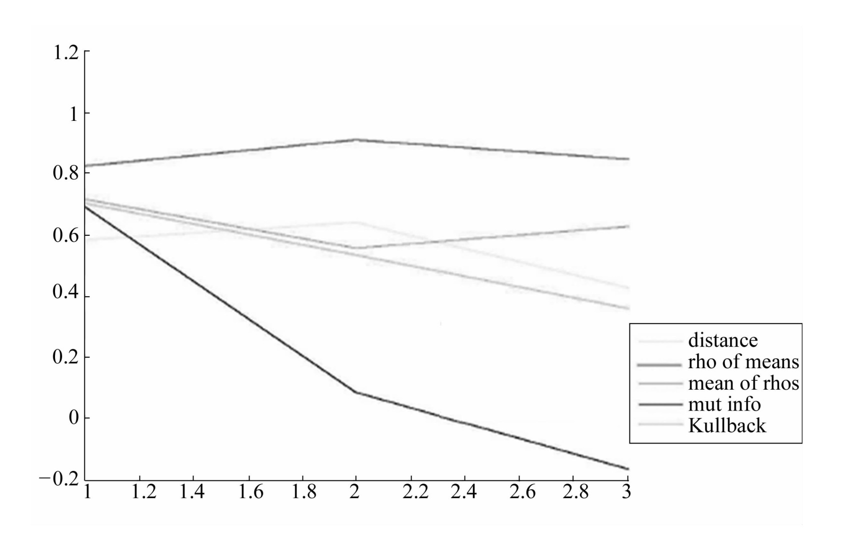


图 18.8　先前节点数据的性能相关性

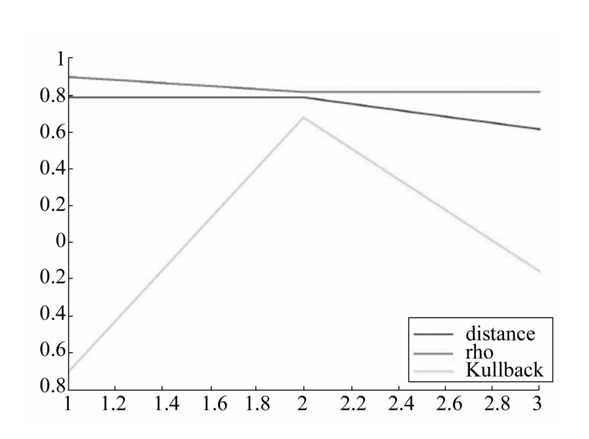


图 18.9　训练类数据的性能相关性

们宁愿将其丢弃而不用它影响分类结果。特征识别算法就是用来处理这个的。通过丢弃不利数据，我们不将它与其他数据融合，也没有将它传递给任何其他节点，也不在那个数据源计算分类。我们的方法丢弃了几个不利数据源，从而改善了如图 18.10 和图 18.11 所示的整体的分类结果。

节点到节点的融合。融合决策是根据阈值来作出的，也就是说，如果两个特征集间的距离低于某个值，便融合这两个特征集。该阈值可以离线或自适应地预先确定。不过，我们回避了阈值问题，而是根据相对距离来作出融合决策。为了做到这一点，我们先假设属于同一类（aka 目标类）的当前节点为先前的节点并用下面的定义。设 x_n 为当前节点数据的平均值向量，x_{nf} 为当前节点融合数据的平均值

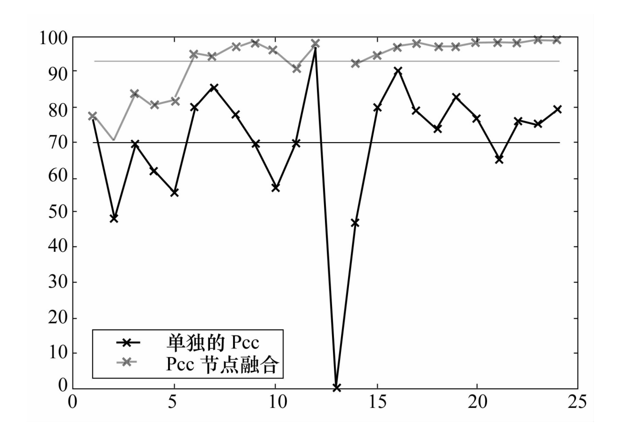


图 18.10　有声音传感器数据的 AAV 节点融合性能

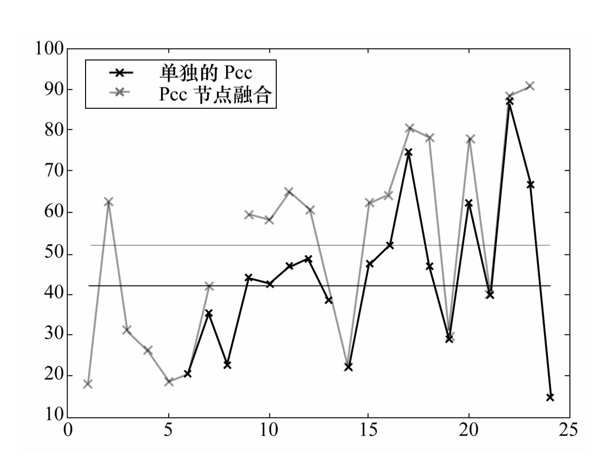


图 18.11　有振动传感器数据的 DW 节点融合性能

向量，x_{c1} 为目标训练类数据的平均值向量，x_{c2}、x_{c3} 为其余训练类的平均值向量。定义欧几里得距离比为

$$r_{dist} = d_{c1}/\min(d_{c2}, d_{c3}) \tag{18.13}$$

式中：d_{ci} 为 x_n 与 x_{ci} 之间的欧几里得距离(18.8)。然后用下面的伪码来作出融合决策。

```
if(r_dist <= 1.0)
    fuse_4class = 1; fuse_4carry = 1;
    class_ind = classify x_i;
    if(class_ind >= 70 % ) chcck class _fuse;
    end
```

```
else
        fuse_4class = 0; fuse_4carry = 0;
        if{(d̄c1 <= 3sc1) & (dc2 <= 3sc2) & (dc2 <= 3sc2)}
            class_ind = classify xn,
            if (class_ind = target class) fuse_4class = 1;
                if(class_ind> = 70%)
                    fuse_4carry = 1;
                    class_fuse = classify xnf,
        if(class_ind>class_fuse)
                        clas_fuse = class_ind;
        end
                end
            end
        clse
                reject this data;
        end
end
```

有两个融合决策的结果。首先，我们决定是否在当前节点融合数据。如果当前节点有坏数据，融合就会被阻止进行。同时，我们也不想把坏的数据传给下一个节点(第二个融合决策结果)。fuse_4class 是一个标记，指明是否要对当前的分类进行融合。fuse_4carry 也是一个标记，指明是否将当前节点的数据包含在进一步的融合数据中。根据这个决策，运用 18.2.5 节介绍的融合算法，便能实现分类决策融合。在图 18.10 和图 18.11 中，通过节点到节点的融合，分别给出了对于声音和振动传感器的正确的分类结果。对于声音传感器，我们给出了来自 AAV 数据的分类结果；对于振动传感器，则采用了 DW 数据。在声音数据的情况下，对所有节点分类的平均正确率从独立操作的 70%增加到采用节点到节点融合的 93%。类似地，振动分类的正确率从 42%增加到 52%。

传感器之间的融合。在进行了单独传感器的节点到节点的融合之后，我们发现在同一节点融合声音和振动传感器数据很有好处。为了做到这一点，我们采用了下面的定义。设 r_{dist} 与式(18.13)的定义相同，但为一个新的数据类型(a—声音，s—振动，as—连接的声音/振动向量)。设 x_a 为节点到节点融合后当前节点声音数据的平均向量，x_s 为节点到节点融合后当前节点振动数据的平均向量，$x_{as}=x_a$ 与 x_s 的连接(哑融合)，$x_{asf}=x_a$ 与 x_s 的智能融合，x_{in}为分类器的数据输入。我们现在采用下面伪码所表示的传感器融合过程的两个步骤。在这种情况下，采用 18.2.5 节介绍的基于 DSm 的技术对来自诸如声音和振动两个独立信息源进行特征融合。首先，采用下面这个巧妙的传感器融合程序：

```
indx = min(r_a_dist, r_s_dist, r_as_dist)
if(indx = 1) x_in = x_a;
elseif(indx = 2) x_in = x_s;
elseif(indx = 3) x_in = x_as;
end
```

接下来，使用一个最终的融合程序：

```
class_acst = classify x_a;
class_seis = classify x_s;
class_as_dumb = classify x_as;
class_as_smart = classify x_asf;
if{(class_acst> = 70%)|(class_seis> = 70%)|(class_as_ind> = 70%)}
    class_final_fuse = max(class_acst,class_scis, class_as_dumb,class_as_smart)
end
```

图 18.12 以条形图的形式给出了每个阶段的融合结果。对于每种类型车的所有节点分类性能是平均的。如表 18.1 所列，在每个融合处理阶段，分类的正确率都有改善。这个结果表明基于信息值的融合对改善每个节点的决策精度有极大的帮助。

表 18.1　分类性能概要

	AAV	DW	HMMV
单独的声音	70%	58%	46%
单独的振动	72%	42%	24%
声音融合	93%	80%	69%
振动融合	93%	52%	31%
单独的声音和振动	76%	55%	58%
声音和振动融合	95%	90%	77%

2）检测实验

声音和振动数据也要在检测实验中被考虑。首先，只有来自单独节点的声音数据被采用。开始时设置一个阈值，这个阈值随着背景能量的变化而改变。声音数据的能量频谱密度采用 1024 点 FFT 来计算，它以 8 向下采样。能量频谱密度的向下采样能量被计算。将该能量与阈值相比较。如果该能量大于阈值，就认为目标被检测到。检测时间和检测信度也被计算出来。检测的时间和结果与实验场地的实情进行比较。如果假定的目标被检测出来，同时检测时间也在感兴趣的区域内，则它被用来计算检测概率。如果检测时间在兴趣区之外（错过检测），目标不应该被检测时被检测出来（出错报警），则它被用来计算出错概率。只采用没有融合的单独节点的声音数据，对于 AAV、DW 和 HMMWV，检测概率和出错概率分别为 0.8824、0.8677、0.8382 和 0.1176、0.1323、0.1618。同样地，只采用没有融合的单独节点的振动数据，对于 AAV、DW 和 HMMWV，检测概率和出错概率分

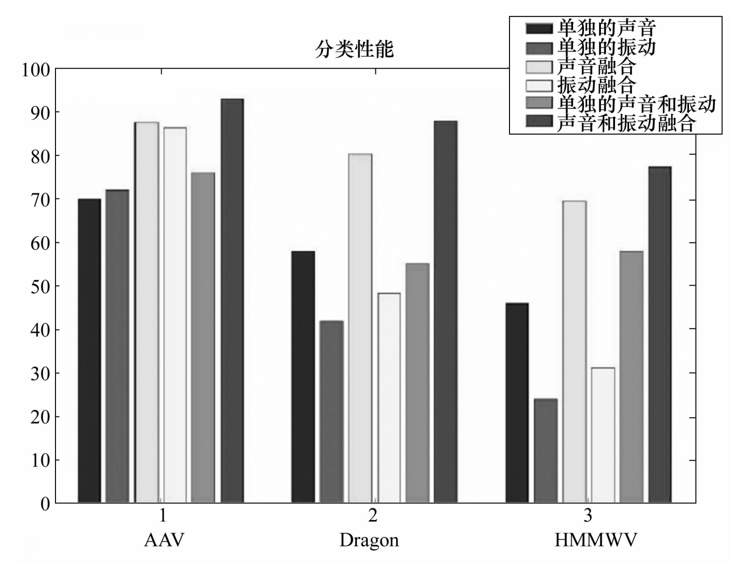


图 18.12　在融合过程中每一步的平均正确分类性能

别为 0.8030、0.7910、0.5735 和 0.1970、0.2090、0.4265。

接下来，基于交互信息的信息量度值被用在能量频谱密度的能量中，在每个独立节点上通过融合声音与振动传感器的数据来作出决策。该检测器是通过融合每个节点数据进行测试的。检测概率与出错概率按上述方法计算。对于 AAV、DW 和 HMMWV，智能融合数据的检测概率分别为 0.9394、0.9105、0.8529。出错概率在这里没有给出，因为检测概率、出错概率和遗漏的检测加在一起等于 1。其结果如图 18.13 所示。由此可见，基于信息值和 DSmT 的智能传感器数据融合可以在很大程

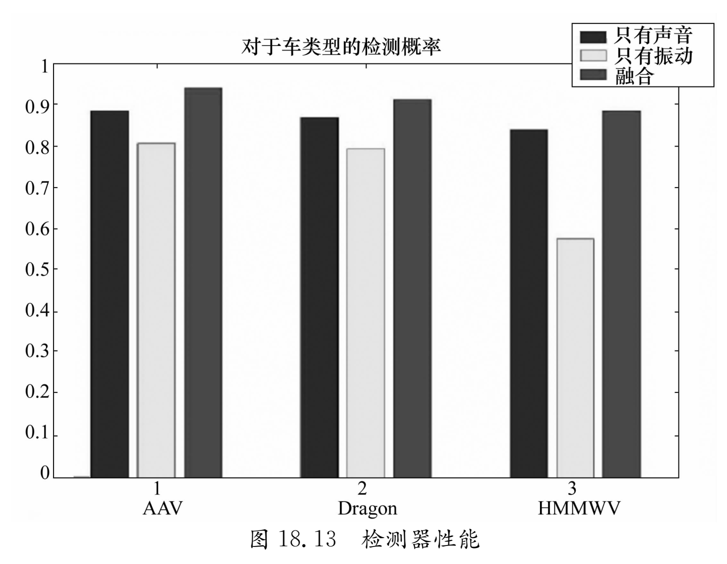


图 18.13　检测器性能

度上改善决策的精度。这种融合对诸如 HMMWV 情况下的复杂数据特别有帮助。

18.4 结论

在本章中,我们介绍了如何利用最小最大熵原理进行特征(缺失信息)发现,以及如何从缺失信息获取传感器类型(信息类型)。进一步地,我们定义了一致性测量,并指明该测量可用来识别和评价传感器的质量。接着,我们定义了条件熵和交互信息,并指出这两个量度能够用来确保估计缺失信息或新的特征集对获取信息和决策过程有帮助。更进一步,我们介绍了几种信息值的量度。在决定何时融合信息时已经应用了这些量度。我们发展了一种基于 DSmT 的融合算法。我们验证了所有量度和融合的概念,先是通过一个仿真的雷达传感器网络,然后在一个空间分布的具有多个传感器的传感器节点实际网络上进行了验证。实验结果表明:最小最大熵原理可用来估计缺失信息和信息类型,它也能被用到信息组群的形成;基于类内熵的测度能够被用到传感器识别中;交互信息可用来评估特征质量和评价信息值;信息值量度有助于智能融合;分布式智能融合可以在很大程度上改善决策精度。对于所需的缺失信息,所有这些方法对于激活(唤醒)所需传感器都有帮助,而且只在需要时传递有价值的信息并且只融合有价值的信息。从而,能量、计算和通信资源能够被有效地利用。

参 考 文 献

[1] Bar—Shalom Y., Fortmann T. E., *Tracking and data association*, Academic press, San Diego, 1988.

[2] Battti R., *Using mutual information for selecting features in supervised neural net learning*, IEEE Trans. On Neural Network, Vol. 5, No. 4, July 1994, pp. 537-550.

[3] Beck S., *Energy based detector*, SensIT PI meeting, Jan 15-17, 2002, Santa Fe, New Mexico.

[4] Darbellay G. A., Vajda I., *Estimation of the information by an adaptive partitioning of the observation space*, IEEE Transactions on Information Theory, vol. 45, no. 4, pp. 1315-1321, May 1999.

[5] Dezert J., Smarandache F., *Combination of beliefs on hybrid DSm models*, Advances and Applications of DSmT for Information Fusion, American Research Press, Rehoboth, June 2004, Chap. 4.

[6] Kadambe S., *Information theoretic based sensor discrimination for information fusion and cluster formation in a network of distributed sensors*, in Proc. of 4th International Conference on Information fusion, Montréal, Québec, Canada, August 7-10, 2001, pp. ThC1-19-ThC1-25.

[7] Kadambe S., *Feature discovery and sensor discrimination in a network of distributed sensors for target tracking*, in Proc. of IEEE workshop on Statistical signal processing, Singapore, August 6-8, 2001, pp. 126-129.

[8] Kadambe S., Daniell C., *Sensor/Data Fusion Based on Value of Information*, in Proc. of 6th International Conference on Information Fusion, Fusion 2003, Cairns, Australia, July 2003, pp. 25-32.

[9] Kaput J. N., *Measures of information and their applications*, John Wiley, Eastern Limited, 1994.

[10] Manyika J., Durrant-Whyte H., *Data fusion and sensor management: An information theoretic approach*, Prentice Hall, 1994.

[11] Papoulis A., *Probability, Random variables and Stochastic Processes*, Second edition, McGraw Hill, 1984, pp. 500-567.

[12] Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., Flannery B. P., *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press, 1992, pp. 632-635.

[13] Rabiner L. R., Juang B-H., *Fundamentals of Speech Recognition*, Prentice Hall, 1993, Chapter 6.

[14] http://www. sensoria, com

[15] Thomopoulos S. C. A., *Sensor selectivity and intelligent data fusion*, Proc. Of the IEEE MIT'94, October 2-15, 1994, Las Vegas, NV, pp. 529-537.

[16] Hen Wu Y., *Maximum likelihood based classifier*, SensIT PI meeting, Jan 15-17, 2002, Santa Fe, New Mexico.

本书作者简介

Samuel Corgne：现为法国雷恩第二大学(COSTEL，CNRS UMR 6554 LETG)博士研究生。目前的研究领域是遥感和(高分辨率和超高分辨率)图像处理在布列塔尼地区的土地覆盖建模及预测的应用。E-mail：samuel. corgne @ Uhb. Fr。

Frédéric Dambreville：曾经学习过数学、逻辑以及信号和图像处理。于2001年在法国雷恩第二大学获得信号处理和优化博士学位。同年开始，在海军研究生院做博士后研究。2003年，加入法国CTA实验室(Délégation Générale pour l'Armement)的图像、预测和机器人部。主要从事优化/规划、数据/传感器融合、马尔可夫模型/贝叶斯网络研究。E-mail：Frederic. Dambreville@dga. defense. gouv. fr。

Milan Daniel：1962年出生在布拉格。1985年从布拉格查尔斯大学(Charles University)数学与物理系毕业。1993年在捷克共和国科学院计算机科学研究所完成博士答辩。研究工作多与他的研究所——计算机理论科学系(即过去的知识库系统系)有关，参考www. cs. cas. cz。主要科研方向为信度函数，也就是信度函数组合及信度函数概率变换。另一个关注方向是不确定性处理、模糊逻辑和知识库系统。E-mail：milan. daniel@cs. cas. cz。

Denis De Brucq：法国鲁昂大学(Rouen University)荣誉教授，同时也是鲁昂纯文学艺术学会的成员。发展了特殊概率演化规则的有限滤波方法，还拓展了离散时间演化中非高斯和非线性模型的卡尔曼滤波逼近。在最近的手写体描述和黑素瘤检测的相关应用中，提出应考虑用不同的信息来源进行融合构建。主页：denis. debrucq. free. fr/DBMA. htm。E-mail：denis. debrucq@free. fr。

Jean Dezert：1962年8月25日出生于法国的拉伊莱罗斯(l'Hay les Roses)。1985年于巴黎的法国电子与信息技术学校获得电子工程学位，1986年从巴黎第七大学(Jussieu大学)获得高等教育文凭，1990年从巴黎第十一大学(Orsay)获得自动控制和信号处理博士学位。1986年至1990年，在位于法国Châtillon的国家空

间研究所(ONERA)系统部进行跟踪方面的研究。1991年至1992年,作为欧洲空间局(ESA)的博士后研究员,访问了美国康涅狄格斯托斯大学(University of Connecticut, Storrs)电子和系统工程系。1992年至1993年,在法国Orléans大学担任电子工程助教。自1993年起,成为图像估计与决策(IED)研究实验室和ONERA信息建模处理学部(DTIM)的高级研究员。目前的研究方向包括自动导航,估计理论,随机系统理论及其在多传感器-多目标跟踪(MS-MTT)中的应用,信息融合,似是而非推理等。从2001年起,和Smarandache教授共同提出了一种新的似是而非和自相矛盾推理的信息融合理论(DSmT),2004年编辑了第一本有关该新兴领域的教科书(文集),并由美国研究出版社(Rehoboth)出版。获得一项自动导航领域的国际专利,并且在国际会议和刊物上发表了数篇论文。合作撰写了《多目标多传感器跟踪》第二卷的一章:应用和研究进展(主编为Y. Bar-Shalom)。是IEEE及Eta Kappa Nu (HKN)学会的成员,并且担任许多国际期刊的审稿人,在法国ENSTA工程学院教授MS-MIT课程。合作推动了国际信息融合学会(ISIF)的发展,并作为主办方负责人筹办了第三届信息融合国际会议(2000年8月10日至13日于法国巴黎举行)。是2001年至2004年国际信息融合会议技术委员会成员。自2001年,是国际信息融合学会(http://www.isif.org)编委会成员,并担任秘书。2004年,担任ISIF的执行副总裁。2003年,在澳大利亚凯恩斯举行的国际信息融合会议上,与Smarandache教授组织了第一次关于信息融合中似是而非和自相矛盾推理的特别讨论;2004年8月在斯德哥尔摩举行的信息融合会议上,又组织了关于DSmT的一个小组讨论和一个特别会议。E-mail:jean.dezert@onera.fr,jdezert@yahoo.com。

Mohamad Farooq:1965年在印度昌迪加尔市旁遮普工程大学获得工学学士学位,1967年在德里的印度技术学院获得硕士学位,1974年在加拿大的新不伦瑞克大学获得博士学位。1980年3月,进入位于加拿大安大略省金斯顿市的皇家军事学院(RMC),在电子与计算机工程系任教授。1998年至1999年,在休年假期间,参与了加拿大计算机设备公司(CDC)与皇家军事学院之间关于对象跟踪和传感器信息融合在海岸声纳防御系统的应用的技术转让,该项技术的合同最近授予了加拿大计算机设备公司。1991年至1992年的年假期间,为加拿大的Thomson-CSF公司关于多传感器-多目标跟踪的一系列项目提案和相关的资金保证提供了大量帮助。组织了许多加拿大空军的高级技术应用会议,并担任技术主席以及最终论文集的合作编辑。现在仍是电路与系统中西部研讨会指导委员会成员。还在许多国际会议的程序委员会任职,如IEEE控制协会、IEEE工业电子会议、国际光学工程协会(SPIE会议)、国际融合会议(1998年、1999年、2000年、2002年及2003年度)等担任会议编辑。1998年被提名为信息融合国际协会第一届理事会候选人,

并被任命为 Elservier Science S. A 出版的《多传感器信息融合》的国际编委会编辑。是加拿大国防咨询委员会的成员，并起草了一份关于加拿大融合技术研究状况的报告，应邀作了一系列关于传感器融合技术及其应用的演讲。担任加拿大的许多国防咨询公司的顾问。在皇家军事学院的多传感器-多目标信息融合研究小组的成立过程中给予了很大的帮助。在多方向目标跟踪、机器人、电机驱动控制和传感器数据融合方面有许多研究项目，并且出版了许多该领域的技术论文。E-mail：farooq@rmc. ca。

Laurence Hubert-Moy：1989 年在雷恩大学获得地理学博士学位。现为雷恩大学地理系助理教授。2000 年至 2002 年，担任 CNRS（法国国家科研中心）研究员，以及曼彻斯特市波士顿大学遥感中心地理系访问学者。对于遥感在农业中的应用有广泛的研究，比如：集约型农业区的局部和区域性的土地覆盖及其变化；基于遥感数据的湿地识别；空间建模和统计在图像理解中的应用。是法国国家科研中心的 2003 年铜牌得主。E-mail：Laurence. Hubert@Uhb. Fr。

Anne-Laure Jousselme：1997 年在拉瓦尔大学（加拿大魁北克）和法国格勒诺布尔国立综合理工学院获得信号处理博士学位。2002 年加入位于瓦尔卡蒂埃的加拿大国防研究及发展中心决策支持系统部的形势分析支持系统小组。自 2000 年起，在拉瓦尔大学（加拿大魁北克）担任电子及计算机工程系副教授。通过“质量评估和统一目标识别信息融合”合作奖学金来指导博士及硕士研究生。这个与加拿大洛·马公司合作的 NSERC 项目着眼于研究信息融合（比如随机集和模糊证据理论）的统一框架，以及对不完备信息进行建模来表示不确定性、可靠性和实用性。近期的研究内容有：信息融合，不确定推理，泛化信息理论，态势分析，分类融合和目标辨识分类系统的性能评估等。E-mail：Anne-Laure. Jousselme@drdc-rddc. gc. ca。

Shubha Kadambe：1991 年 5 月在罗德岛大学获得电子工程博士学位。先后在杜邦研究所、AT&T 贝尔实验室以及亚特兰大航空电子公司任职。最近成为 HRL 实验室有限责任公司的高级研究员。在多个领域有广泛的研究，包括传感器处理，语音，时频表达，高级信号及图像处理，融合及生物医学信号处理。已发表了 60 余篇论文，一本视频教程，3 个邀请章节以及一部独立著作（将由 John Wiley 出版社出版）的编写。自传已被美国名人录及美国妇女名人录收录，分别于 1998 年和 2002 年由 Marquis 出版。还担任《IEEE 信号处理学报》的助理编辑以及许多国际会议的技术委员会成员。还主持了各种国际会议的技术讨论。研究方向包括：时频/时间比例分析在语音技术中的应用，声纳和雷达，智能融合，语音技术，神经网

络，图像处理和非线性信号处理。最近被 IEEE 的主席团和理事会选为高级会员，以表示对她专业地位的承认。是马里兰大学巴尔迪莫分校（UMBC）的客座教授。在 UCLA、UMBC 和加利福尼亚技术学院任教本科和研究生课程。还在南加州大学进行过专题讲座。E-mail：skadambe@hrl. com。

Mohammad Khoshnevisan：生于伊朗，在美国长大。是澳大利亚 Griffith 大学的金融学讲师。在澳大利亚孟菲斯的 CBU 得到数学学士学位，在伍伦贡得到计算机硕士学位。2000 年，在墨尔本大学计算机科学与软件工程系获得博士学位。因其在金融工程和模糊系统的贡献而为世界所知。目前在加州大学伯克利分校的 BISC 任职，并同时被哈佛大学和加州大学伯克利分校聘为客座教授。发表了 34 篇论文，其中最优秀的 5 篇论文被美国数学学会引用。E-mail：m. khoshnevisan@griffith. edu. au。

Pavlina Dimitrova Konstantinova：分别于 1967 和 1987 年在索菲亚技术大学获得计算机和非线性电子电路暂稳态计算机辅助分析的学士和硕士学位。1971 年至 1989 年，是无线电研究所的研究助理。1989 年起，任保加利亚科学院并行处理研究所传感信息处理数学方法部的助理研究员。是保加利亚自动化与信息学会、图像识别学会的成员。研究方向包括：传感器数据处理、数据关联，数学建模，并行算法和面向对象的程序设计等。E-mail：pavlina@bas. bg。

Patrick Maupin：2001 年进入位于 Valcartier 的加拿大国防研究所的决策支持系统和情景分析决策支持系统研究部。2000 年至 2002 年，在 Ecole de Technologies 教授人工神经网络、模糊系统以及多变量统计分析，目前仍作为研究生参与以人为中心的模式识别项目。1998 年至 2001 年，担任魁北克公共健康部的信息处理顾问和 McGill 大学的数据处理的研究助理。研究得到加拿大自然科学与工程研究委员会和加拿大空间局的支持。研究方向包括：信息融合，不确定性推理，情景分析，以人为中心的模式识别和全局最优分类。E-mail：Patrick. Maupin@drdc-rddc. gc. ca，pmaupin@livia. etsmtl. ca。

Grégoire Mercier：1993 年毕业于位于法国 Evry 的 Institut National des Télécommunications（INT），1999 年在法国 Rennes 大学获得博士学位。目前是位于法国 Brest 的 Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications de Bretagne（ENST Bretagne）的副教授。目前的研究方向是遥感图像处理，更确切地说，专注于 SAR 和超大规模数据的压缩和分割。E-mail：gregoire. mercier@enst-

bretagne. fr。

Tzvetan Atanasov Semerdjiev：1949 年 7 月 5 日出生于保加利亚帕扎尔吉克州。1973 年在俄罗斯莫斯科茹科夫斯基空军工程学院获硕士学位(航空电子学)，1977 年获博士学位(空中交通控制系统)，1985 年在 G. S. Rakovski 国防学院获理学博士(指挥、控制、通信和情报学)。1985 年至 1988 年，担任特种电子学院院长和高级研究与发展系主任。1988 年至 1992 年，担任伯明翰科学院信号实验室主任和信息与计算机技术中心副主任。1992 年起，在伯明翰科学院并行处理实验中心担任教授，并担任“传感器数据处理数学方法”系主任。1999 年起，担任 G. S. Rakovski 国防学院教授并担任国际国内安全系主任。参与学术组织：IEEE-AES，AFCEA(终身成员)，ISIF，AIPT(信息处理与技术国际协会)—俄罗斯莫斯科。教学工作：“G. S. Rakovski”国防学院，索菲亚技术大学空中交通系，国内军事研究院。研究领域：雷达与导航，模型估计与辨识，目标跟踪，建模与仿真，多传感器数据融合，信息安全。是 8 篇博士论文的导师和 10 项 R&D 国际项目的主管。用俄文和英文撰写了 200 余篇包括书籍、论文、R&D 报告和文档的出版物。E-mail：signal@bas. bg。

Florentin Smarandache：1954 年出生于罗马尼亚 Balcesti。1979 年在克拉约瓦大学获得数学和计算机科学两个硕士学位，1997 年在 Kishinev 大学获得数学博士学位，并于移民后在许多美国大学继续进行博士后研究(位于拉斯克鲁塞斯的新墨西哥州立大学，洛斯阿拉莫斯国家实验室)。1988 年逃离罗马尼亚，在土耳其的政治庇护所度过了两年，1990 年移民到美国。1996 年，成为美国公民。在罗马尼亚、摩洛哥、美国担任了多年的数学教授，1990 年至 1995 年在位于亚利桑那州凤凰城的 Honeywell 有限公司担任软件工程师。目前，在新墨西哥大学盖洛普校区教授数学。作为一个多产的学者，是 62 本书籍、85 篇科技文章的作者、联合作者和编辑，并在全世界 50 余种科技期刊和 100 余种文学期刊上撰写过文章。能用罗马尼亚语、法语和英语写作。许多著作被译为西班牙语、德语、葡萄牙语、意大利语、阿拉伯语、世界语。因“自相矛盾”(Paradoxism)推理理论而引起广泛关注。20 世纪 80 年代，引领了文学、哲学、艺术甚至科学的 Paradoxism 先锋派运动，在全世界得到了众多的拥护。这项运动是以在创新中大量运用对立、矛盾、悖论为基础的，搭建了科学、哲学和文学之间有趣的联系[http://www. geocities. com/charlestle/paradoxism. html]，同时建立了中智(Neutrosophic)逻辑学，即一种用于处理悖论的逻辑学。许多数学条目在国际性的期刊和百科全书中被命名为 Smarandache 函数、序列、常数和悖论。于 2001 年 12 月 1 日至 3 日在新墨西哥大学组织了“中智理论第一次国际会议”[http://www. gallup. unm. edu/~ smarandache/First-

NeutConf. htm]。在物理和心理学领域也小有成就。大部分研究成果收藏在亚利桑那州立大学"The Florentin Smarandache Papers"专业资料馆，得克萨斯州立大学，国家档案馆(Rm. Vâlcea)，罗马尼亚文学馆(Bucharest)和 Musée de Bergerac(法国)。2003 年，与 Jean Dezert 博士在澳大利亚凯恩斯召开的 2003 年国际信息融合会议上，组织了第一次针对信息融合中不确定性推理的特别会议。Web info：http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/。E-mail：smarand @unm.edu。

Hongyan Sun：分别于 1987 和 1992 年在中国哈尔滨工业大学数学系获得学士和硕士学位。1996 年在北京航空航天大学电子工程系获得博士学位。此后，曾任职于中国清华大学智能技术与系统部级重点实验室和计算机科学与技术系，并在加拿大多伦多大学机械工程系做博士后研究。目前，作为助理研究员任职于加拿大皇家军事学院电子与计算机工程系。主要研究方向是多源信息处理的理论与应用，通信学，人工智能和应用工程数学。E-mail：hongyansun_11@yahoo.com。

Albena Plamenova Tchamova：保加利亚科学院并行处理研究所传感器信息处理数学方法系助理研究员。分别于 1978 年和 1998 年在保加利亚索菲亚技术大学获得微电子学硕士以及无线电定位和导航(基于证据推理和模糊逻辑的目标识别和分类)博士学位。作为研究员参与了许多多传感器-多目标跟踪(MS-MTT)和数据融合等领域的研究项目(保加利亚以及国际性的)。是欧洲运筹学联合会模糊集分会(EUROFUSE)成员，图像识别协会(BAS)的成员。目前的研究方向包括：MS-MTT，目标识别，信息融合，不确定推理的 DSm 理论，不确定性决策。E-mail：tchamova@bas.bg。

内 容 简 介

本书介绍基于似是而非和自相矛盾推理的 Dezert-Smarandache 理论(DSmT)在信息融合方面的最新进展和应用。DSmT 提出了一种新的数学框架,用来处理用广义基本信度函数表示的不确定、不精确和高冲突信息源。DSmT 超越了 Dempster-Shafer 理论的局限,提出了一种新的一般性融合规则。该规则不要求归一化处理,可应用于具有任何冲突程度的模型(自由 DSm、混合 DSm 和 Shafer 模型)。DSmT 能很好地适应静态的和动态的融合问题,而且可以在任何结构(离散、连续和/或混合的)上应用。因此,即使由于命题本身所固有的模糊性、相关性和不精确性等自然属性而造成精确的识别框架难以获得,DSmT 仍可以用信度函数来处理这些问题。本书的第 1 部分详细介绍 DSmT 的最新研究进展,同时也包含信息融合其他方法的相关理论成果;第 2 部分介绍 DSmT 在解决理论上和现实世界的融合问题的有趣的应用。